

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ STOKES

Έστω $S : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^2 -επιφάνεια, δηλ.

$$\Delta \ni (u, v) \mapsto S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

όπου

$$x(\cdot, \cdot), y(\cdot, \cdot), z(\cdot, \cdot) : \Delta \rightarrow \mathbb{R} \text{ κλάσης } C^2$$

κ'

$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό ορθογώνιο ή κλειστός δίσκος.

$$S_u \times S_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = (E_x, -E_y, E_z), \text{ όπου}$$

$$E_x = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad E_y = \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \quad E_z = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

Λήμμα 1: $\forall (u, v) \in \Delta,$

$$x_v S_u - x_u S_v = - (0, E_z, E_y), \quad y_v S_u - y_u S_v = (E_z, 0, -E_x),$$

$$z_v S_u - z_u S_v = (E_y, E_x, 0).$$

Απόδειξη: $x_v S_u - x_u S_v = x_v (x_u, y_u, z_u) - x_u (x_v, y_v, z_v)$

$$= (0, x_v y_u - x_u y_v, x_v z_u - x_u z_v)$$

$$= (0, \begin{vmatrix} x_v & y_v \\ x_u & y_u \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_v & z_v \\ x_u & z_u \end{vmatrix})$$

$$= (0, -E_z, -E_y).$$

Όμοια τα υπόλοιπα.



Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό με $S(\Delta) \subseteq \Omega$.

Λήμμα 2: Έστω $P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 . Τότε,

$$\frac{\partial}{\partial u} [P(S(u,v))] = \nabla P \cdot S_u, \quad \frac{\partial}{\partial v} [P(S(u,v))] = \nabla P \cdot S_v.$$

Απόδειξη: Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} [P(S(u,v))] &= \frac{\partial}{\partial u} [P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))] = P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u \\ &= \nabla P \cdot S_u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} [P(S(u,v))] &= \frac{\partial}{\partial v} [P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))] = P_x x_v + P_y y_v + P_z z_v \\ &= \nabla P \cdot S_v. \end{aligned}$$



Λήμμα 3: Έστω $\vec{F} = (P, Q, R): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ κλάσης C^1 .

$$\text{Τότε, } \frac{\partial}{\partial u} [\vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{S}_v] - \frac{\partial}{\partial v} [\vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{S}_u] = [\text{rot } \vec{F}(S(u, v))] \cdot (\vec{S}_u \times \vec{S}_v).$$

Απόδειξη: Επειδή $\frac{\partial}{\partial u} (S_v) = S_{vu} = S_{uv} = \frac{\partial}{\partial v} (S_u)$ (σημ. S κλάσης C^2),

το α' μέλος γράφεται

$$\frac{\partial}{\partial u} [\vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{S}_v] - \frac{\partial}{\partial v} [\vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{S}_u] \stackrel{(\text{Λήμμα 2})}{=}$$

$$= (\nabla P \cdot \vec{S}_u, \nabla Q \cdot \vec{S}_u, \nabla R \cdot \vec{S}_u) \cdot (x_v, y_v, z_v) =$$

$$- (\nabla P \cdot \vec{S}_v, \nabla Q \cdot \vec{S}_v, \nabla R \cdot \vec{S}_v) \cdot (x_u, y_u, z_u) =$$

$$= \nabla P \cdot (x_v S_u - x_u S_v) + \nabla Q \cdot (y_v S_u - y_u S_v) + \nabla R \cdot (z_v S_u - z_u S_v)$$

(Anfang 1)

$$= -\nabla P \cdot (0, E_z, E_y) + \nabla Q \cdot (E_z, 0, -E_x) + \nabla R \cdot (E_y, E_x, 0)$$

$$= -P_y E_z - P_z E_y + Q_x E_z - Q_z E_x + R_x E_y + R_y E_x$$

$$= (R_y - Q_z) E_x - (P_z - R_x) E_y + (Q_x - P_y) E_z$$

$$= \underbrace{(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)}_{\text{rot } \vec{F}} \cdot \underbrace{(E_x, -E_y, E_z)}_{S_u \times S_v}$$



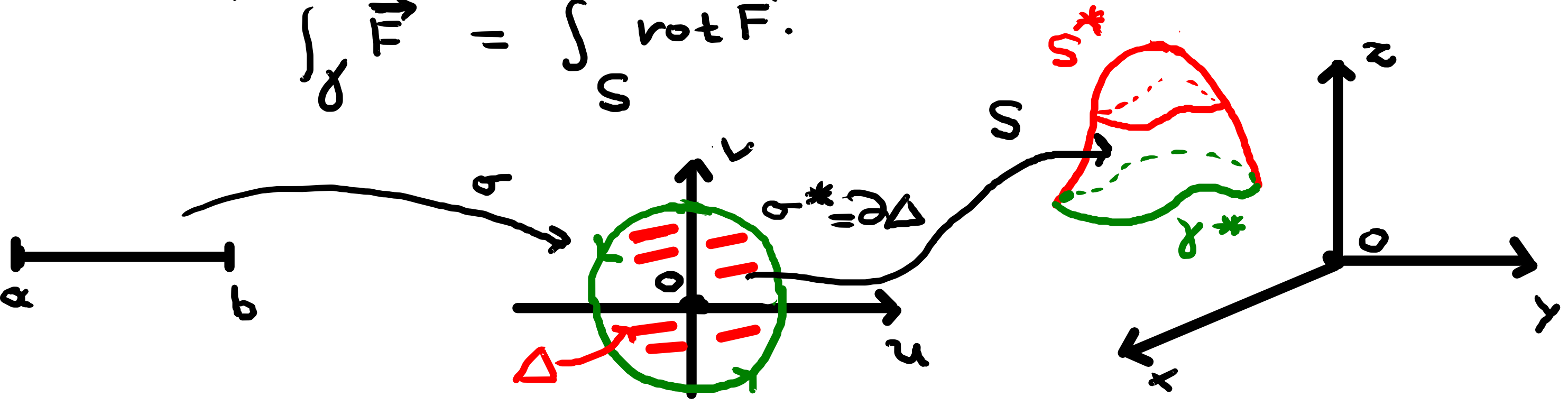
Θεώρημα 4 (Stokes, VI):

Έστω $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ θετικά προσανατολισμένη κλειστή απλή λεία καμπύλη με $\sigma(\Delta) = \partial\Delta \subset \Delta$ κ' $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ κλάσης C^1 , όπου

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό με $S(\Delta) \subset \Omega$. Θέτουμε $\gamma(t) = S(\sigma(t))$, $t \in [a, b]$.

Τότε,

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_S \text{rot } \vec{F}.$$



Απόδειξη: Θετούμε $\sigma(t) = (u(t), v(t)), t \in [a, b],$

όπου $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^1 .

Τότε, $\gamma(t) = S(\sigma(t)) = (x(\sigma(t)), y(\sigma(t)), z(\sigma(t))), t \in [a, b].$

Έχουμε $\frac{d}{dt} [x(\sigma(t))] = x_u u'(t) + x_v v'(t),$

$$\frac{d}{dt} [y(\sigma(t))] = y_u u'(t) + y_v v'(t),$$

$$\frac{d}{dt} [z(\sigma(t))] = z_u u'(t) + z_v v'(t)$$

\Rightarrow

$$\Rightarrow \gamma'(t) = (x_u u'(t) + x_v v'(t), y_u u'(t) + y_v v'(t), z_u u'(t) + z_v v'(t))$$

$$= u'(t) S_u(\sigma(t)) + v'(t) S_v(\sigma(t)), \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = u'(t) \left[\vec{F}(S(\sigma(t))) \cdot S_u(\sigma(t)) \right] + \\ + v'(t) \left[\vec{F}(S(\sigma(t))) \cdot S_v(\sigma(t)) \right], \quad t \in [a, b].$$

Θέτουμε

$$A(u, v) = \vec{F}(S(u, v)) \cdot S_u, \quad B(u, v) = \vec{F}(S(u, v)) \cdot S_v, \quad (u, v) \in \Delta.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= A(\sigma(t))u'(t) + B(\sigma(t))v'(t) \\ &= (A(\sigma(t)), B(\sigma(t))) \cdot \sigma'(t), t \in [a, b] \end{aligned}$$

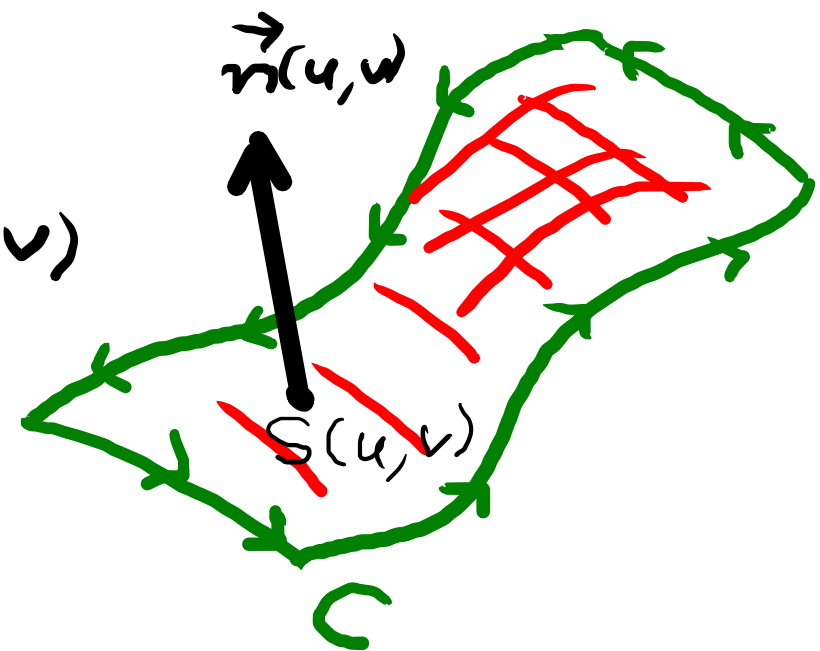
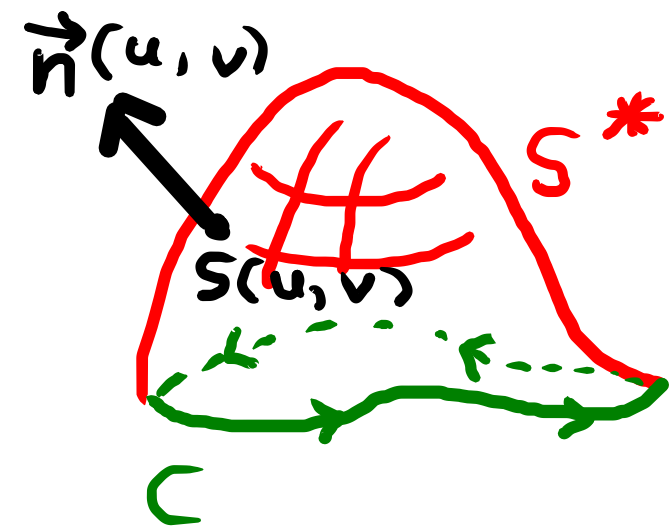
$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (A(\sigma(t)), B(\sigma(t))) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_a^b (A du + B dv) \stackrel{(\Theta \cdot \text{Green!})}{=} \iint_{\Delta} (B_u - A_v) du dv \end{aligned}$$

(Лінійка 3) $\iint_{\Delta} \text{rot } \vec{F}(u, v) \cdot (S_u \times S_v) du dv = \int_S \text{rot } \vec{F}.$ \square

Ορισμός 5: Έστω S απλή κανονική ανοικτή επιφάνεια με χείλος (σύνορο) C . Θα λέμε ότι η C είναι θετικά προσανατολισ-

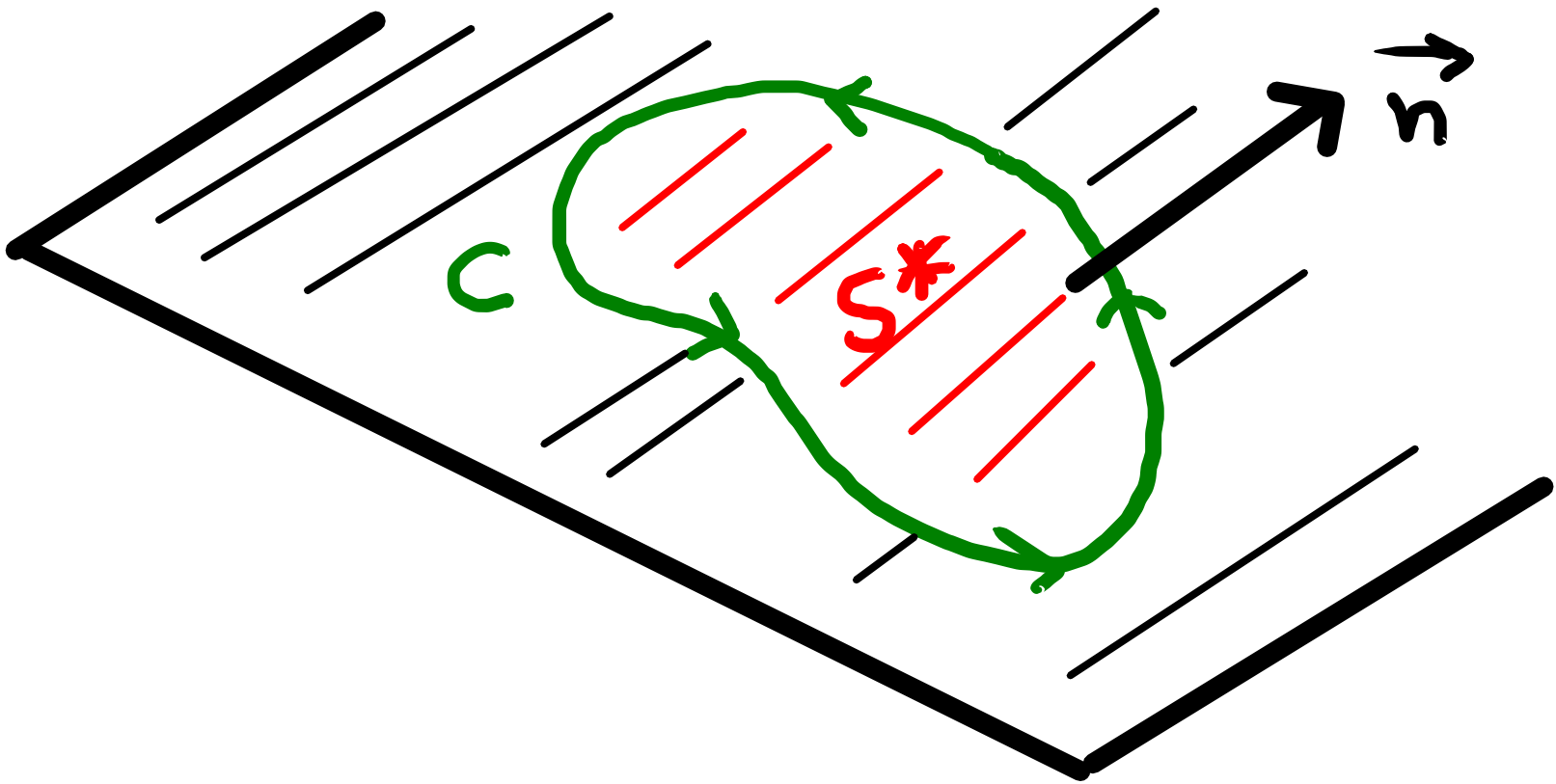
μένη ως προς το διάνυσμα $\vec{n}(u, v)$ της εξωτερικής καθέτου, αν

ικανοποιεί τον παρακάτω κανόνα: όταν κινούμαστε πάνω στη C έχουμε συνεχώς την εξωτερική όψη της S^* στα αριστερά μας ⁽⁺⁾

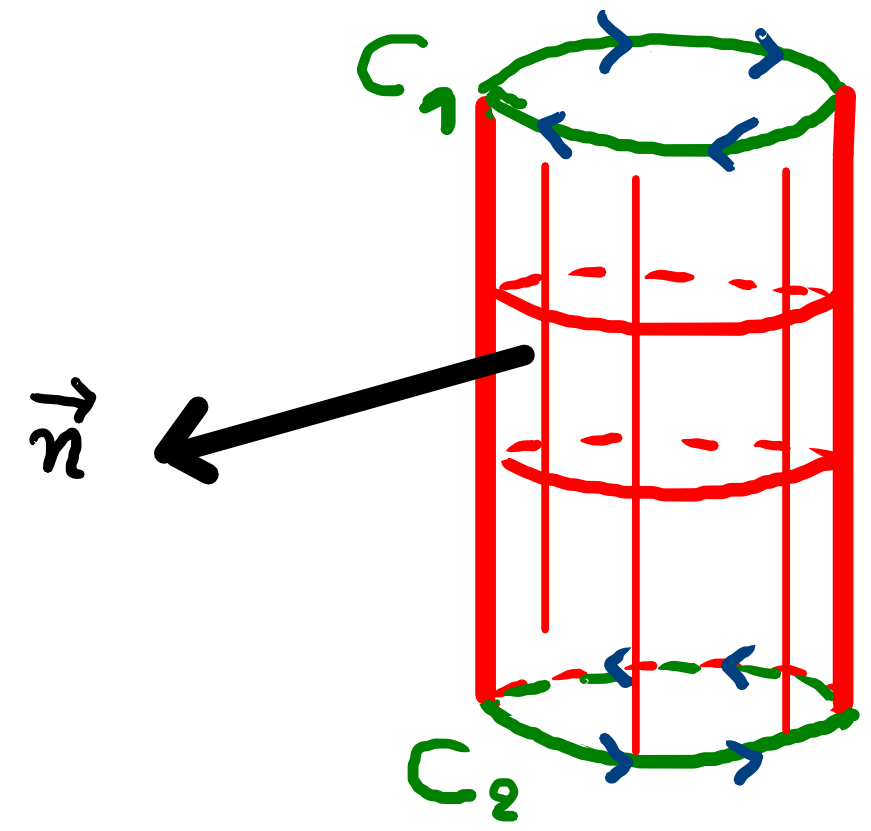


(+) Δηλ. έχουμε στα αριστερά μας το $\vec{n}(u, v)$ σχεδιασμένο με αρχή το $S(u, v)$

Σχόλιο: Η επιφάνεια S ενδέχεται να είναι επίπεδη.



Εάν η S είναι ένωση πεπερ. πλήθους απλών κανονικών ανολκ-
τών επιφανειών, προσανατολίζουμε θετικά κάθε χείλος ξεχωριστά.



Θεώρημα 6 (Stokes, V2): Έστω $S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ απλή κανονική ανοικτή
επιφάνεια κλάσης C^2 με χείλος C που είναι θετικά προσανατολισμένο ως προς
το διάνυσμα \vec{n} της εξωτερικής καθέτου \mathcal{K} , $\vec{F}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ διαν.
πεδίο κλάσης C^1 , όπου $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό με $S^* \subset \mathcal{D}$.

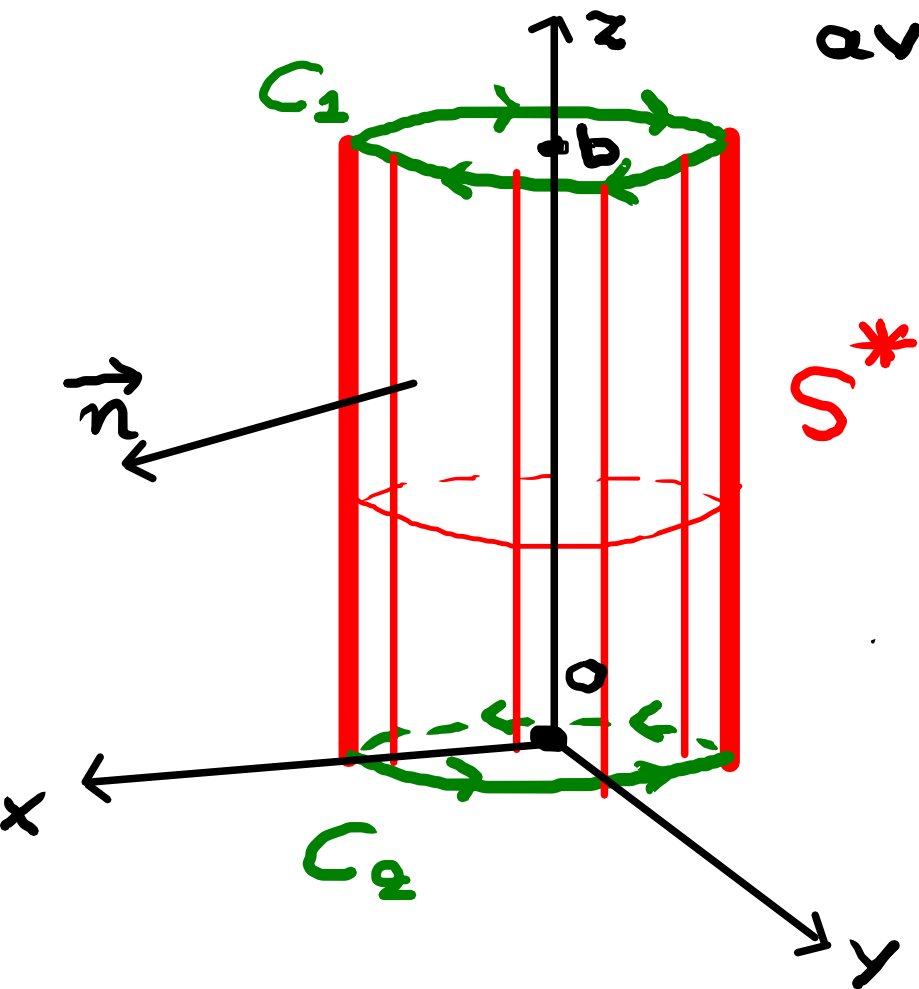
Τότε, η ροή του $\text{rot} \vec{F}$ μέσω της S είναι $\int_C \vec{F}$,

δηλ.

$$\iint_{\Delta} \text{rot} \vec{F}(S(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) du dv = \int_C \vec{F}.$$

Το Θ. Stokes ισχύει γ' για επιφανειακά C^2 - απλές κανονικές

ανοικτές επιφάνειες με θετικά προσανατολισμένα χείλη. Π.χ.
 αν S^* : $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq b (b > 0)$, τότε



$$\int_{\Delta} \text{rot } \vec{F}(S(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) du dv =$$

$$= \int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{n} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{n}$$

- C_2 : $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0), t \in [0, 2\pi]$
- $(-C_1)$: $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, b), t \in [0, 2\pi]$



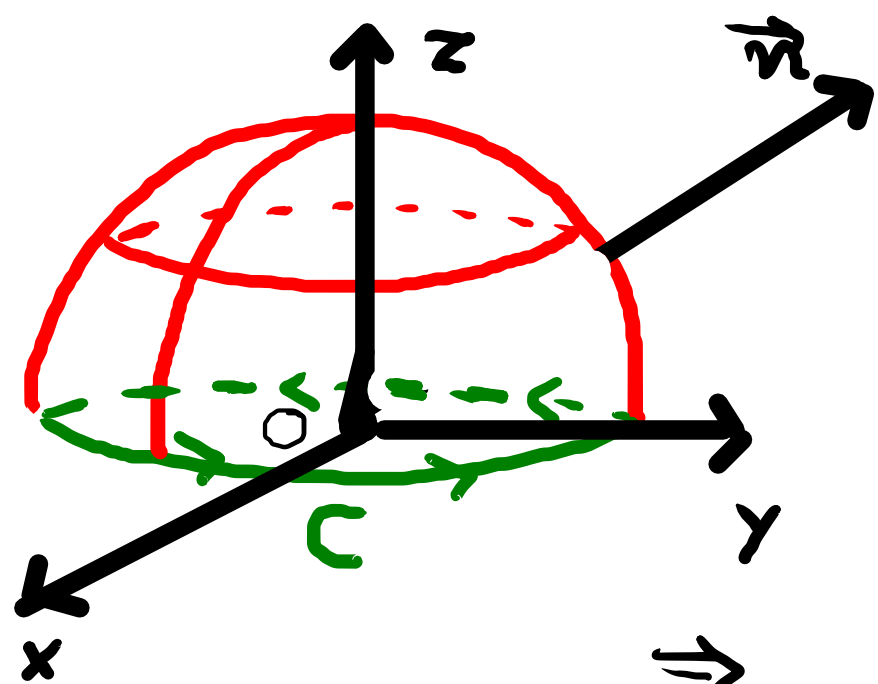
$$\Rightarrow \iint_{\Delta} \operatorname{rot} \vec{F}(S(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) du dv = - \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt.$$

Παράδειγματα:

(i) Να επαληθεύσετε το Θ -Stokes για το διαν. πεδίο

$\vec{F} = (3y, -2x, xyz)$ κ' την επιφάνεια S με ίχνος το άνω ημισφαίριο ακτίνας 1 κ' κέντρου $(0,0,0)$.

Λύση:



$$S : \Delta = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$S(\theta, \phi) = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$$

$$S_\theta \times S_\phi = \dots = \sin\theta S(\theta, \phi), \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$\Rightarrow S_\theta \times S_\phi$ ομόρροπο του διαν. θ ε'σως $S(\theta, \phi)$ 5'

ε'ρα "δειχνει" προς τα ε'ξω $\Rightarrow \underline{\vec{n}(\theta, \phi) = \sin\theta S(\theta, \phi)}, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3y & -2x & xyz \end{vmatrix} = (xz, -yz, -5)$$

$$\text{rot } \vec{F}(S(\theta, \phi)) = (\sin\theta \cos\phi \cos\theta, -\sin\theta \sin\phi \cos\theta, -5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F}(s(\theta, \varphi)) \cdot \vec{n}(\theta, \varphi) = \dots =$$

$$= \sin^3 \theta \cos \theta \cos^2 \varphi - \sin^3 \theta \cos \theta \sin^2 \varphi - 5 \sin \theta \cos \theta$$

$$= \sin^3 \theta \cos(2\varphi) - \frac{5}{2} \sin(2\theta), \quad \forall (\theta, \varphi) \in (0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_{\Delta} \operatorname{rot} \vec{F}(s(\theta, \varphi)) \cdot \vec{n}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi &= \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos(2\varphi) d\varphi - \\ &- \frac{5}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta = -5\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \cos(2\theta) \Big|_0^{\pi/2} = \boxed{-5\pi} \end{aligned}$$

Ταυτόχρονα, επειδή C θετικά προσανατολ. κύκλος του xy -επιπέδου, έχουμε $z=0$ ή'

$$\int_C \vec{F} = \int_C (3y dx - 2x dy) \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} (-2 - 3) dx dy$$

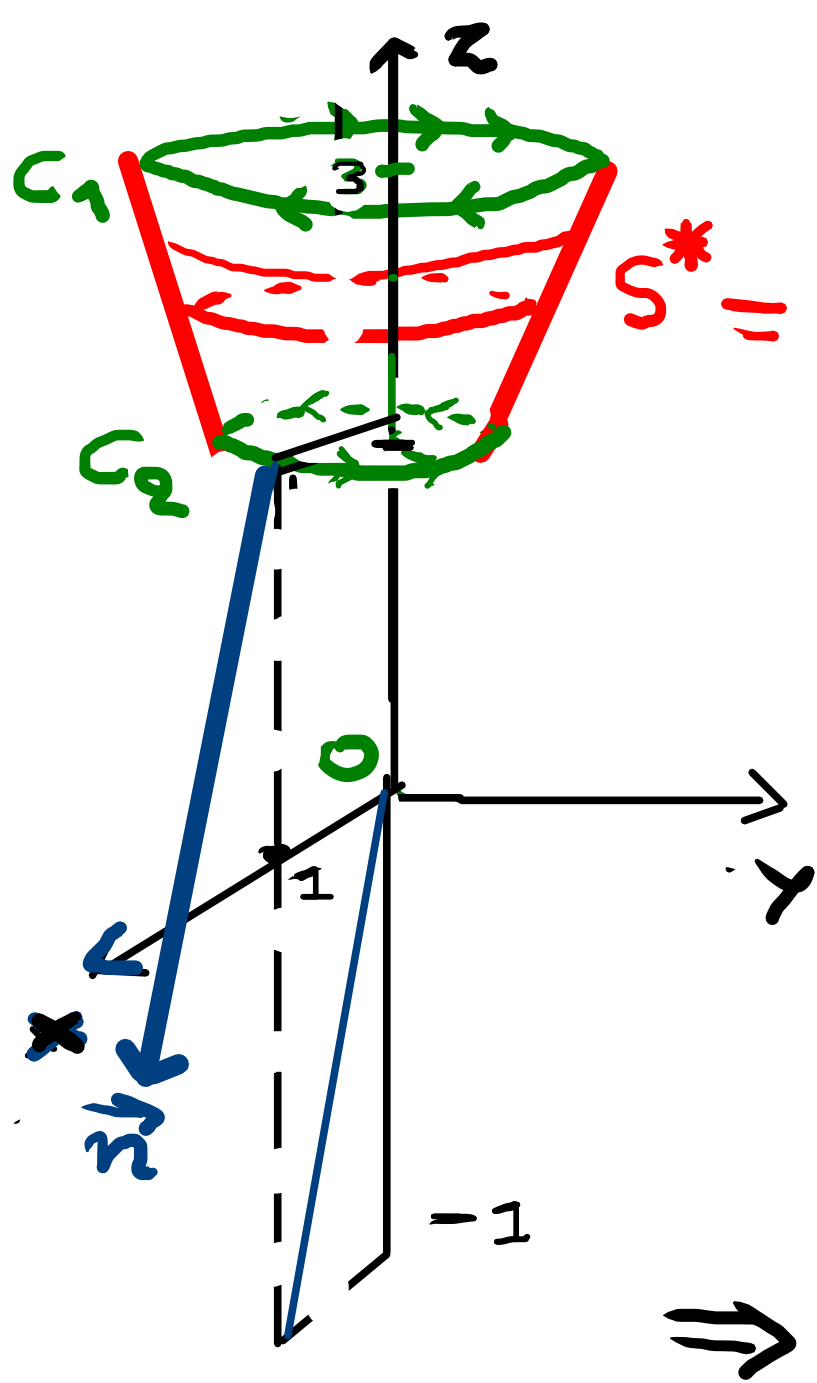
$$= -5 \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy = \boxed{-5\pi}$$

(2) Να επαληθεύσετε το Θ . Stokes για το διαν. πεδίο

$\vec{F} = (yz, -xz, z^3)$ κ' για την επιφάνεια με ίχνο

$$S^* : z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1 \leq z \leq 3.$$

Λύση:



S^* = κόλπος κώνος

$$S(\varphi, z) = z(\cos\varphi, \sin\varphi, 1)$$

$$(\varphi, z) \in \Delta = [0, 2\pi] \times [1, 3],$$

$$S_\varphi \times S_z = z(\cos\varphi, \sin\varphi, -1), \quad (\varphi, z) \in \Delta$$

$$(S_\varphi \times S_z)(0, 1) = (1, 0, -1), \quad S(0, 1) = (1, 0, 1).$$

Αν σχεδιάσουμε το $(1, 0, -1)$ με αρχή $(1, 0, 1)$

παρατηρούμε ότι "δείχνει" προς τα έξω

$$\vec{n}(\varphi, z) = z(\cos\varphi, \sin\varphi, -1), \quad (\varphi, z) \in \Delta.$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & -xz & z^3 \end{vmatrix} = (x, y, -2z)$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{F}(S(\varphi, z)) \cdot \vec{n}(\varphi, z) =$$

$$= (z \cos \varphi, z \sin \varphi, -2z) \cdot (z \cos \varphi, z \sin \varphi, -z) = 3z^2$$

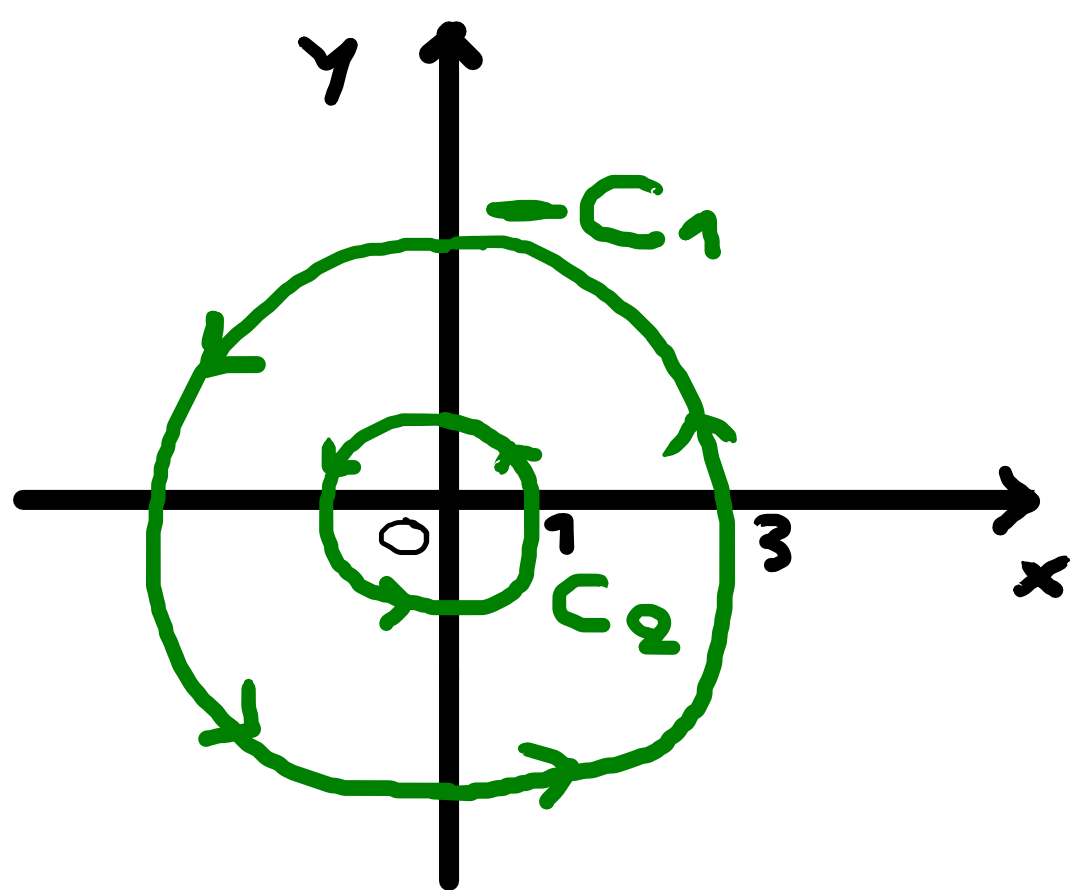
$$\Rightarrow \iint_{\Delta} \text{rot } \vec{F}(S(\varphi, z)) \cdot \vec{n}(\varphi, z) d\varphi dz = \int_0^{2\pi} \int_1^3 3z^2 d\varphi dz = 2\pi \cdot z^3 \Big|_1^3 = \underline{\underline{52\pi}}$$

Τα χείλη της S είναι οι κύκλοι C_1, C_2 προσανατολισμένοι όπως στο σχήμα.

$$C_1: \underline{x^2 + y^2 = 1, z = 1}, \quad C_2: \underline{x^2 + y^2 = 9, z = 3} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} \vec{F} + \int_{C_2} \vec{F} &= \int_{C_1} (yz dx - xz dy + z^3 dz) + \int_{C_2} (yz dx - xz dy + z^3 dz) \\
 &= \int_{C_1} (3y dx - 3x dy) + \int_{C_2} (y dx - x dy) \\
 &= -3 \int_{-C_1} (y dx - x dy) + \int_{C_2} (y dx - x dy).
 \end{aligned}$$

$C_1 = C_2$ βρίσκονται σε επίπεδα // στο xy -επίπεδο
 ή μάλλον θετικά προσανατολισμένες αν τις δούμε ως
 καμπύλες του xy -επίπεδου.



Επομένως, μπορούμε να
εφαρμόσουμε το Θ. Green:

$$\int_{-C_1} (y dx - x dy) = \iint_{x^2 + y^2 \leq 9} (-1 - 1) dx dy =$$

$$= -2 \cdot \pi \cdot 9 = -18\pi,$$

$$\int_{C_2} (y dx - x dy) = \int_{x^2 + y^2 \leq 1} (-1 - 1) dx dy = -2 \cdot \pi \cdot 1^2 = -2\pi$$

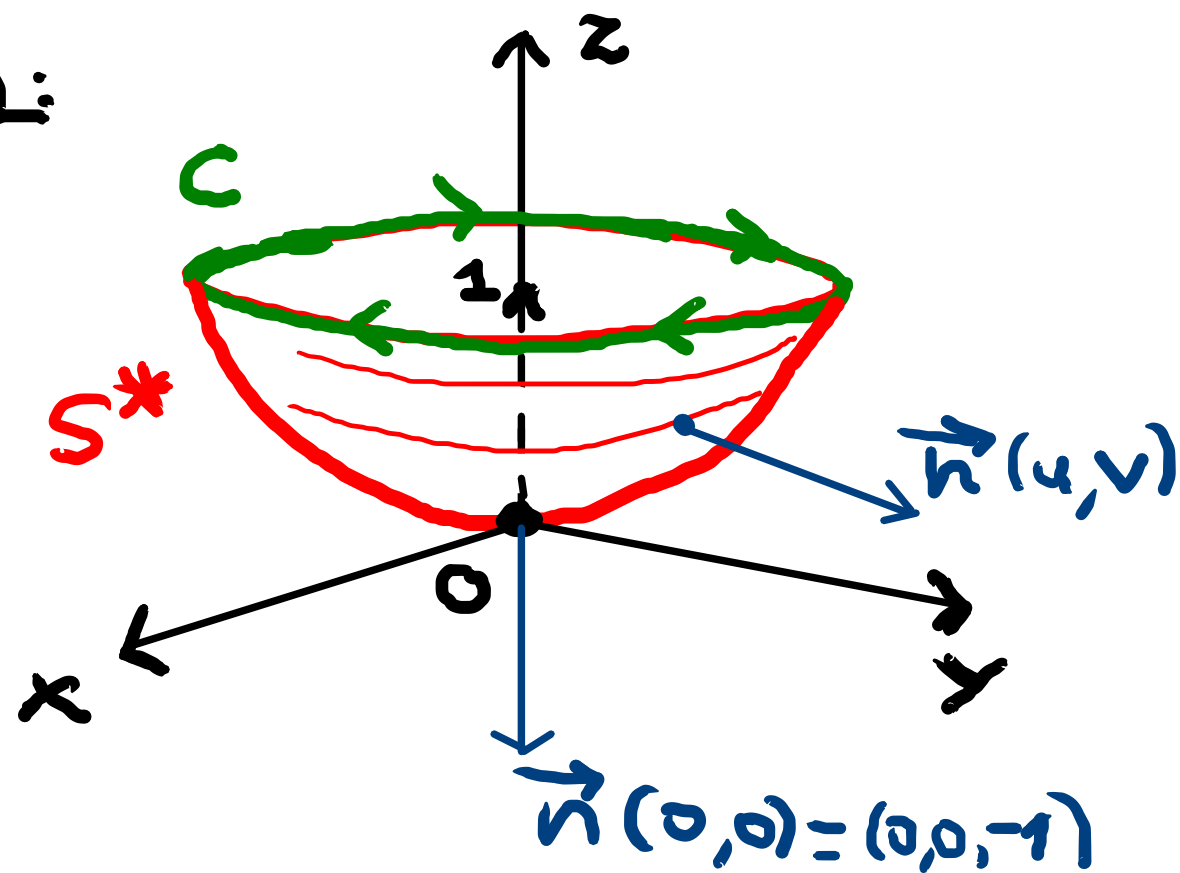
$$\Rightarrow \int_{C_1} \vec{F} + \int_{C_2} \vec{F} = -3 \cdot (-18\pi) - 2\pi = \underline{\underline{52\pi}}$$

(3) Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το πεδίο

$$\vec{F} = \frac{1}{3} (z^3, x^3, y^3) \text{ κ' για την επιφάνεια } S \text{ με}$$

$$S^*: z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Λύση:



$$S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Delta = \{(u,v): u^2 + v^2 \leq 1\}$$

$$S(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$S_u \times S_v = (-2u, -2v, 1)$$

$$(S_u \times S_v)(0,0) = (0,0,1)$$

$$S(0,0) = (0,0,0)$$

Το $(0,0,1)$ με αρχή $(0,0,0)$ "δείχνει" στο εσωτερικό της S^* \Rightarrow

$$\Rightarrow \underline{\vec{n}(u,v) = -(\mathcal{S}_u \times \mathcal{S}_v) = (2u, 2v, -1), (u,v) \in \Delta.}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^3 & x^3 & y^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} (3y^2, 3z^2, 3x^2) = (y^2, z^2, x^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{rot } \vec{F}(\mathcal{S}(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) &= (v^2, (u^2+v^2)^2, u^2) \cdot (2u, 2v, -1) \\ &= 2uv^2 + 2v(u^2+v^2)^2 - u^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\text{πονη τον } \vec{F} \text{ μέσω των } \mathcal{S} \right) = \iint_{\Delta} [2uv^2 + 2v(u^2+v^2)^2 - u^2] du dv$$

$$\underline{\underline{\begin{aligned} u &= r \cos \varphi \\ v &= r \sin \varphi \end{aligned}}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 [2r \cos \varphi r^2 \sin^2 \varphi + 2r \sin \varphi r^4 - r^2 \cos^2 \varphi] r dr d\varphi =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^4 dr + 2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^6 dr - \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \cdot \int_0^1 r^3 dr.$$

Αλλά $\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = -\cos \varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$,

$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} d\varphi = \pi$, άρα $\int_0^{2\pi} \cos(2\varphi) d\varphi = 0$

\Rightarrow η ποσότητα που ζητείται $= -\pi \cdot \int_0^1 r^3 dr = \boxed{-\pi/4}$.

Το χείλος C της S προσανατολίζεται όπως στο σχήμα

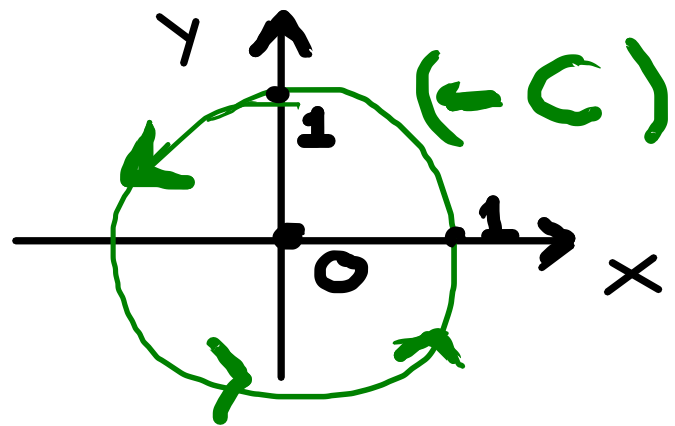
$$C: x^2 + y^2 = 1, z = 1$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} = \frac{1}{3} \int_C (z^3 dx + x^3 dy + y^3 dz) = \frac{1}{3} \int_C (dx + x^3 dy) =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{-C} (dx + x^3 dy). \quad \underline{\text{Η } (-C) \text{ βρίσκεται σε επίπεδο //}}$$

xy - επίπεδο

ως καμπύλη του xy - επιπέδου είναι θετικά προσαν.



οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το

θ . Green:

$$\frac{1}{3} \int_C (dx + x^3 dy) = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2 \varphi dr d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \pi/4 \text{ (ditus } \pi/4)$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{\pi} = \boxed{-\pi/4}$$

(4) Με χρήση του Θ. Stokes να υπολογίσετε το επικαμπύλιο

ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, όπου

• $\vec{F} = (y^2 - 2z^2, x^2 + z^2, y^2 + 2x^2)$

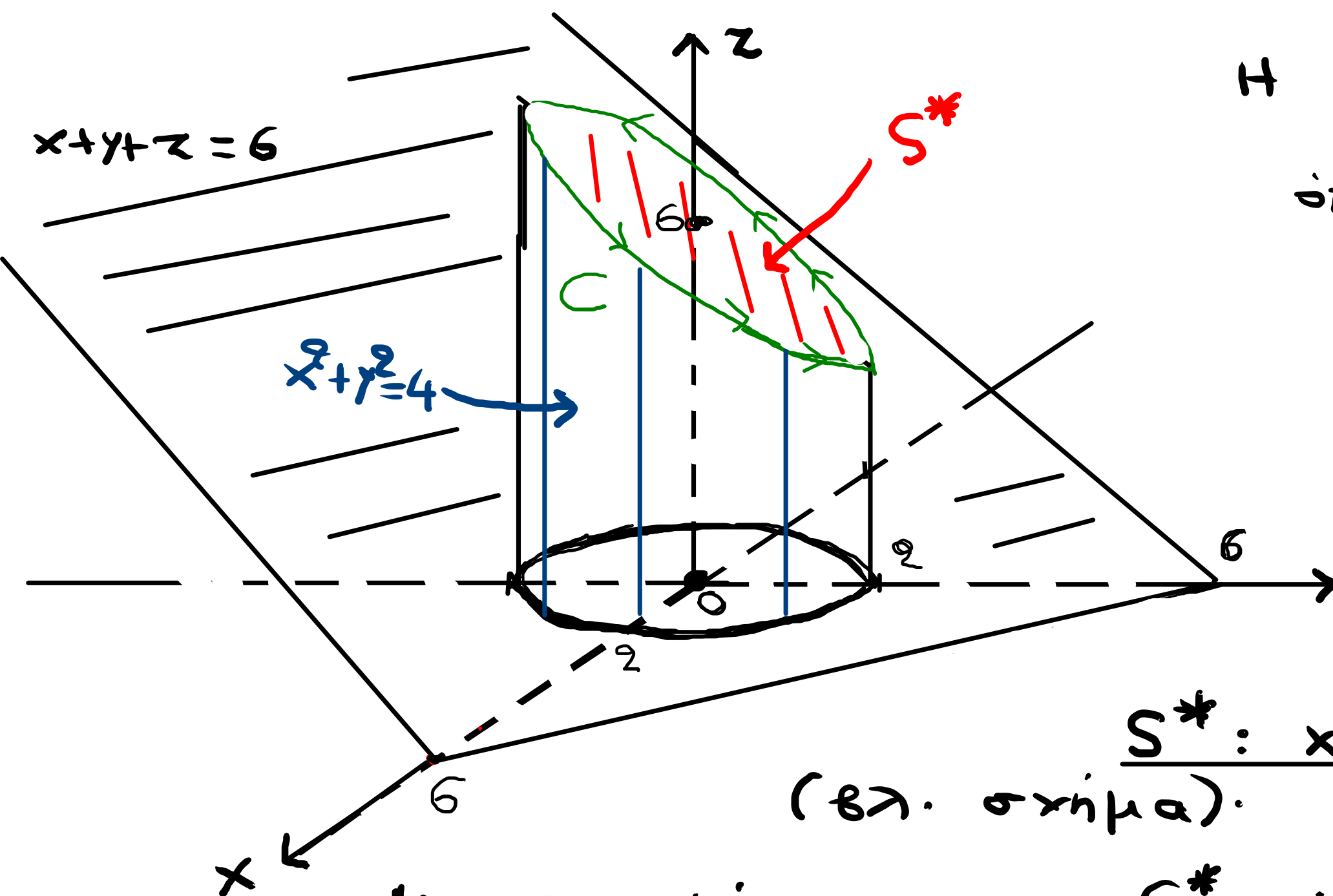
• C η τομή του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 4$ με το επίπεδο

$x + y + z = 6$. Η C είναι αρνητικά προσανατολισμένη ως

προς την εξωτερική κατεύθυνση της επιφάνειας με ίχνος

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x + y + z \leq 6, \quad z > 0.$$

Λύση:



Η C προσανατοχίζεται
 όπως στο σχήμα 15.
μπορεί να θεωρηθεί ως
το θετικά προσανα-
τολισμένο χείλος
του δίσκου

$$S^* : x^2 + y^2 \leq 4, \quad x + y + z = 6$$

(βλ. σχήμα).

Μια παραμέτρηση της S^* είναι

$S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Delta = \{(u,v): u^2 + v^2 \leq 4\}$, $S(u,v) = (u, v, 6 - u - v)$.
Έχομε

$$S_u \times S_v = (1, 1, 1)$$

ενώ $S(0,0) = (0,0,6)$. Το $(1,1,1)$ σχεδιάσμενο με αρχή το $(0,0,6)$

"δείχνει" προς τα έξω του δίσκου S^* \Rightarrow $\vec{n}(u,v) = (1,1,1)$.

Επιπλέον,

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - 2z^2 & x^2 + z^2 & y^2 + 2x^2 \end{vmatrix} = (2y - 2z, -4x - 4z, 2x - 2y)$$

$\Rightarrow \text{rot } \vec{F} \cdot (1,1,1) = -2x - 6z \Rightarrow$ η ποή του $\text{rot } \vec{F}$ μέσω της S
είναι

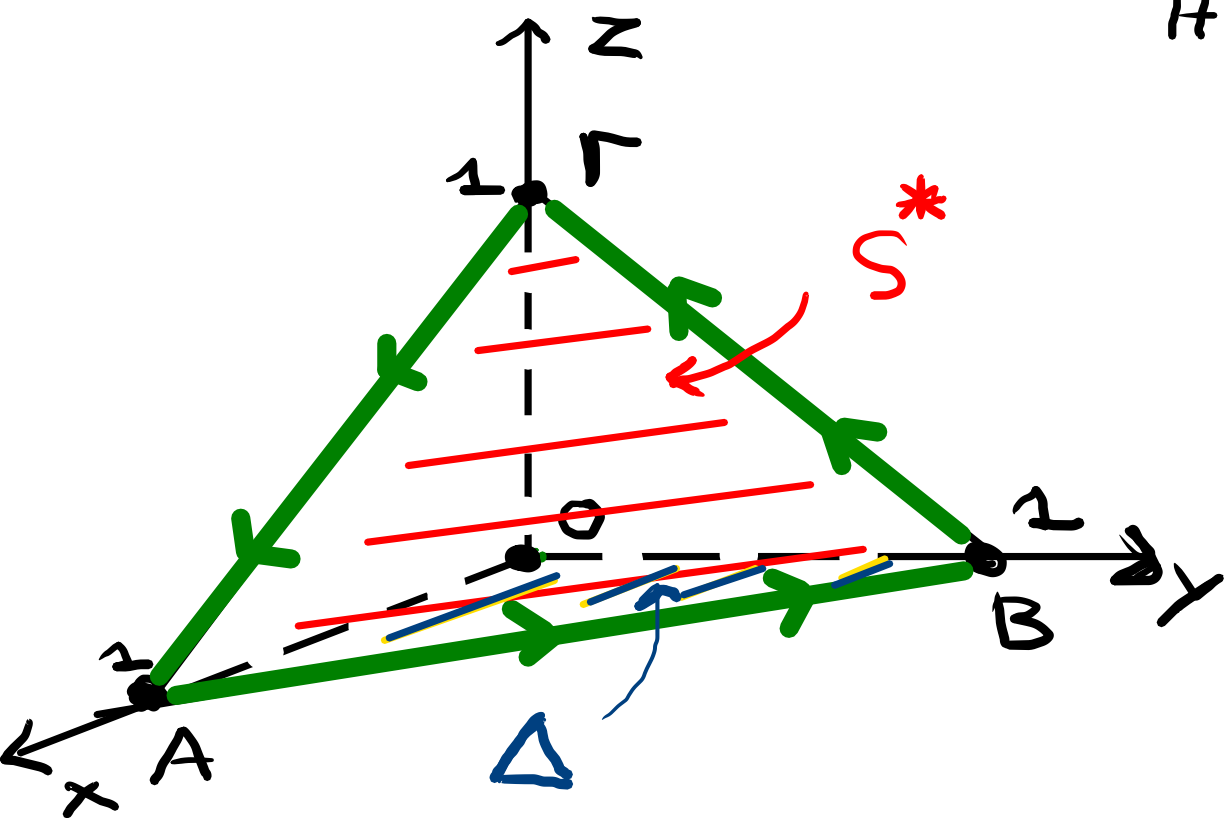
Με χρήση Θ. Stokes
(5) να υπολογίσετε το

εξθλασμένη γραμμή

Λύση:

Θέτουμε

Η



$$\int_C (z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz), \text{ όπου } C \text{ η κλειστή}$$

ΑΒΓΑ, με $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $\Gamma(0,0,1)$.

$$\vec{F} = (z^2, x^2, y^2).$$

Η C είναι το θετικά προσανατολισμένο

χείλος της επιφάνειας S^* του τριγώνου
 $AB\Gamma$.

Η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου
που ορίζεται από τα A, B, Γ

$$\text{είναι } x + y + z = 1 \Leftrightarrow z = 1 - x - y$$

\Rightarrow μια παραμέτρηση της επιφάνειας είναι

$$S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Delta = \{(u, v): u+v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}, \quad S(u, v) = (u, v, 1-u-v).$$

Είναι $S_u \times S_v = (1, 1, 1)$ ("δέξιν" προς τα έξω) $\Rightarrow \underline{\vec{n}(u, v) = (1, 1, 1)}$.

Επιπλέον,

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = 2(y, z, x)$$

$$\Rightarrow (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n})|_S = 2(y + z + x) = 2$$

$$\stackrel{(\Theta \cdot \text{ Stokes})}{\Rightarrow} \int_C \vec{F} = \iint_{\Delta} \text{rot } \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv = 2 \iint_{\Delta} du dv =$$

$$= 2(A \text{ of } B) = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1/2 = \underline{\underline{1}}.$$

(6) Δίνεται το διαν. πεδίο $\vec{G} = (x^2 - 3x + 2, y, (-2x + 2)z)$.

(i) Να βρείτε διαν. πεδίο $\vec{F} = (P, Q, 0)$ με $\text{rot} \vec{F} = \vec{G}$.

(ii) Να βρείτε τη ροή του \vec{G} μέσω της επιφάνειας με ίχνος

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Λύση: (i)

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = (-Q_z, P_z, Q_x - P_y) \Rightarrow \text{θα πρέπει}$$
$$\begin{cases} -Q_z = x^2 - 3x + 2 \\ P_z = y \\ Q_x - P_y = (-2x + 2)z \end{cases}$$

Οι

$$P = yz,$$

$$Q = -(x^2 - 3x + 2)z.$$

ικανοποιούν ως

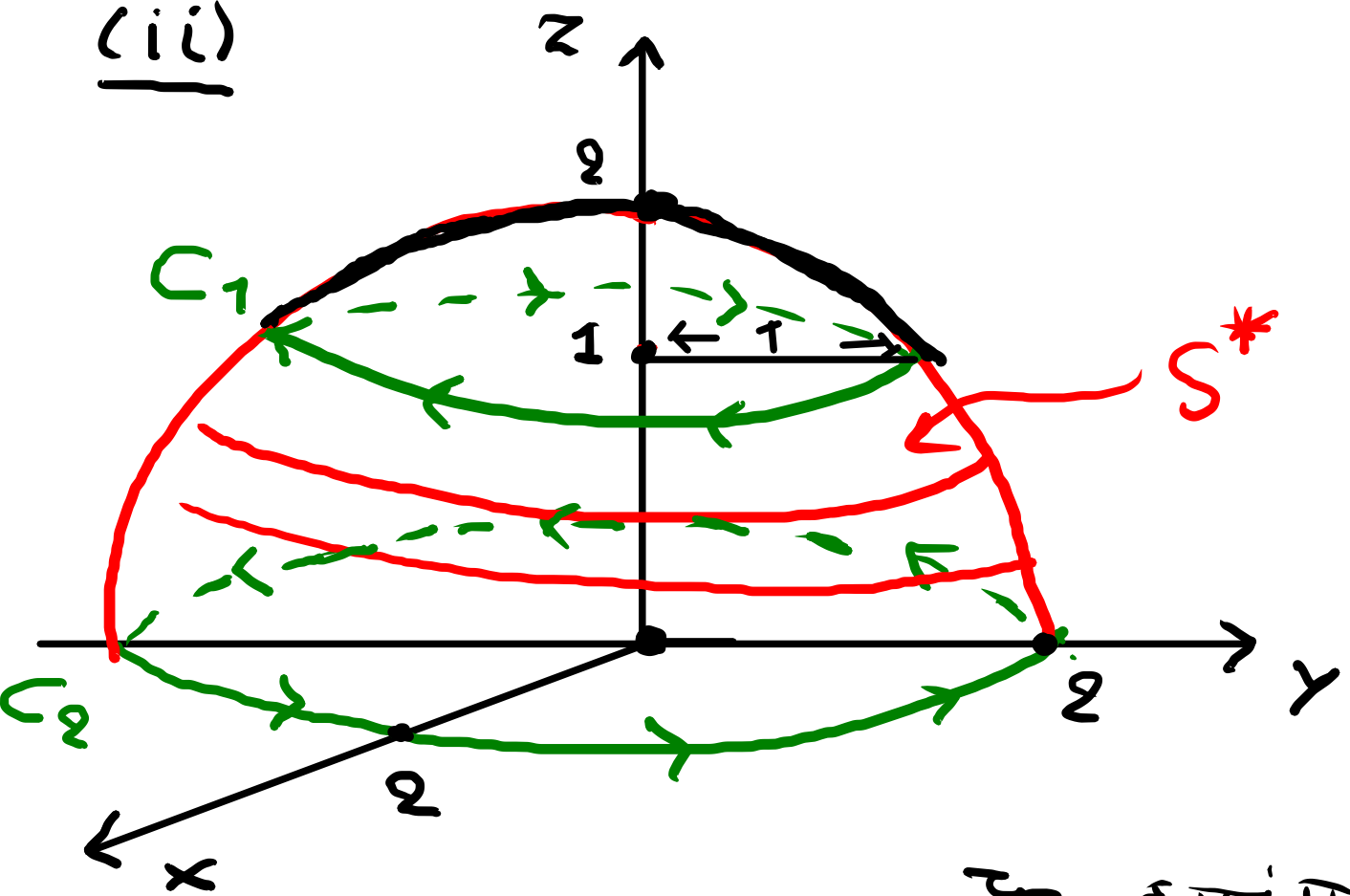
2 πρώτες.

$$\text{Τότε, } Q_x - P_y = -(2x - 3)z - z = -2xz + 2z \implies \text{ισχύει η } 3 \text{η.}$$

Άρα, αν $\vec{F} = (yz, -(x^2 - 3x + 2)z, 0)$, τότε $\text{rot } \vec{F} = \vec{G}$ (φυσικά η \vec{F}

δεν είναι η μοναδική κ' αυτή την ιδιότητα.)

(ii)



Το ίχνος S^* της επιφάνειας είναι

ω τμήμα του άνω ημισφαιρίου
 $x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad z \geq 0$

που βρίσκεται κάτω από ω
επίπεδο $z=1$.

Η κομή του ημισφαιρίου με

ω επίπεδο $z=1$ είναι ο κύκλος

$$C_1: x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1.$$

Η S^* έχει δύο χείλη: C_1 κ' $C_2: x^2 + y^2 = 2, \quad z = 0$.

προσαναπολογισμ ένα όπως σε σχήμα.

Από το Θ . Stokes παίρνουμε ότι η ροή του $\vec{G} = \nabla \times \vec{F}$ μέσω της S είναι

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \text{όπου } \vec{F} = (\gamma z, (-x^2 + 3x - 2)z, 0)$$

→ $\vec{F}|_{C_2} = (0, 0, 0)$, αφού $z=0$, πάνω στην C_2 .

→ $\vec{F}|_{C_1} = (\gamma, -x^2 + 3x - 2, 0)$ πάνω στην C_1 .

Έχουμε $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{-C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-C_1} [-\gamma dx + (x^2 - 3x + 2) dy] \stackrel{(\Theta \text{ Green})}{=} \dots$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (2x-3+1) dx dy = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x dx dy - 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy$$

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x dx dy &\stackrel{x=r\cos\varphi}{=} \\ &\stackrel{y=r\sin\varphi}{=} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos\varphi dr d\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi}_0 \cdot \int_0^1 r^2 dr = 0$$

\Rightarrow η συνάρτηση έχει μέση τιμή $\underline{\underline{-2}}$.

(7) Να επαληθεύσετε το Θ. Stokes για το διαν. πεδίο

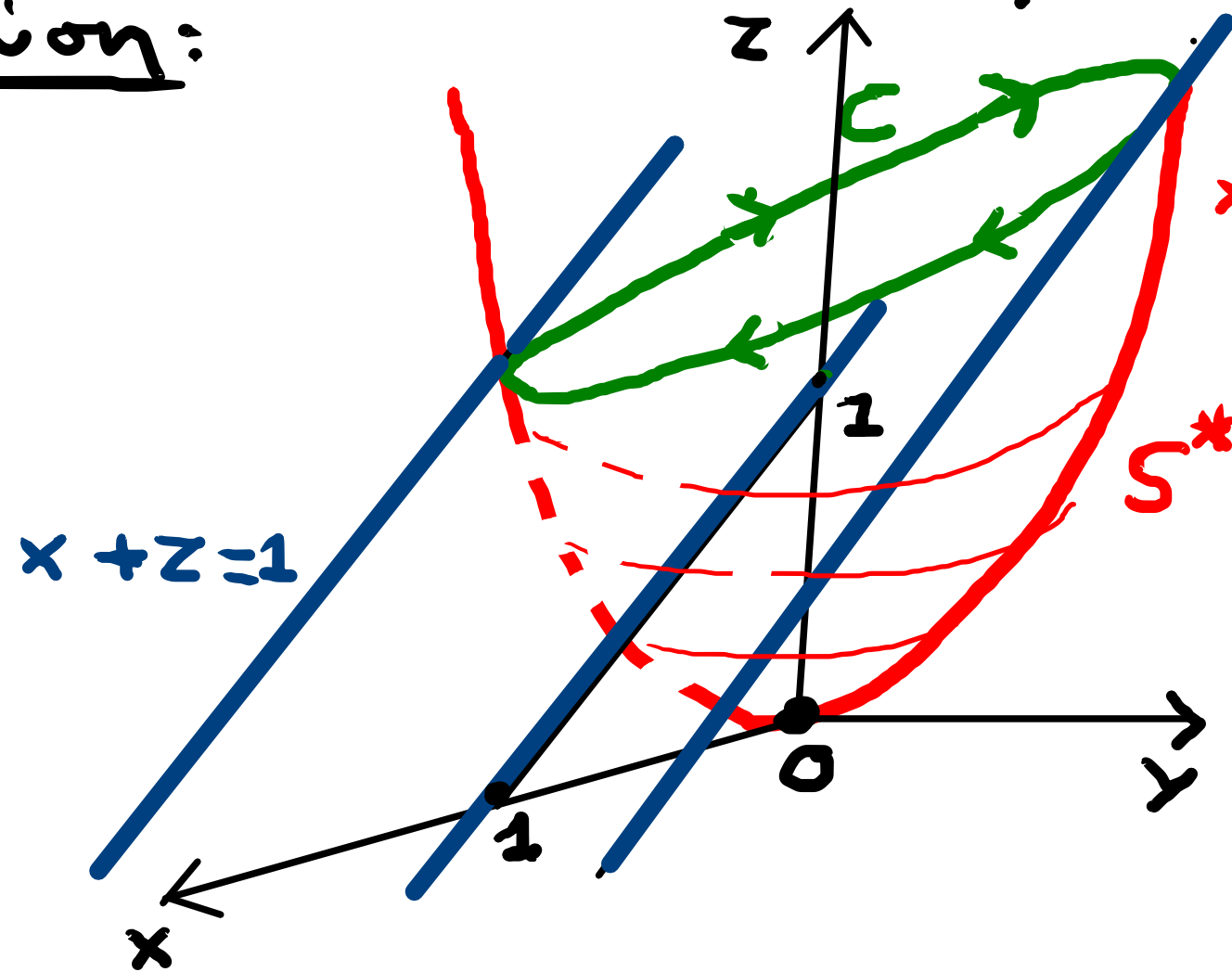
$$\vec{F} = (y, z-2, x+1)$$

κ' την επιφάνεια

$$x^2 + y^2 = 2z,$$

$$z \leq 1-x.$$

Λύση:



$$S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$S(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$$

Για $(u, v) \in \Delta$, πρέπει

$$\frac{u^2 + v^2}{2} \leq 1 - u$$

$$\Leftrightarrow u^2 + 2u + v^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow (u+1)^2 + v^2 \leq 3,$$

οπότε $\Delta = \{(u, v) : (u+1)^2 + v^2 \leq 3\}$.

$\Sigma_u \times \Sigma_v = (-u, -v, 1)$, $(\Sigma_u \times \Sigma_v)(0,0) = (0,0,1)$.

Το $(0,0,1)$ σχεδιασμένο με αρχή το $\Sigma(0,0) = (0,0,0)$

"δείχνει" στο εσωτερικό της Σ^*

$\Rightarrow \vec{n}(u,v) = (u, v, -1), (u,v) \in \Delta.$

Επιπλέον,

$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z-2 & x+1 \end{vmatrix} = \underline{(-1, -1, -1)}.$

Συνεπώς, η ποσότητα του $\text{rot } \vec{F}$ διαμέσου της S είναι

$$\iint_{\Delta} \text{rot } \vec{F}(S(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) du dv = \iint_{\Delta} (-u-v+1) du dv =$$

$$= - \iint_{\Delta} (u+v) du dv + \underbrace{\iint_{\Delta} du dv}_{3\pi}.$$

$$\Delta = \{(u,v) : (u+1)^2 + v^2 \leq 3\}$$

$$u = -1 + r \cos \varphi, \quad v = r \sin \varphi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow \iint_{\Delta} (u+v) du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (-1 + r \cos \varphi + r \sin \varphi) r dr d\varphi =$$

$$= -2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r dr + \int_0^{2\pi} (\cos\phi + \sin\phi) d\phi \cdot \int_0^{\sqrt{3}} r^2 dr$$

$$= -\pi r^2 \Big|_0^{\sqrt{3}} = -3\pi.$$

Άρα, η ροή του $\vec{\pi}$ μέσω της S είναι

$$3\pi + 3\pi = 6\pi.$$

Το κείλος C της S^* είναι η κομή των επιφανειών

$$2z = x^2 + y^2, \quad x + z = 1,$$

προσανατολισμένη όπως στο σχήμα.

Η C ως επίπεδη καμπύλη είναι αρνητικά προσανατολ.

$$C: \quad x^2 + y^2 = 2(1-x), \quad z = 1-x$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{(x+1)^2 + y^2 = 3, \quad z = 1-x}$$

Παραμέτρηση της $(-C)$:

$$\underline{x = -1 + \sqrt{3} \cos t, \quad y = \sqrt{3} \sin t, \quad z = 1 - x = 2 - \sqrt{3} \cos t,}$$
$$\underline{t \in [0, 2\pi].}$$

$$\gamma(t) = (-1 + \sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \sin t, 2 - \sqrt{3} \cos t)$$

$$\gamma'(t) = \sqrt{3} (-\sin t, \cos t, \sin t)$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\sqrt{3} \sin t, -\sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \cos t) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{3} (-\sin t, \cos t, \sin t) = 3 (-\sin^2 t - \cos^2 t + \sin t \cos t)$$

$$= -3 + \frac{3}{2} \sin(2t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{\Gamma} = - \int_{-C} \vec{\Gamma} = 3 \int_0^{2\pi} dt + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt = 6\pi$$