ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

1. Γενικά

Επειδή οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού συναντώνται συχνά στη μελέτη των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών θεωρούμε σκόπιμο να τις περιγράψουμε στην αρχή του βιβλίου αυτού.

Επιφάνεια S του εποπτικού χώρου είναι ένα διπαραμετρικό σύνολο σημείων του $\mathbb{R}^3$ με πεδίο μεταβολής έναν τόπο $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$. Δηλαδή

$$S = \left\{ M(x,y,z):\ x = f_1(u,v),\ y = f_2(u,v),\ z = f_3(u,v),\ \text{για}\ u,v \in \Delta \right\}$$

Οι

$$x = f_1(u,v), \qquad y = f_2(u,v), \qquad z = f_3(u,v) \tag{1.1}$$

αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της S.

Αν μεταξύ των (1.1) απαλείψουμε τα u,v, τότε παίρνουμε την επιφάνεια S με τις μορφές

$$f(x,y,z) = 0 \quad \text{ή} \quad z = \sigma(x,y), \quad \text{ή} \quad x = \phi(y,z) \quad \text{ή} \quad y = \omega(x,z)$$

Μία καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ παριστάνεται ως τομή δύο επιφανειών.

Πριν αναφερθούμε στις επιφάνειες δευτέρου βαθμού, θα δώσουμε τους ορισμούς μερικών επιφανειών, οι οποίοι θα είναι χρήσιμοι για τα παρακάτω.

Ευθειογενείς επιφάνειες ονομάζονται οι επιφάνειες εκείνες που από κάθε σημείο τους περνάει μια τουλάχιστον ευθεία, η οποία βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια. Η πιο συνηθισμένη είναι εκείνη που προκύπτει από την κίνηση μιας ευθείας, της **γενέτειρας** της επιφάνειας, η οποία υπακούει σε κάποιο νόμο. Π.χ. συναντάει κατά την κίνησή της μια καμπύλη της επιφάνειας, η οποία λέγεται

οδηγός καμπύλη. Τέτοιες επιφάνειες είναι οι **κυλινδρικές**, οι **κωνικές** και άλλες.

α) Στις κυλινδρικές επιφάνειες η κινούμενη ευθεία, δηλαδή η γενέτειρα, παραμένει παράλληλη προς ένα σταθερό διάνυσμα. Ως οδηγός καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί μια οποιαδήποτε τομή της επιφάνειας με ένα επίπεδο.

Έστω ότι οι επιφάνειες

$$f(x,y,z)=0, \qquad g(x,y,z)=0 \tag{1.2}$$

παριστάνουν μια καμπύλη C, και

$$\sigma(x,y)=0 \tag{1.3}$$

είναι το αποτέλεσμα της απαλοιφής του z μεταξύ των (1.2).Τότε η εξίσωση (1.3) παριστάνει στον $\mathbb{R}^3$ την κυλινδρική επιφάνεια που προβάλλει την C στο Oxy–επίπεδο. Η (1.3) στο Oxy–επίπεδο παριστάνει την προβολή της C στο επίπεδο αυτό.

Ανάλογα μπορούμε να έχουμε τις κυλινδρικές επιφάνειες $\phi(y,z)=0$ ή $\omega(x,z)=0$, οι οποίες προκύπτουν από τις (1.2) με απαλοιφή του x ή y αντίστοιχα.

β) Στις κωνικές επιφάνειες η κίνηση της γενέτειρας γίνεται έτσι ώστε να περνάει αυτή πάντα από ένα σταθερό σημείο, το οποίο λέγεται **κορυφή** της κωνικής επιφάνειας (ή **κώνου**). Η κορυφή κάθε κωνικής επιφάνειας τη χωρίζει σε δύο συμμετρικά μέρη ως προς το σημείο αυτό, τα οποία λέγονται **χώνες**.

Κάθε εξίσωση $f(x,y,z)=0$, όπου η συνάρτηση f είναι ομογενής[(*)] ως προς x,y,z, παριστάνει κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο O(0,0,0).

Η κωνική επιφάνεια με κορυφή ένα τυχόν σημείο (x_0,y_0,z_0) έχει εξίσωση

$$f(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0$$

όπου f είναι ομογενής συνάρτηση ως προς $\xi=x-x_0,\ \ \eta=y-y_0,\ \ \zeta=z-z_0$.

(*) Τον ορισμό της ομογενούς συναρτήσεως θα τον δούμε στο Κεφάλαιο 4.

Επιφάνειες δεύτερου βαθμού

Είναι οι επιφάνειες εκείνες, των οποίων οι συντεταγμένες $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ σ' ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxyz επαληθεύουν την εξίσωση

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \qquad (1.4)$$

όπου A, B, C, D, E, F, G, H, I, J είναι σταθερές.

Π.χ. τέτοιες επιφάνειες είναι η σφαίρα, ο κώνος και άλλες που θα δούμε παρακάτω.

Υποθέτουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές A, B, C, D, E, F είναι διάφορος του μηδενός. Αν όμως όλοι αυτοί είναι ίσοι με μηδέν, τότε η εξίσωση (1.4) γίνεται

$$Gx + Hy + Iz + J = 0$$

η οποία παριστάνει ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$.

Αν από την (1.4) λείπει μια μεταβλητή, τότε έχουμε κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα των συντεταγμένων πάνω στον οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή αυτή. Π.χ. η εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 1$$

παριστάνει τον κύλινδρο (όπως θα δούμε και παρακάτω), ο οποίος έχει γενέτειρα παράλληλη στον Oz–άξονα και οδηγό καμπύλη τον κύκλο

$$x^2 + y^2 = 1$$

του Oxy–επιπέδου.

Μετακινώντας το Oxyz–σύστημα με κατάλληλη μεταφορά και στροφή, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την (1.4) στην απλούστερη μορφή, όπου ενδεχομένως μερικοί από τους συντελεστές είναι ίσοι με μηδέν. Τότε θα λέμε ότι η επιφάνεια είναι στην **κανονική** μορφή της.

Για να μελετήσουμε μια τέτοια επιφάνεια εξετάζουμε τα επίπεδα, τους άξονες και τα σημεία συμμετρίας αυτής. Επίσης βρίσκουμε τις τομές της επιφάνειας με τους Ox, Oy, Oz–άξονες, καθώς και τις τομές της με διάφορα επίπεδα. Την τομή μιας επιφάνειας S με ένα επίπεδο E, η οποία γενικά είναι μια καμπύλη, θα τη λέμε **ίχνος** της S πάνω στο E.

2. Μερικές επιφάνειες δευτέρου βαθμού στην κανονική μορφή τους

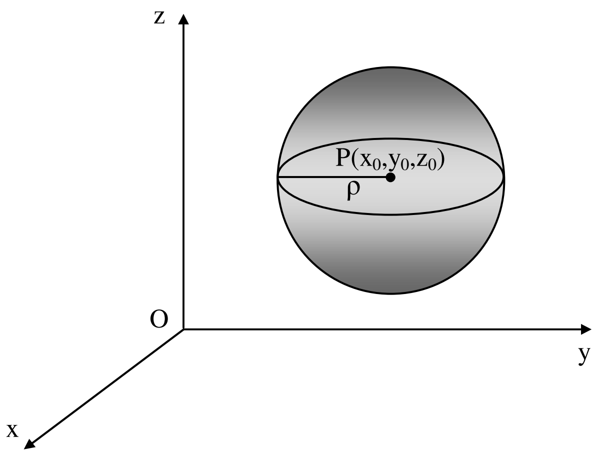
Μερικές από τις επιφάνειες (1.4) στην απλούστερη μορφή σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων είναι οι εξής:

α) Σφαίρα

Έχει εξίσωση την

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\rho^2, \quad \rho>0 \ \text{σταθερά}, \tag{2.1}$$

κέντρο το σημείο (x_0, y_0, z_0) και ακτίνα ρ (σχήμα 2.1).



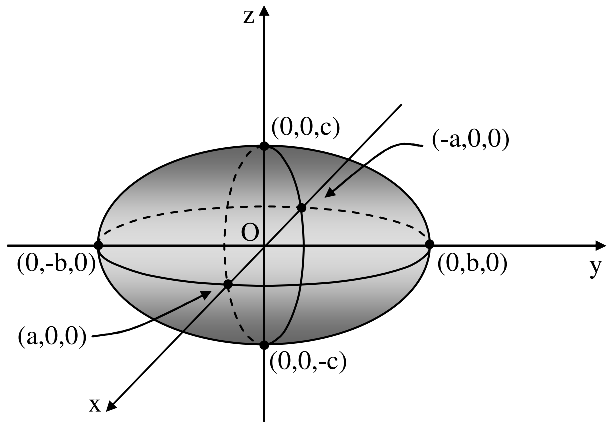
Σχήμα 2.1

β) Ελλειψοειδές

Πρόκειται για επιφάνεια (σχήμα 2.2), η οποία έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{2.2}$$

όπου a, b, c > 0 είναι σταθερές, οι οποίες είναι τα **μήκη των ημιαξόνων** του ελλειψοειδούς (2.2).



Σχήμα 2.2

Αν δύο από τις παραπάνω σταθερές είναι ίσες, τότε έχουμε **ελλειψοειδές εκ περιστροφής**. Στην περίπτωση δε που a = b = c, έχουμε σφαίρα με κέντρο το σημείο O(0,0,0) και ακτίνα ρ = a, δηλαδή την

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Το ελλειψοειδές έχει επίπεδα συμμετρίας τα συντεταγμένα επίπεδα, τους άξονες των συντεταγμένων άξονες συμμετρίας και την αρχή O(0,0,0) κέντρο συμμετρίας.

Για να βρούμε πού τέμνει το ελλειψοειδές τον Ox–άξονα, θέτουμε στη (2.2) y = 0 και z = 0, οπότε παίρνουμε

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

Επομένως (a,0,0) και (–a,0,0) είναι τα ζητούμενα σημεία.

Ανάλογα, τα σημεία τομής του ελλειψοειδούς (2.2) με τον Oy–άξονα είναι τα (0,b,0) και (0,–b,0) και με τον Oz–άξονα είναι τα z = c και z = –c.

Το ίχνος του ελλειψοειδούς πάνω στο Oxy–επίπεδο προκύπτει από την (2.2) για z = 0, είναι δηλαδή η καμπύλη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

η οποία ως γνωστόν είναι έλλειψη.

Γενικότερα, το ίχνος του (2.2) πάνω σ' ένα επίπεδο z = z_0, δηλαδή παράλληλο στο Oxy-επίπεδο, είναι

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z_0^2}{c^2} \tag{2.3}$$

Για $\left|\frac{z_0}{c}\right|<1$ η εξίσωση (2.3) παριστάνει την έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z_0^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z_0^2}{c^2}\right)}=1$$

σε περίπτωση δε που a = b, η (2.3) γίνεται

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1-\frac{z_0^2}{c^2} \Rightarrow x^2+y^2=a^2\left(1-\frac{z_0^2}{c^2}\right)$$

η οποία περιγράφει έναν κύκλο ακτίνας $\rho=a\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}$.

Στην περίπτωση αυτή το **ελλειψοειδές είναι εκ περιστροφής** γύρω από τον Oz–άξονα.

Ανάλογα μπορούμε να βρούμε τα ίχνη του ελλειψοειδούς και πάνω σε επίπεδα παράλληλα στα Oyz, Oxz–επίπεδα, θέτοντας στη (2.2) x = x_0 και y = y_0 αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.1. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $S:\ 3x^2+5y^2+4z^2=2$ και να βρεθεί το ίχνος της πάνω στο επίπεδο y = 0.

Λύση. Η επιφάνεια S μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1 \tag{1}$$

Η (1) παριστάνει ένα ελλειψοειδές με κέντρο συμμετρίας το O(0,0,0) και μήκη ημιαξόνων $a=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $b=\sqrt{\frac{2}{5}}$ και $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Το ίχνος της S πάνω στο επίπεδο y = 0 είναι η έλλειψη

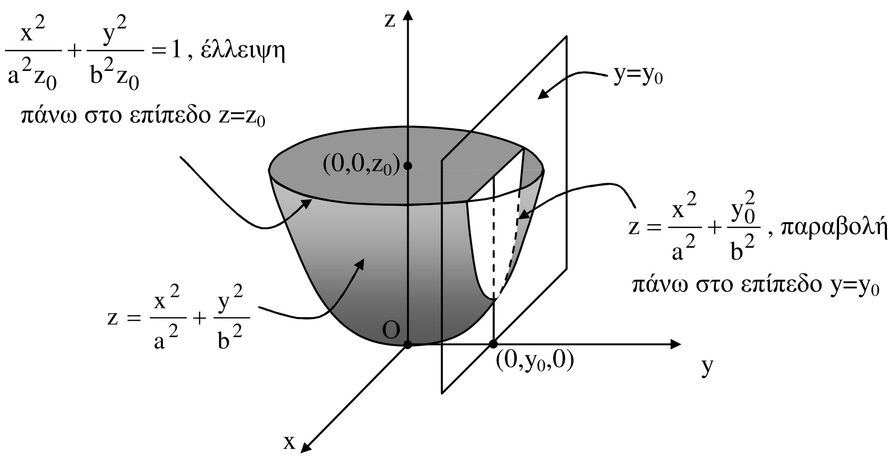
$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}+\frac{0}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

γ) Ελλειπτικό παραβολοειδές

Η επιφάνεια αυτή έχει εξίσωση

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad ή \quad y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} \quad ή \quad x=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \tag{2.4}$$

όπου a, b, c > 0 σταθερές.



Σχήμα 2.3

Η πρώτη επιφάνεια των (2.4) (σχήμα 2.3) έχει επίπεδα συμμετρίας τα Oxz, Oyz–επίπεδα και ο Oz–άξονας είναι άξονας συμμετρίας του. Η επιφάνεια αυτή δεν έχει κέντρο συμμετρίας.

Το ίχνος της επιφάνειας στο επίπεδο $z = z_0 > 0$ είναι η έλλειψη

$$z_0=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{a^2 z_0}+\frac{y^2}{b^2 z_0}=1 \tag{2.5}$$

Αν a = b, τότε η (2.5) παριστάνει κύκλο και η επιφάνεια είναι εκ περιστροφής, η οποία λέγεται **κυκλικό παραβολοειδές**.

Κυκλικά παραβολοειδή χρησιμοποιούνται για τις κεραίες ραδιοτηλεσκοπίων και κέντρων ελέγχου δορυφόρων από το έδαφος, καθώς και ως αναμεταδότες μικροκυμάτων.

Το ίχνος της επιφάνειας π.χ. στο επίπεδο $x = x_0$ (δηλαδή κάθετο στον Ox-άξονα) είναι η παραβολή

$$z = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Ανάλογα, θέτοντας στην πρώτη των (2.4) $y = y_0$, βρίσκουμε το ίχνος της επιφάνειας πάνω σε επίπεδο κάθετο στον Oy–άξονα (σχήμα 2.3), το οποίο είναι η παραβολή

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

Παράδειγμα 2.2. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $S: z = x^2 + 3y^2$ και να βρεθούν τα ίχνη της πάνω στα επίπεδα x = 2 και z = 1.

Λύση. Η επιφάνεια S προφανώς γράφεται $z = x^2 + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$, η οποία παριστάνει ένα ελλειπτικό παραβολοειδές.

Το ίχνος της S πάνω στο επίπεδο x = 2 είναι η παραβολή $z = 2^2 + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

και πάνω στο επίπεδο z = 1 είναι η έλλειψη $x^2 + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$.

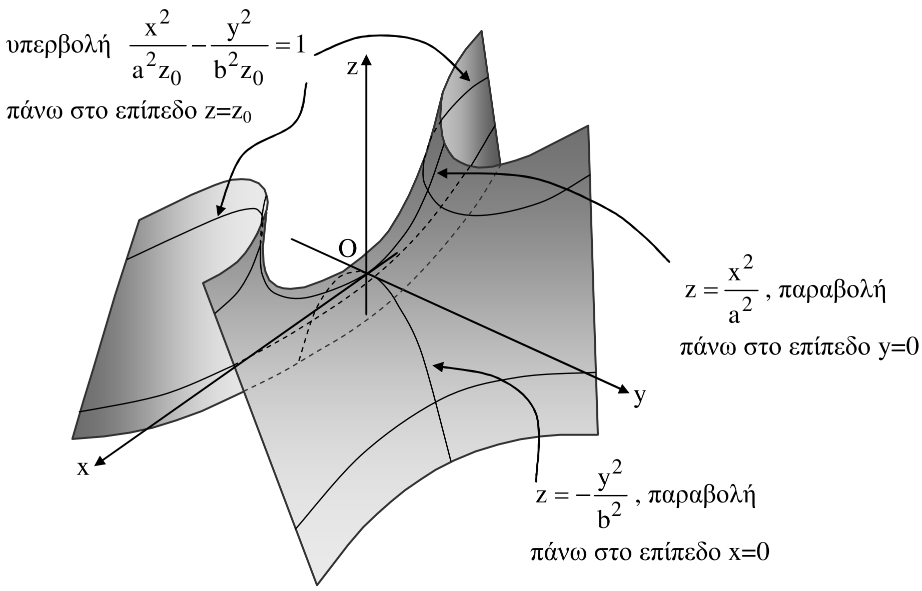
δ) Υπερβολικό παραβολοειδές

Η επιφάνεια αυτή έχει εξίσωση

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad ή \quad y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \quad ή \quad x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \quad ή........ \tag{2.6}$$

(συνολικά υπάρχουν 6 συνδυασμοί)

όπου a, b, c > 0 είναι σταθερές. Μελετώντας την πρώτη των (2.6) (σχήμα 2.4) προκύπτει ότι τα Oxz, Oyz–επίπεδα είναι επίπεδα συμμετρίας της επιφάνειας και ο Oz–άξονας είναι άξονας συμμετρίας της, ενώ δεν έχει κέντρο συμμετρίας.



Σχήμα 2.4

Εδώ τα ίχνη της επιφάνειας σε επίπεδα κάθετα στον Oz-άξονα είναι υπερβολές, ενώ τα ίχνη της πάνω σε επίπεδα κάθετα στους Ox, Oy–άξονες είναι παραβολές. Έτσι, το επίπεδο $z = z_0$ τέμνει την πρώτη των (2.6) κατά μια υπερβολή που δίνεται από την εξίσωση

$$z_0 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2 z_0} - \frac{y^2}{b^2 z_0} = 1$$

Το επίπεδο $x = x_0$ τέμνει την επιφάνεια κατά μια παραβολή, της οποίας η εξίσωση είναι

$$z = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

και προφανώς όταν $x_0 = 0$, τότε $z = -\frac{y^2}{b}$.

Το επίπεδο y = y_0 τέμνει την επιφάνεια κατά την παραβολή $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$ και προφανώς όταν $y_0=0$, τότε $z=\frac{x^2}{a^2}$.

Ανάλογα ισχύουν και για τις υπόλοιπες επιφάνειες (2.6).

Παράδειγμα 2.3. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $S:\ 4z-x^2+2y^2=0$ και να βρεθούν τα ίχνη της πάνω στα επίπεδα x = 0 και z = 2.

Λύση. Η επιφάνεια S γράφεται

$$z=\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \tag{1}$$

Η (1) παριστάνει υπερβολικό παραβολοειδές.

Τα ίχνη που θέλουμε να βρούμε προκύπτουν από την (1) και είναι τα εξής:

i) Πάνω στο επίπεδο x = 0 είναι η παραβολή

$$z=-\frac{y^2}{2}$$

ii) Πάνω στο επίπεδο z = 2 είναι η υπερβολή

$$2=\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$$

ε) Ελλειπτικός κώνος

Είναι η επιφάνεια που έχει εξίσωση

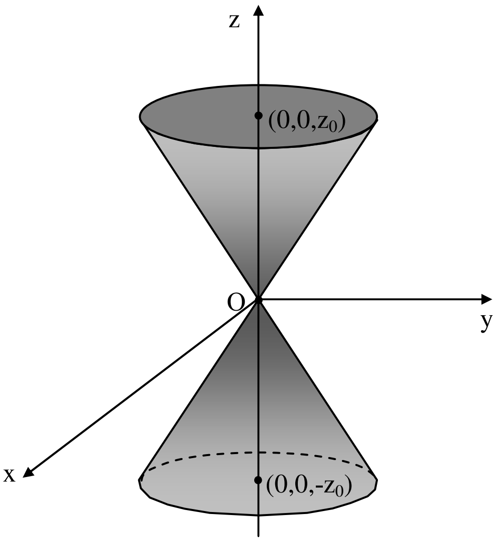
$$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad ή \quad x^2=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \quad ή \quad y^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} \tag{2.7}$$

όπου a ,b, c > 0 σταθερές.

Για την πρώτη των (2.7) (σχήμα 2.5) ισχύουν τα παρακάτω (ανάλογα ισχύουν και για τις υπόλοιπες των (2.7)):

Αν a = b, τότε έχουμε **κυκλικό κώνο**, ο οποίος είναι επιφάνεια εκ περιστροφής.

Ο ελλειπτικός κώνος έχει επίπεδα συμμετρίας τα συντεταγμένα επίπεδα, άξονες συμμετρίας τους άξονες συντεταγμένων και κέντρο συμμετρίας έχει την αρχή O(0,0,0).



Σχήμα 2.5

Το ίχνος της επιφάνειας πάνω στο επίπεδο $z = z_0$, για $z_0 > 0$ ή $z_0 < 0$ δίνεται από την έλλειψη

$$z_0^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2 z_0^2} + \frac{y^2}{b^2 z_0^2} = 1$$

Το ίχνος της (2.7) π.χ. πάνω στο Oxz–επίπεδο, δηλαδή στο $y = 0$, δίνεται από την εξίσωση $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2}$, η οποία παριστάνει τις ευθείες $z = \dfrac{x}{a}, \quad z = -\dfrac{x}{a}$.

Ανάλογα για $x = 0$ έχουμε τις ευθείες $z = \dfrac{y}{b}$ και $z = -\dfrac{y}{b}$, που είναι το ίχνος της (2.7) πάνω στο 0yz–επίπεδο.

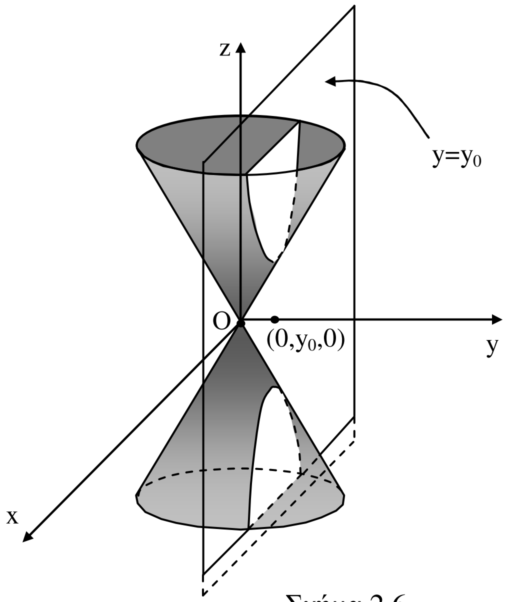
Γενικότερα τώρα, αν στην πρώτη των (2.7) θέσουμε $x = x_0$ ή $y = y_0$ (για x_0, $y_0 \neq 0$), τότε έχουμε τα ίχνη της επιφάνειας πάνω στα επίπεδα αυτά, που είναι οι υπερβολές

$$z^2 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2}$$

ή

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2}$$

που είναι τα ίχνη του ελλειπτικού κώνου πάνω στα επίπεδα $x = x_0$, $y = y_0$ αντίστοιχα (σχήμα 2.6).



Σχήμα 2.6

Παράδειγμα 2.4. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $S:\ x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$ και να βρεθούν τα ίχνη της πάνω στα επίπεδα $x = 2,\quad z = \dfrac{1}{2}$.

Λύση. Η επιφάνεια S γράφεται $4z^2 = x^2 + y^2$ ή $z^2 = \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{2^2}$, που είναι ένας κυκλικός κώνος.

Το ίχνος της S πάνω στο επίπεδο x = 2 είναι η υπερβολή

$$z^2 = \frac{2^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

και πάνω στο επίπεδο $z = \dfrac{1}{2}$ είναι ο κύκλος

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

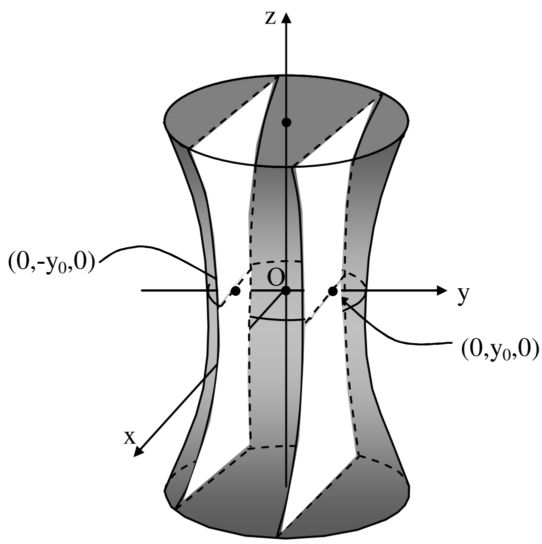
στ) Μονόχωνο υπερβολοειδές

Η εξίσωση αυτού είναι η

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ή} \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2.8)$$

όπου a, b, c > 0 σταθερές.

Οι επιφάνειες αυτές παρουσιάζουν τις ίδιες συμμετρίες με εκείνες του ελλειψοειδούς και δεν είναι φραγμένες.



Σχήμα 2.7

Όσον αφορά στην πρώτη των (2.8) (σχήμα (2.7)) (ανάλογα και για τις άλλες δύο) ισχύουν τα εξής:

Αν a = b, τότε έχουμε **μονόχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής** γύρω από τον Oz–άξονα.

Το ίχνος της επιφάνειας πάνω στο επίπεδο $z = z_0$, είναι η έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z_0^2}{c^2}$$

η οποία στην περίπτωση που έχουμε a = b παριστάνει προφανώς κύκλο με ακτίνα $\rho = a\sqrt{1+\frac{z_0^2}{c^2}}$.

Αν θέσουμε $x = x_0$, τότε έχουμε την υπερβολή με εξίσωση

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x_0^2}{a^2} \tag{2.9}$$

ενώ για $y = y_0$ προκύπτει η υπερβολή

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y_0^2}{b^2} \tag{2.10}$$

Με άλλα λόγια τα ίχνη της επιφάνειας πάνω στα επίπεδα $x = x_0$ και $y = y_0$ είναι οι υπερβολές (2.9) και (2.10) αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.5. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $S:\ 2x^2+y^2-6z^2=6$ και να βρεθούν τα ίχνη της πάνω στα επίπεδα $y = 0$, $z = 1$.

Λύση. Η επιφάνεια S γράφεται

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2}-z^2=1 \tag{1}$$

Η (1) παριστάνει ένα μονόχωνο υπερβολοειδές.

Τα ζητούμενα ίχνη της S προκύπτουν από την (1) και είναι τα εξής:

i) Πάνω στο επίπεδο $y = 0$ είναι η υπερβολή

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{0}{\left(\sqrt{6}\right)^2}-z^2=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}-z^2=1$$

ii) Πάνω στο επίπεδο $z = 1$ είναι η έλλειψη

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2}-1^2=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2}=2$$

ζ) Δίχωνο υπερβολοειδές

Η εξίσωσή του είναι

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \ \text{ ή } \ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1 \ \text{ ή } \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \tag{2.11}$$

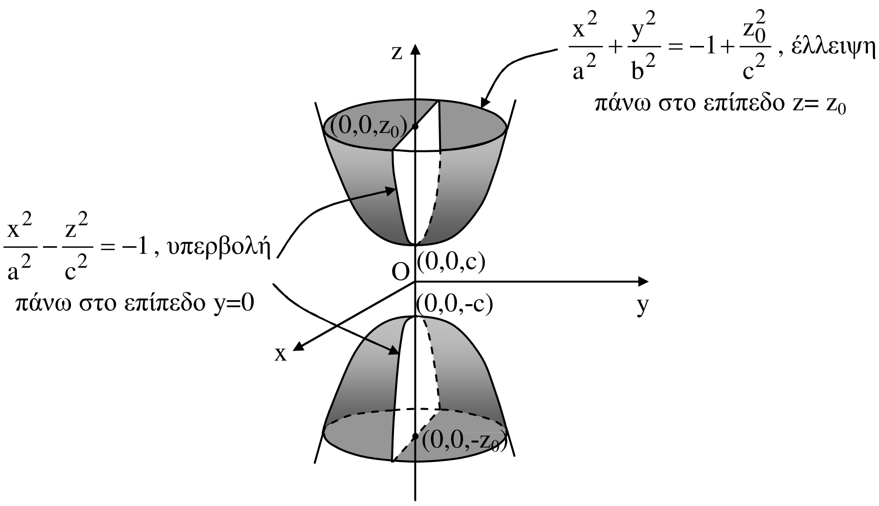
όπου $a, b, c > 0$ σταθερές.

Όσον αφορά στην πρώτη των (2.11) (σχήμα 2.8) ισχύουν τα παρακάτω (ανάλογα ισχύουν και για τις άλλες δύο).

Είναι προφανές ότι η επιφάνεια αυτή ορίζεται για $z \geq c$ και $z \leq -c$, τέμνει τον Oz–άξονα στα σημεία z = c και z = –c και παρουσιάζει τις ίδιες συμμετρίες με εκείνες του μονόχωνου υπερβολοειδούς.

Αν a = b, τότε έχουμε **δίχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής**.

Τα ίχνη της επιφάνειας πάνω σε επίπεδα κάθετα στον Oz–άξονα είναι ελλείψεις και πάνω σε επίπεδα κάθετα στους Ox, Oy–άξονες είναι υπερβολές.



Σχήμα 2.8

Έτσι για παράδειγμα, αν θέσουμε $z = z_0$ $(z_0 > c,\ z_0 < -c)$, τότε προκύπτει η καμπύλη

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{z_0^2}{c^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(-1+\frac{z_0^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(-1+\frac{z_0^2}{c^2}\right)}=1$$

η οποία είναι έλλειψη στο επίπεδο z = z_0.

Για x = x_0 από την πρώτη των (2.11) παίρνουμε την υπερβολή (πάνω στο επίπεδο x = x_0)

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{x_0^2}{a^2}$$

και για y = y_0 προκύπτει η υπερβολή (πάνω στο επίπεδο y = y_0)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y_0^2}{b^2}$$

Παράδειγμα 2.6. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $S:\ 4x^2+9y^2-z^2+1=0$ και να βρεθούν τα ίχνη της πάνω στα επίπεδα x = 0, y = 0 και $z=-\sqrt{5}$.

Λύση. Η επιφάνεια S γράφεται

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}-z^2=-1 \tag{1}$$

Η εξίσωση (1) παριστάνει ένα δίχωνο υπερβολοειδές.

Τα ζητούμενα ίχνη της S προκύπτουν από την (1) και είναι τα εξής:

i) Πάνω στο επίπεδο x = 0 είναι η υπερβολή

$$\frac{0}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}-z^2=-1 \quad\Rightarrow\quad z^2-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=1$$

ii) Πάνω στο επίπεδο y = 0 είναι η υπερβολή

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{0}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}-z^2=-1 \quad\Rightarrow\quad z^2-\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

iii) Πάνω στο επίπεδο $z=-\sqrt{5}$ είναι η έλλειψη

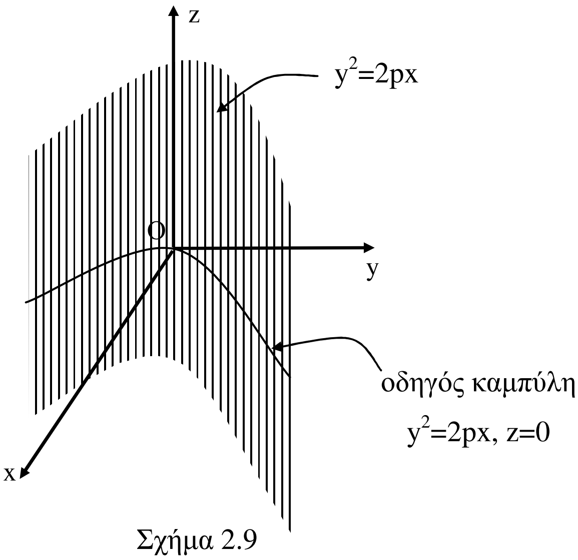
$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}-\left(-\sqrt{5}\right)^2=-1 \quad\Rightarrow\quad x^2+\frac{y^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1$$

η) Παραβολικός κύλινδρος

Η επιφάνεια αυτή έχει εξίσωση την

$$y^2 = 2px \quad \text{ή} \quad z^2 = 2px \quad \text{ή} \quad x^2 = 2py \quad \text{ή.......} \tag{2.12}$$

Έτσι π.χ. η $y^2 = 2px$ (σχήμα 2.9) δημιουργείται από μια ευθεία (γενέτειρα) που είναι παράλληλη στον Oz-άξονα και κινείται παράλληλα στον άξονα αυτό συναντώντας την παραβολή του Oxy–επιπέδου $y^2 = 2px$ (οδηγός καμπύλη)



Σχήμα 2.9

Παράδειγμα 2.7. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $S: \; 2y^2 + 4x = 0$.

Λύση. Η S γράφεται $y^2 = -2x$ και κατά συνέπεια παριστάνει ένα παραβολικό κύλινδρο με γενέτειρα παράλληλη στον Oz-άξονα και οδηγό καμπύλη την παραβολή

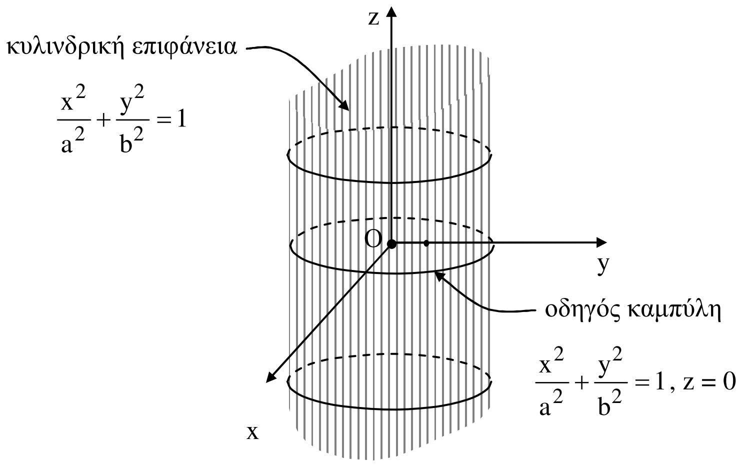
$$y^2 = -2x, \quad z = 0$$

θ) Ελλειπτικός κύλινδρος

Η εξίσωσή του είναι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{2.13}$$

για a, b, c > 0 σταθερές.



Σχήμα 2.10

Π.χ. η επιφάνεια $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (σχήμα 2.10) δημιουργείται από μια ευθεία (γενέτειρα) που είναι παράλληλη στον Oz–άξονα και κινείται παράλληλα στον άξονα αυτό συναντώντας την έλλειψη του Oxy–επιπέδου

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{(οδηγός καμπύλη)}$$

Αν a = b, τότε έχουμε **κυκλικό κύλινδρο**.

Παράδειγμα 2.8. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $S:\ 4x^2+9y^2=3$.

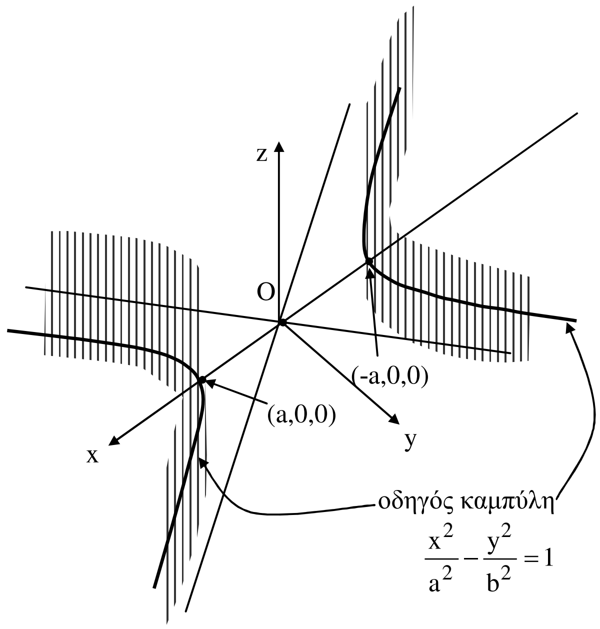
Λύση. Η S γράφεται $\dfrac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1$ και επομένως παριστάνει ένα ελλειπτικό κύλινδρο με γενέτειρα παράλληλη στον Oz–άξονα και οδηγό καμπύλη την έλλειψη

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1, \quad z=0$$

ι) Υπερβολικός κύλινδρος

Έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ή \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad ή \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad ή..... \qquad (2.14)$$



Σχήμα 2.11

Έτσι, π.χ. η επιφάνεια $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (σχήμα 2.11) δημιουργείται από μια ευθεία (γενέτειρα) που είναι παράλληλη στον Oz–άξονα και κινείται παράλληλα στον άξονα αυτό συναντώντας την υπερβολή του Oxy–επιπέδου

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{οδηγός καμπύλη})$$

Παράδειγμα 2.9. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $S:\ 16x^2-y^2=1$.

Λύση. Η επιφάνεια S γράφεται

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - y^2 = 1 \qquad (1)$$

Η (1) παριστάνει υπερβολικό κύλινδρο που έχει γενέτειρα παράλληλη στον Oz-άξονα και οδηγό καμπύλη την υπερβολή

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - y^2 = 1, \quad z = 0$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$.

Λύση. Η επιφάνεια γράφεται $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{4^2}=1$ και είναι ελλειψοειδές.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $2x^2+3y^2+z^2=3$.

Λύση. $2x^2+3y^2+z^2=3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}+\frac{y^2}{1^2}+\frac{z^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$**.** Άρα είναι ελλειψοειδές.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $9x^2+36y^2+4z^2-36=0$.

Λύση. $9x^2+36y^2+4z^2-36=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$. Άρα είναι ελλειψοειδές.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.

Λύση. Είναι ελλειπτικό παραβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον Oz.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $z=2x^2+5y^2$.

Λύση. $z = 2x^2 + 5y^2 \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{5}}\right)^2}$, άρα είναι ελλειπτικό παραβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον Oz–άξονα.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $36x - 9y^2 - 16z^2 = 0$.

Λύση. $36x - 9y^2 - 16z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{y^2}{2^2} + \dfrac{z^2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}$. Επομένως είναι ελλειπτικό παραβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον Ox–άξονα.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $-\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} - \dfrac{z^2}{5^2} = 1$.

Λύση. $\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} + \dfrac{z^2}{5^2} = -1$. Επομένως είναι δίχωνο υπερβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον Oy–άξονα.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $2z - 3x^2 + y^2 = 0$.

Λύση. $2z - 3x^2 + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}$. Άρα είναι υπερβολικό παραβολοειδές.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $3y - 5z^2 + x^2 = 0$.

Λύση. $3y - 5z^2 + x^2 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{z^2}{\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}$.

Άρα είναι υπερβολικό παραβολοειδές.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $y^2 - x^2 - z^2 = 0$.

Λύση. $y^2 - x^2 - z^2 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 = x^2 + z^2$. Άρα είναι κωνική επιφάνεια με άξονα συμμετρίας τον Oy–άξονα και συγκεκριμένα κυκλικός κώνος.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 0$.

Λύση. $x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 0 \;\Rightarrow\; 4y^2 = x^2 + 16z^2 \;\Rightarrow\; y^2 = \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{z^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$.

Επομένως είναι ελλειπτικός κώνος με άξονα συμμετρίας τον Oy–άξονα.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $x^2 + \dfrac{y^2}{2^2} - \dfrac{z^2}{7^2} = 1$.

Λύση. Είναι μονόχωνο υπερβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον Oz–άξονα.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{z^2}{9} + 4 = 0$.

Λύση.

$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{z^2}{9} + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{10^2} - \dfrac{z^2}{6^2} = -1 \Rightarrow \dfrac{y^2}{10^2} + \dfrac{z^2}{6^2} - \dfrac{x^2}{4^2} = 1$. Άρα είναι μονόχωνο υπερβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον Ox–άξονα.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $x^2 - 4y^2 + z^2 - 8 = 0$.

Λύση. $x^2 - 4y^2 + z^2 - 8 = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{z^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$. Άρα είναι μονόχωνο υπερβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον Oy–άξονα.

ΑΣΚΗΣΗ 15

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $x^2 - \dfrac{y^2}{2^2} - \dfrac{z^2}{3^2} = 1$.

Λύση. $x^2 - \dfrac{y^2}{2^2} - \dfrac{z^2}{3^2} = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{y^2}{2^2} + \dfrac{z^2}{3^2} - x^2 = -1$. Άρα είναι δίχωνο υπερβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον Ox–άξονα.

ΑΣΚΗΣΗ 16

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $z^2 = 1 + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$.

Λύση. $z^2 = 1 + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} - z^2 = -1$. Άρα είναι δίχωνο υπερβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον Oz–άξονα.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $x^2 - 4y^2 - 2z^2 - 3 = 0$.

Λύση. $x^2 - 4y^2 - 2z^2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \dfrac{z^2}{\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2} = 1 \;\Rightarrow$

$\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{z^2}{\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = -1$. Άρα είναι δίχωνο υπερβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον Ox–άξονα.

ΑΣΚΗΣΗ 18

Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $x^2 + 4y^2 - z^2 + 8 = 0$.

Λύση.

$$x^2+4y^2-z^2+8=0 \;\Rightarrow\; z^2-x^2-4y^2=8 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=-1,$$

άρα είναι δίχωνο υπερβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον Oz–άξονα.

ΑΣΚΗΣΗ 19

Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $z^2=2x$.

Λύση. Είναι παραβολικός κύλινδρος με γενέτειρα παράλληλη στον Oy–άξονα και οδηγό καμπύλη την παραβολή $z^2=2x, \quad y=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 20

Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $y^2+4z=0$.

Λύση. $y^2+4z=0 \;\Rightarrow\; y^2=-4z$, άρα είναι παραβολικός κύλινδρος με γενέτειρα παράλληλη στον Ox–άξονα και οδηγό καμπύλη την παραβολή $y^2=-4z$, $x=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 21

Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $x^2+z^2=4$.

Λύση. Είναι κυκλικός κύλινδρος με γενέτειρα παράλληλη στον Oy–άξονα και οδηγό καμπύλη τον κύκλο $x^2+z^2=4, \quad y=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 22

Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $3x^2+y^2=5$.

Λύση. $3x^2+y^2=5 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=1$. Άρα είναι ελλειπτικός κύλινδρος με γενέτειρα παράλληλη στον Oz–άξονα και οδηγό καμπύλη την έλλειψη $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=1$, $z=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $8y^2 + z^2 = 1$.

Λύση. $8y^2 + z^2 = 1 \;\Rightarrow\; z^2 + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 1$. Επομένως είναι ελλειπτικός κύλινδρος με γενέτειρα παράλληλη στον Ox–άξονα και οδηγό καμπύλη την έλλειψη $z^2 + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 1$, x = 0.

ΑΣΚΗΣΗ 24

Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $y^2 - z^2 = 1$.

Λύση. Είναι υπερβολικός κύλινδρος με γενέτειρα παράλληλη στον Ox–άξονα και οδηγό καμπύλη την υπερβολή $y^2 - z^2 = 1, \quad x = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 25

Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $9y^2 - 4x^2 = 36$.

Λύση. $9y^2 - 4x^2 = 36 \;\Rightarrow\; \dfrac{y^2}{2^2} - \dfrac{x^2}{3^2} = 1$. Επομένως είναι υπερβολικός κύλινδρος με γενέτειρα παράλληλη στον Oz–άξονα και οδηγό καμπύλη την υπερβολή $\dfrac{y^2}{2^2} - \dfrac{x^2}{3^2} = 1, \quad z = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 26

Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $4x^2 - 25z^2 = 100$.

Λύση. $4x^2 - 25z^2 = 100 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{z^2}{2^2} = 1$. Άρα είναι υπερβολικός κύλινδρος με γενέτειρα παράλληλη στον Oy–άξονα και οδηγό καμπύλη την υπερβολή $\dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{z^2}{2^2} = 1, \quad y = 0$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $x^2+3y^2+2z^2=5$ και να βρεθεί το ίχνος της πάνω στο επίπεδο x = 2. (**Απ.** Ελλειψοειδές, $\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\dfrac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$).

2. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $x^2+y^2-2z=0$ και να βρεθούν τα ίχνη της πάνω στα επίπεδα z = 2 και y = 1. (**Απ.** Κυκλικό παραβολοειδές, $x^2+y^2=4$, $2z=x^2+1$).

3. Να αναγνωρισθεί ή επιφάνεια $x-y^2-5z^2=0$ και να βρεθεί το ίχνος της πάνω στο επίπεδο z = 0. (**Απ.** Ελλειπτικό παραβολοειδές, $x=y^2$).

4. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $36x-9y^2+4z^2=0$ και να βρεθούν τα ίχνη της πάνω στα επίπεδα x = 0 και z = 1. (**Απ.** Υπερβολικό παραβολοειδές, $y=\pm\dfrac{2}{3}z$, $x=\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{1}{9}$).

5. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $3y^2-2x^2-z^2=0$ και να βρεθούν τα ίχνη της πάνω στα επίπεδα x = 1 και y = 3. (**Απ.** Ελλειπτικός κώνος, $\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}-\dfrac{z^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$, $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{27}{2}}\right)^2}+\dfrac{z^2}{\left(\sqrt{27}\right)^2}=1$).

6. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $2y^2+z^2-8x^2=8$ και να βρεθεί το ίχνος της πάνω στο επίπεδο x = 0. (**Απ.** Μονόχωνο υπερβολοειδές, $\dfrac{y^2}{2^2}+\dfrac{z^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=1$).

7. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $-2x^2-z^2+9y^2=-9$ και να βρεθούν τα ίχνη της πάνω στα επίπεδα y = 0, x = 0. (**Απ.** Μονόχωνο υπερβολοειδές,

$\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}+\dfrac{z^2}{3^2}=1$, $\dfrac{z^2}{3^2}-y^2=1$).

8. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ και να βρεθούν τα ίχνη της πάνω στα επίπεδα y = 0, x = 3. (**Απ.** Δίχωνο υπερβολοειδές, $z^2-\dfrac{x^2}{9}=1$, $z^2-\dfrac{y^2}{4}=2$).

9. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $x^2-4y^2+z^2+8=0$ και να βρεθούν τα ίχνη της στα επίπεδα z = 0, x = 1. (**Απ.** Δίχωνο υπερβολοειδές, $\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\dfrac{x^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=1$, $\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}-\dfrac{z^2}{3^2}=1$).

10. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $y^2+6z=0$. (**Απ.** Παραβολικός κύλινδρος με γενέτειρα παράλληλη στον 0x–άξονα και οδηγό καμπύλη την $y^2+6z=0,\ \ x=0$).

11. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $y^2+4z^2-16=0$. (**Απ.** Ελλειπτικός κύλινδρος με γενέτειρα παράλληλη στον 0x–άξονα και οδηγό καμπύλη την $y^2+4z^2-16,\ \ x=0$).

12. Να αναγνωρισθεί η επιφάνεια $4x^2-z^2-100=0$. (**Απ.** Υπερβολικός κύλινδρος με γενέτειρα παράλληλη στον 0y–άξονα και οδηγό καμπύλη την $4x^2-z^2-100=0,\ \ y=0$).