Ασκήσεις στο Θ. Stokes.

(1) Να υπολογίσετε τη ροή του $\mathrm{rot}\vec{F}$ διαμέσου της επιφάνειας S, όπου $\vec{F}=(y,z,x)$ κ' S^* το μέρος του παραβολοειδούς $z=1-x^2-y^2$ με $z\geq 0$.

(2) Με χρήση του Θ. Stokes να δείξετε ότι

$$\int_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz=0,$$

όπου C η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=2y$ κ' του επιπέδου $y=z$.

(3) Με χρήση του Θ. Stokes, να δείξετε ότι

$$\int_C (y^2+z^2)\,dx + (z^2+x^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz = 2\pi a b^2,$$

όπου C η τομή του ημισφαιρίου

$$x^2+y^2+z^2 = 2ax, \quad z \geq 0$$

κ' του κυλίνδρου

$$x^2+y^2 = 2bx,$$

όπου $0<b<a$.

(4) Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το διαν. πεδίο

$\vec{F} = (y, z, x)$ κ' το ημισφαίριο $x^2+y^2+z^2=1$, $z \leq 0$.

(5) Με χρήση του Θ. Stokes να υπολογίσετε τη ροή του $\text{rot}\vec{F}$

διαμέσου της επιφάνειας S, όπου

- $\vec{F} = (-y, x, z^2 + xy)$
- S^* το τμήμα της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=2$ που βρίσκεται μέσα

στον κώνο $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

(6) Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το πεδίο $\vec{F}$ κ' την επιφάνεια S, όπου

- $\vec{F} = \frac{1}{2}(z^2, x^2, y^2)$
- S^* : $z = x^2 + y^2$, $1 \le z \le 4$.

(7) Με χρήση του Θ. Stokes να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz)$, όπου C το τρίγωνο ΟΚΛ, $O(0,0,0)$, $K(1,1,0)$, $\Lambda(1,1,1)$.

(8) Δίνεται το πεδίο $\vec{G} = (6y, 3z, 0)$.

(i) Να βρείτε πεδίο $\vec{F} = (P, Q, 0)$ με $\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{G}$.

(ii) Με χρήση του Θ. Stokes να υπολογίσετε τη ροή του $\vec{G}$ διαμέσου της επιφάνειας $x^2 + y^2 = 1$, $1 \leq z \leq 2$.