

Ασκηση 1 στο Θ. Gauss

1) Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το

διαν. πεδίο $\vec{F} = (x, y, z)$. κ' το στερεό που
φράσσεται από τον κώνο $x^2 + y^2 = 1$ κ'
τα επιπέδα
 $z = 0, \quad z = x + 2.$



2) Με χρήση του Θ. Gauss να υπολογίσετε τη ροή

των διαν. πεδίων $\vec{F} = (y^2z, xz, x^2y)$
διαμέσου της επιφάνειας του στερεού που
φράσσεται από τη επιφάνεια
 $z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$



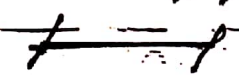
3) Με χρήση του Θ. Gauss να υπολογίσετε τη ροή

των διαν. πεδίων $\vec{F} = (xz, xy, yz)$
διαμέσου της επιφάνειας του στερεού που
φράσσεται από το επίπεδο $x + y + z = 1$ κ'
τα επιπέδα $x = 0, y = 0, z = 0.$



4) Με χρήση του Θ. Gauss να υπολογίσετε τη ροή

των διαν. πεδίων $\vec{F} = (x^2, -2xy, 3xz)$ διαμέσου
της επιφάνειας του στερεού στο 1ο οκτάντη που
φράσσεται από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
κ' τα επιπέδα $x = 0, y = 0, z = 0.$



(2)

5) Με χρήση του Θ -Gauss να υπολογίσετε τη ροή του διαν. πεδίου

$$\vec{F} = (4xz, xyz^2, 3z)$$

διαμέσου της επιφάνειας του σφαιριού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 4, \quad z = 0.$$

—————

6) Να επαληθεύσετε το Θ -Gauss για το διαν.

πεδίο $\vec{F} = (x, y, z)$ κ' το σφαιριό που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad z = 0.$$

—————

7) Δίνεται διαν. πεδίο $\vec{F} = (P, Q, R): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με P, Q, R κλάσης C^2 . Εάν S απλή κλειστή επιφάνεια, να δείξετε ότι

$$\int_S \text{rot } \vec{F} = 0.$$

—————

8) Έστω S επιφάνεια που είναι το σύνορο φραγμένου σφαιριού K κ' $f: K \cup S \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$f|_K$ κλάσης C^2 με $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ στο K .

Να δείξετε ότι η ροή του $\vec{F} = f \nabla f$ διαμέσου της S είναι

$$\iiint_K |\nabla f|^2 dx dy dz.$$