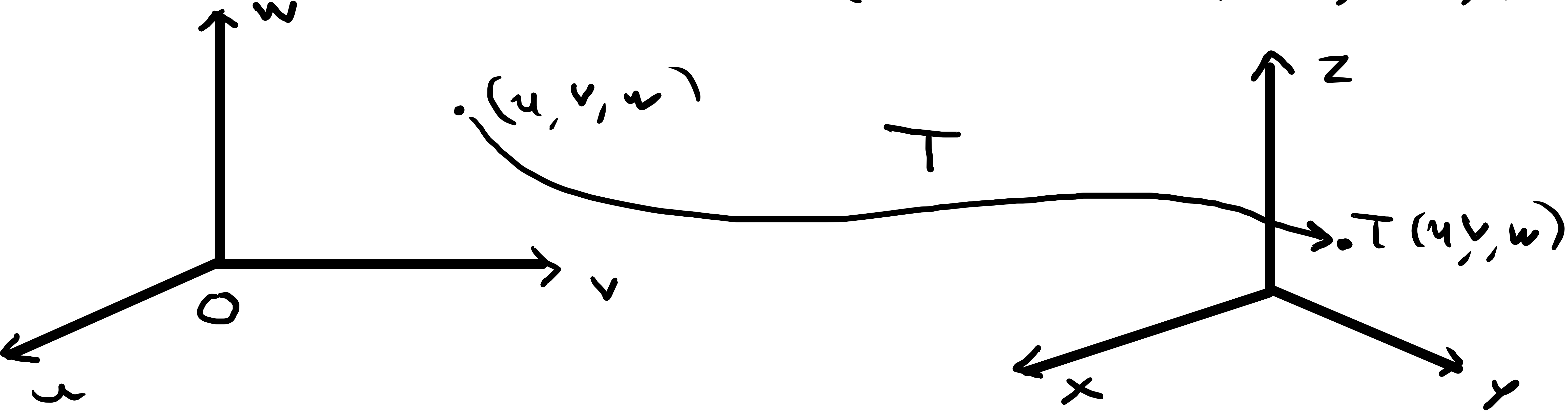
ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΤΟ ΤΡΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό κ' $T : U \to \mathbb{R}^3$ μετασχηματισμός:

$$U \ni (u, v, w) \mapsto T(u,v,w) = \left(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\right)$$



Εάν οι $x(\cdot,\cdot,\cdot)$, $y(\cdot,\cdot,\cdot)$, $z(\cdot,\cdot,\cdot)$ είναι κλάσης C^1, ο T λέγεται <u>C^1 – μετασχ.</u>

$\forall\ P_0(u_0, v_0, w_0)$, ορίζεται η <u>Ιακωβιανή ορίζουσα</u> του T στο P_0:

$$J_T(P_0) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u(P_0) & x_v(P_0) & x_w(P_0) \\ y_u(P_0) & y_v(P_0) & y_w(P_0) \\ z_u(P_0) & z_v(P_0) & z_w(P_0) \end{vmatrix}$$

Θεώρημα Αντικατάστασης

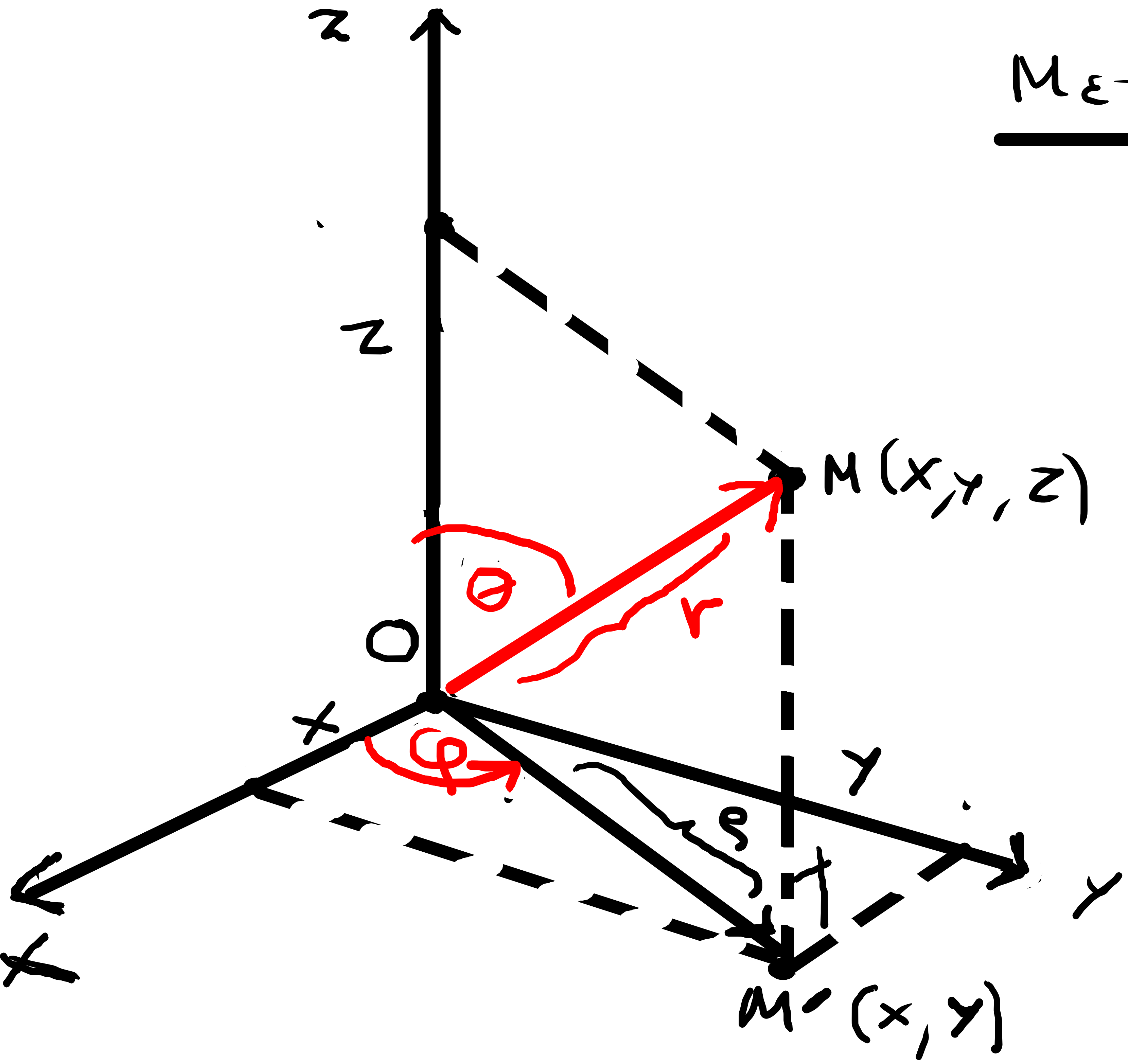
Έστω $T : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^1-μετασχ. ώστε U ανοικτό κ'

- T 1-1
- $\forall (u,v,w) \in U$, $J_T(u,v,w) \neq 0$.

Έστω κ' A Jordan μετρήσιμο, φραγμένο με $\overline{A} \subset U$ κ' $f : T(A) \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε,

$$\iiint_{T(A)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_A f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J_T(u,v,w)|\,du\,dv\,dw.$$



Μετασχ. σφαιρικών συντετ.

Έστω $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

που δεν ανήκει στον $z'z$

κ' $M'(x,y)$ η προβολή

του M στο xy-επίπεδο.

Έστω $(\rho,\varphi) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi]$

οι πολικές συντεταγ-

μένες του M', δηλ.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Επιπλέον, έστω $\theta \in [0,\pi]$ η γωνία των $\overrightarrow{OM}$, Oz.

[Υπενθυμίζεται ότι σε αντίθεση με το επίπεδο, η γωνία δύο διανυσμάτων στο χώρο είναι η κυρτή γωνία των φορέων τους κ' δεν έχει προσανατολισμό.].

Τότε, στο ορθογ. τρίγωνο $\overset{\triangle}{OM'M}$ ($\widehat{OM'M} = 90°$), έχουμε

$$\begin{cases} (MM') = (OM)\cos\theta \Leftrightarrow \underline{z = r\cos\theta, \text{ όπου } r = (OM)}, \\ (OM') = (OM)\sin\theta \Leftrightarrow \underline{\rho = r\sin\theta}. \end{cases}$$

Τελικά,

$$\left.\begin{aligned} x = \rho\cos\varphi &\Rightarrow x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi &\Rightarrow y = r\sin\varphi\sin\theta \\ \text{κ'} \quad & \quad z = r\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

<u>Σφαιρικές συντεταγ.</u>

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$0 \leq \theta \leq \pi$

$r \geq 0$

Ο μετασχ. $T : (0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi) = U \rightarrow \mathbb{R}^3$

με $T(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)$

είναι C^1 κ' 1-1 στο ανοικτό σύνολο U.

Επιπλέον, $\forall\ (r,\varphi,\theta)\in U$,

$$x_r = \cos\varphi \sin\theta = x/r, \quad x_\varphi = -r\sin\varphi\sin\theta = -y,$$

$$x_\theta = r\cos\varphi\cos\theta = z\cos\varphi,$$

$$y_r = \sin\varphi\sin\theta = y/r, \quad y_\varphi = r\cos\varphi\sin\theta = x,$$

$$y_\theta = r\sin\varphi\cos\theta = z\sin\varphi,$$

$$z_r = \cos\theta = z/r, \quad z_\varphi = 0, \quad z_\theta = -r\sin\theta$$

$$\Longrightarrow J_T(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} x/r & -y & z\cos\varphi \\ y/r & x & z\sin\varphi \\ z/r & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r}\begin{vmatrix} x & -y & z\cos\varphi \\ y & x & z\sin\varphi \\ z & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} \overset{(3^{\eta} \text{ γραμμή})}{=}$$

$$= \frac{1}{r}\left[z\begin{vmatrix} -y & z\cos\varphi \\ x & z\sin\varphi \end{vmatrix} - r\sin\theta \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[-z^2(y\sin\varphi + x\cos\varphi) - r\sin\theta(x^2+y^2) \right].$$

Αλλά, $x\cos\varphi + y\sin\varphi = r\sin\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r\sin\theta$

$\Longrightarrow$

$$\Rightarrow J_T(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{r}(-r\sin\theta)(x^2+y^2+z^2) = \underline{\underline{-r^2\sin\theta}} < 0$$

$$\forall (r,\varphi,\theta) \in U = (0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi).$$

Εάν A φραγμένο Jordan μετρήσιμο με $\overline{A} \subset U$ κ΄ $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε

$$\boxed{\iiint_{T(A)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A f(r\cos\varphi\sin\theta,\, r\sin\varphi\sin\theta,\, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta \; dr\,d\varphi\,d\theta}$$

Παραδείγματα:

(i) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού K που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$x^2+y^2=2y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0$$

κ' βρίσκεται στο α' ογδοημόριο.

Λύση: $K=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 2y,\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2},\ x\ge 0, y\ge 0\}$

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\varphi\sin\theta\\ y&=r\sin\varphi\sin\theta\\ z&=r\cos\theta\end{aligned}\right\} \xRightarrow{(x,y,z)\in K} \left\{\begin{aligned} &r^2\sin^2\theta\le 2r\sin\varphi\sin\theta\\ &0\le r\cos\theta\le r\sin\theta\end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$r\geq 0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ \theta\in[0,\pi]$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le r \le 2\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} \\ 0 \le \cos\theta \le \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{0 \le r \le 2\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}} \\ \underline{\theta \in [\pi/4, \pi/2]} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow r\cos\varphi\sin\theta \geq 0 \Rightarrow \cos\varphi \geq 0 \\ y \geq 0 \Rightarrow r\sin\varphi\sin\theta \geq 0 \Rightarrow \sin\varphi \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi \in [0, \pi/2]}.$$

Άρα, $V = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{0}^{\pi/2} \left(\int_{0}^{2\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}} r^2 \sin\theta \, dr \right) d\varphi \, d\theta =$

$$= \frac{8}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3\varphi}{\sin^3\theta} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \frac{8}{3} \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin^2\theta}}_{I_1} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi \, d\varphi}_{I_2} .$$

$$I_1 = -\cot\theta \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -(0-1) = 1,$$

$$I_2 = -\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\varphi)\, d(\cos\varphi) \overset{u=\cos\varphi}{=} -\int_1^0 (1-u^2)\, du$$

$$= \int_0^1 (1-u^2)\, du = 2/3$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{8}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{16}{9}}} \;.$$

(ii) Να υπολογίσετε τον όγκο του ελλειψοειδούς

$$K: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad a, b, c > 0.$$

Λύση:

$$\left.\begin{aligned} x &= ar\cos\varphi\sin\theta \\ y &= br\sin\varphi\sin\theta \\ z &= cr\cos\theta \end{aligned}\right\} \xRightarrow{(x,y,z)\in K} \left\{\begin{aligned} &0 \leq r \leq 1 \\ &\varphi \in [0, 2\pi] \\ &\theta \in [0, \pi] \end{aligned}\right.$$

κ' $J = -abc\, r^2 \sin\theta \implies$

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 abc\, r^2 \sin\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= abc \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{1} r^2 \, dr = \cdots = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3} abc}}.$$

<u>(iii)</u> Να υπολογίσετε το $\iiint_K \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, όπου

K το στερεό που φράσσεται από τις σφαίρες

$$x^2+y^2+z^2 = a^2, \quad x^2+y^2+z^2 = b^2 \ (0 < a < b).$$

<u>Λύση</u>: $K = \{(x,y,z) : a \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le b\}$.

Περνώντας σε σφαιρικές συντεταγμένες r, φ, θ, παίρνουμε ότι για $(x, y, z) \in K$,

$a \le r \le b$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ κ'

$$\iiint_K \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{r^2 \sin\theta}{r^3}\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \cdot \int_a^b \frac{dr}{r} = 4\pi\left(\ln b - \ln a\right) = \underline{\underline{4\pi \ln \frac{b}{a}}}.$$

<u>(iv)</u> Να υπολογιστεί το $\iiint_K \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$,

όπου $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

<u>Λύση</u>: Περνώντας σε σφαιρικές συντεταγμένες r, φ, θ παίρνουμε, $\forall (x,y,z) \in K$,

$0 \leq r \leq 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ κ'

$$x^2+y^2+(z-2)^2 = x^2+y^2+z^2-4z+4$$

$$= r^2 - 4r\cos\theta + 4$$

$\Longrightarrow$ το ολοκλ. γράφεται

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^1\Bigg(\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\,d\theta}_{I_r}\Bigg)dr$$

Για σταθερό r, θέτω

$$g(\theta)=\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4} \Rightarrow g'(\theta)=\frac{4r\sin\theta}{2g} \Rightarrow$$

$$I_r=\frac{r}{2}\int_0^{\pi}g'(\theta)\,d\theta=\frac{r}{2}\left[g(\pi)-g(0)\right]=$$

$$= \frac{r}{2}\left(\sqrt{r^2+4r+4} - \sqrt{r^2-4r+4}\right) =$$

$$= \frac{r}{2}\left(|r+2| - |r-2|\right) \overset{0\le r\le 1}{=} \frac{r}{2}\left(r+2+r-2\right)$$

$$= r^2$$

$\Rightarrow$ το αρχικό ολοκλ. $= 2\pi \int_0^1 r^2 dr = \underline{\underline{2\pi/3}}$.

(v) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται πάνω από τον κώνο $z=\sqrt{x^2+y^2}$ κ' μέσα στη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=2z$.

Λύση: $K=\{(x,y,z):\ \sqrt{x^2+y^2}\le z,\quad x^2+y^2+z^2\le 2z\}$.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \xRightarrow{(x,y,z)\in K} \left\{\begin{aligned} & r\sin\theta \le r\cos\theta \\ & r^2 \le 2r\cos\theta \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} & \theta\in[0,\pi/4] \\ & \varphi\in[0,2\pi] \end{aligned}\right. \quad \text{κ'} \quad 0\le r\le 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad V = \iiint_K dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\cos\theta} r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin\theta \; \frac{8}{3} \cos^3\theta \, d\theta = \frac{16\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{16\pi}{3} \frac{1}{4} \cos^4\theta \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{4\pi}{3} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 - 1 \right]$$

$$= -\frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{4\pi}{3} \frac{3}{4} = \underline{\underline{\pi}}.$$

(vi) Να υπολογίσετε το $\iiint_K z\,dx\,dy\,dz$, όπου K το στερεό που φράσσεται από πάνω από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=16$ κ' από κάτω από τον κώνο $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$.

Λύση: $K=\{(x,y,z): \sqrt{3(x^2+y^2)} \le z, \ x^2+y^2+z^2 \le 16\}$.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \xRightarrow{(x,y,z)\in K} \begin{cases} \sqrt{3}r\sin\theta \le r\cos\theta \\ r^2 \le 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan\theta \le \sqrt{3}/3 \\ 0 \le r \le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/6 \\ 0 \le r \le 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/6}\int_0^{2\pi}\int_0^4 r\cos\theta\, r^2\sin\theta\, dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/6} \cos\theta\sin\theta \left(\int_0^4 r^3\,dr\right) d\theta$$

$$= 2\pi\cdot\frac{4^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}\sin(2\theta)\,d\theta = 4^3\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\cos(2\theta)\Big|_0^{\pi/6} =$$

$$= -32\pi\left(\cos\frac{\pi}{3}-1\right) = 32\pi\left(1-\frac{1}{2}\right) = \underline{16\pi}.$$