Ασκήσεις στο Θ. Gauss

1) Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το διαν. πεδίο $\vec{F}=(x,y,z)$, κ' το στερεό που φράσσεται από τον κύλινδρο $x^2+y^2=1$ κ' τα επίπεδα
$z=0$, $z=x+2$.

2) Με χρήση του Θ. Gauss να υπολογίσετε τη ροή του διαν. πεδίου $\vec{F}=(y^2z,\ xz,\ x^2y)$ διαμέσου της επιφάνειας του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες
$z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$.

3) Με χρήση του Θ. Gauss να υπολογίσετε τη ροή του διαν. πεδίου $\vec{F}=(xz,\ xy,\ yz)$ διαμέσου της επιφάνειας του στερεού που φράσσεται από το επίπεδο $x+y+z=1$ κ' τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4) Με χρήση του Θ. Gauss να υπολογίσετε τη ροή του διαν. πεδίου $\vec{F}=(x^2,\ -2xy,\ 3xz)$ διαμέσου της επιφάνειας του στερεού στο 1ο ογδοημόριο που φράσσεται από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=4$ κ' τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$.

5) Με χρήση του Θ. Gauss να υπολογίσετε τη ροή του διαν. πεδίου

$$\vec{F} = (4xz,\ xyz^2,\ 3z)$$

διαμέσου της επιφάνειας του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = \sqrt{x^2+y^2};\ z = 4,\ z = 0.$$

6) Να επαληθεύσετε το Θ. Gauss για το διαν. πεδίο $\vec{F} = (x, y, z)$ κ' το στερεό που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = 4 - x^2 - y^2,\quad z = 0.$$

7) Δίνεται διαν. πεδίο $\vec{F} = (P, Q, R) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με P, Q, R κλάσης C^2. Εάν S απλή κανονική <u>κλειστή</u> επιφάνεια, να δείξετε ότι

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{F} = 0.$$

8) Έστω S επιφάνεια που είναι το σύνορο φραγμένου στερεού K κ' $f : K \cup S \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$f|_K$ κλάσης C^2 με $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$, στο K.

Να δείξετε ότι η ροή του $\vec{F} = f\nabla f$ διαμέσου της S είναι

$$\iiint_K |\nabla f|^2\, dx\,dy\,dz.$$