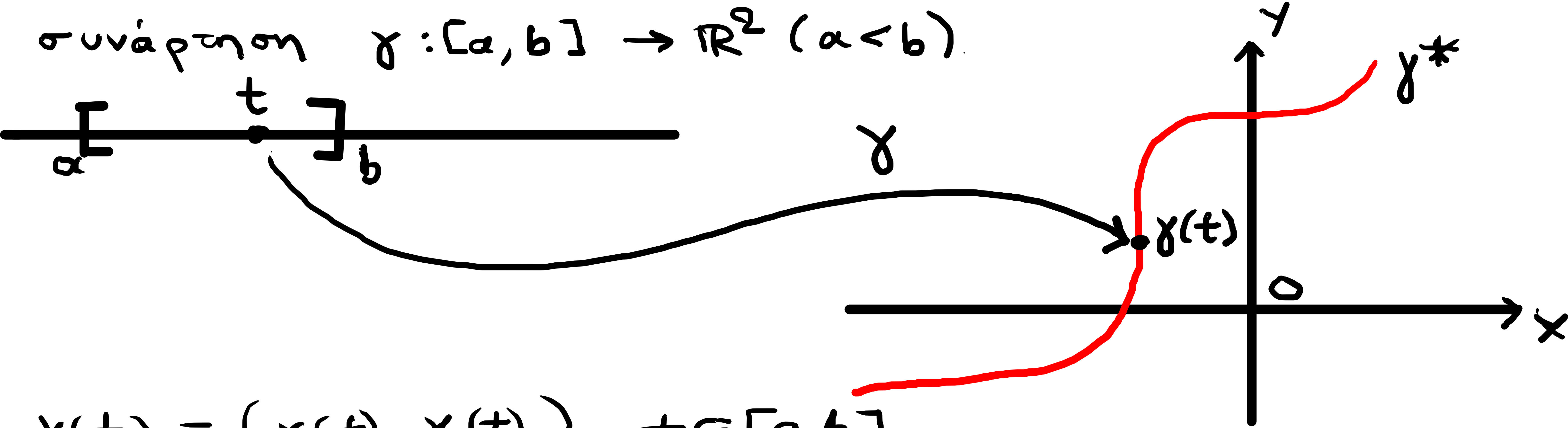
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Ορισμός 1: **Καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$** είναι μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ $(a < b)$.



$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \; t \in [a, b]$.

Εάν $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη, ορίζονται δύο συνεχείς συναρτήσεις $x(\cdot), y(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad \forall t \in [a,b].$$

Οι $x(\cdot), y(\cdot)$ ονομάζονται <u>συνιστώσες της γ.</u>

Το σύνολο

$$\gamma^* = \gamma([a,b]) = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\}$$

ονομάζεται <u>ίχνος</u> της γ.

<u>Σχόλιο:</u> Ενδέχεται δύο καμπύλες γ_1, γ_2 να έχουν το ίδιο ίχνος. Π.χ. $\gamma_1(t) = (t, t^2)$, $\gamma_2(t) = (t^3, t^6)$, $t \in [-1,1]$.

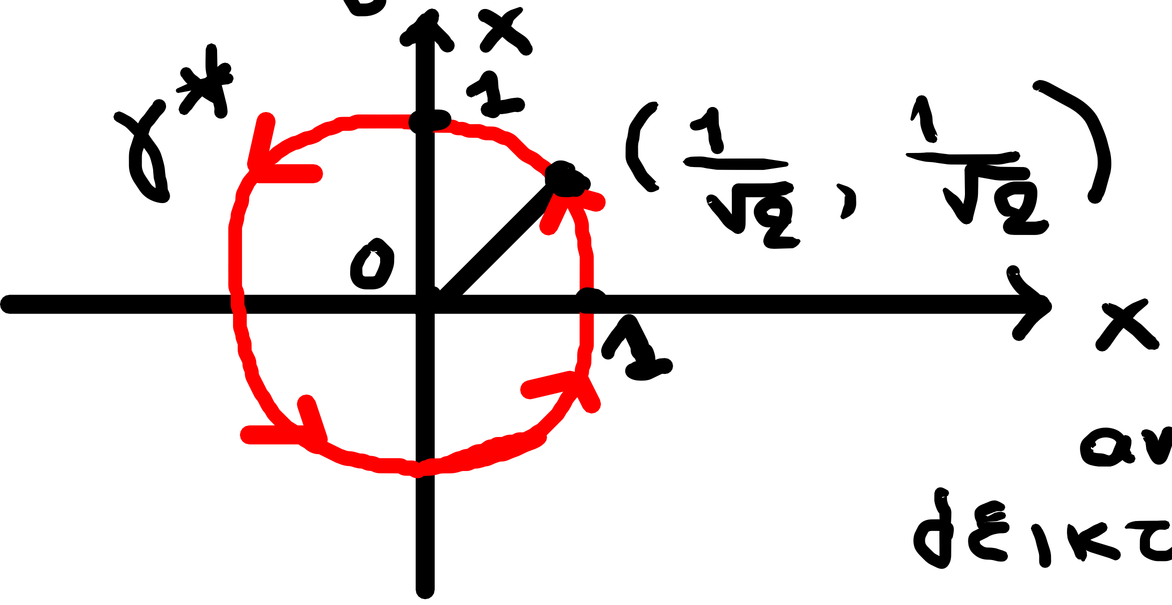
$$\gamma_1^* = \gamma_2^* = \{(t, t^2) : \quad \in [-1, 1]\}, \qquad \gamma_1 \neq \gamma_2.$$

Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ καμπύλη.

- Το $\gamma(a)$ καλείται <u>αρχή</u> κ' το $\gamma(b)$ <u>πέρας</u> της γ.
- Στα σημεία του γ^* ορίζεται μια φυσιολογική διάταξη: "Το σημείο $\gamma(t_1)$ προηγείται του σημείου $\gamma(t_2)$ ανν $t_1<t_2$"

Με αυτόν τον τρόπο καθορίζεται <u>η φορά διαγραφής</u> του γ^*.

<u>Π.χ.</u> $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$.



γ^* = ο μοναδιαίος κύκλος με φορά διαγραφής <u>θετική</u>, δηλ. αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

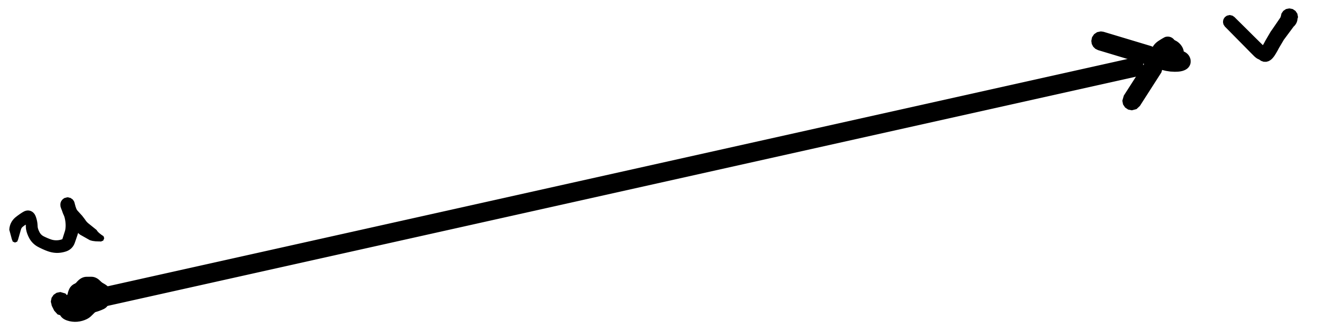
Πράγματι $0 < \pi/4 < \pi/2$, οπότε

- το $\gamma(0) = (1,0)$ "προηγείται" του $\gamma(\pi/4) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- το $\gamma(\pi/4) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ "προηγείται του $\gamma(\pi/2) = (0,1)$.

<u>Παραδείγματα</u>:

<u>(i)</u> Έστω $u, v \in \mathbb{R}^2$ κ' $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (1-t)u + tv, t \in [0,1]$.

Το γ^* είναι το προσανατολισμένο ευθ. τμήμα $[u, v]$ με αρχή το u κ' πέρας το v.

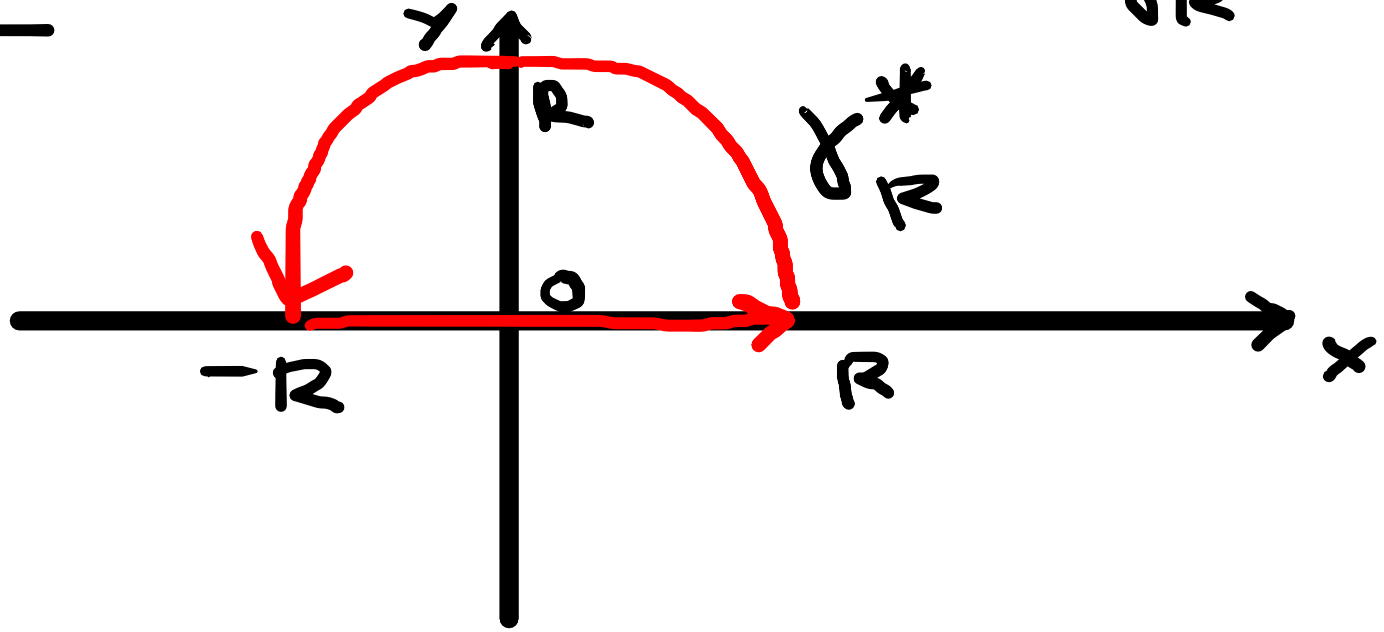


(ii) Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $R>0$ κ' $\gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με

$$\gamma_R(t) = (x_0 + R\cos t,\ y_0 + R\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$\gamma_R^* =$ ο κύκλος κέντρου (x_0, y_0) κ' ακτίνας R με θετική φορά διαγραφής.

(iii) Έστω $R>0$ κ' $\gamma_R(t) = \begin{cases} (R\cos t, R\sin t), & t \in [0, \pi] \\ \frac{R}{\pi}(2t - 3\pi, 0), & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$.



Ορισμός 2: Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ καμπύλη. Η γ λέγεται

- **κλειστή** ανν $\gamma(a)=\gamma(b)$.
- **απλή** ανν η $\gamma|[a,b)$ είναι 1-1 (το γ^* δεν "τέμνει" τον εαυτό του).

Παραδείγματα:

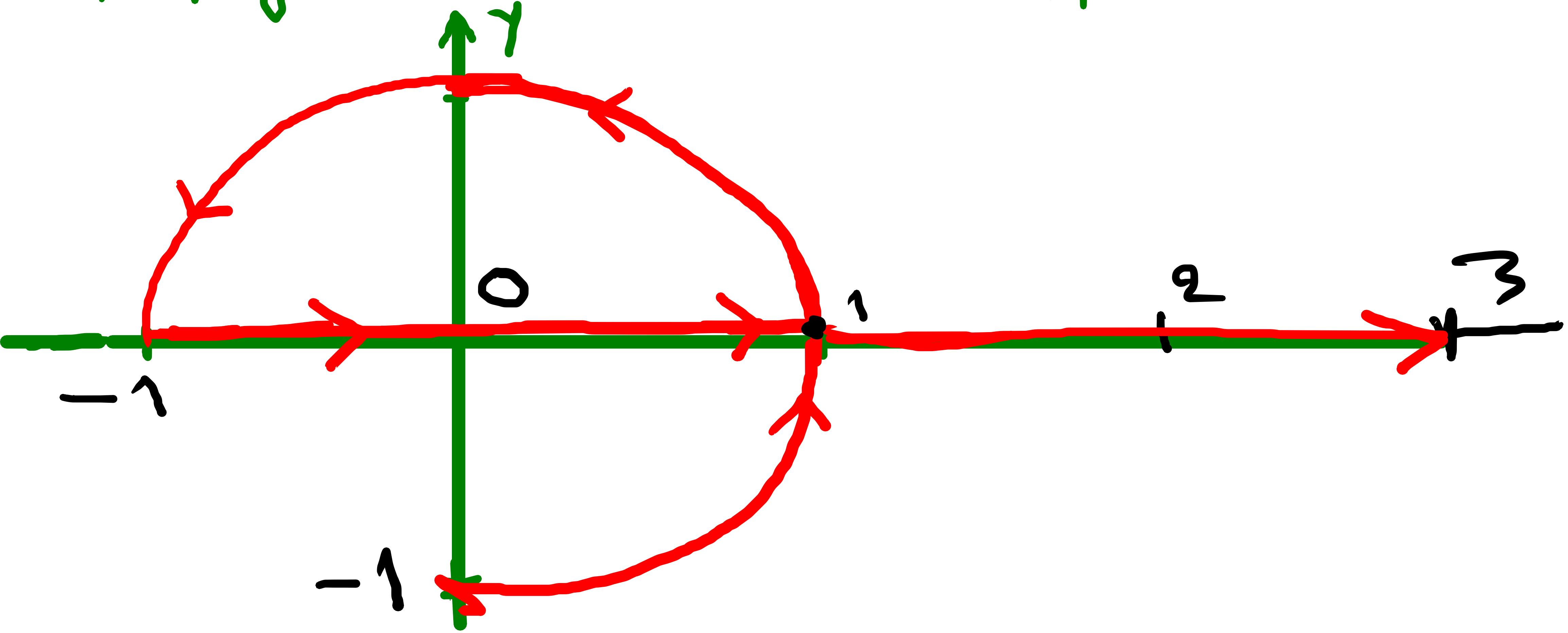
(i) $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$. Η γ είναι απλή κλειστή.

(ii) $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,4\pi]$. Η γ είναι κλειστή, όχι απλή. Π.χ. $\gamma(0)=\gamma(2\pi)=1$. Το γ^* είναι ο μοναδιαίος κύκλος που διαγράφεται 2 φορές κατά την θετική φορά.

(iii) $\gamma : [-\pi/2, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t), & t \in [-\pi/2, \pi] \\ \left(\frac{4t}{\pi} - 5, 0\right), & t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$

$\gamma(-\pi/2) = (0,-1)$, $\gamma(0) = \gamma(3\pi/2) = (1,0)$, $\gamma(2\pi) = 3$

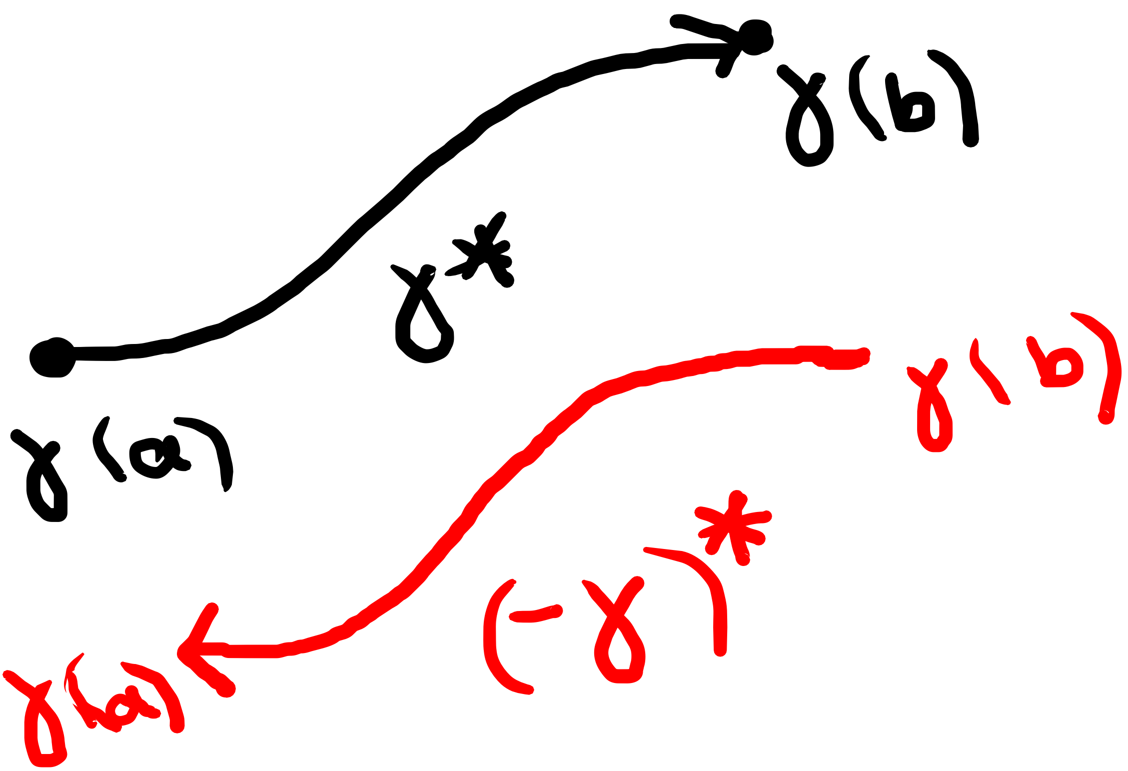
$\Rightarrow$ η γ δεν είναι ούτε απλή ούτε κλειστή.



<u>Ορισμός 3</u>: Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη. <u>Η αντίθετη</u> της γ είναι η καμπύλη $(-\gamma) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ με

$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t), \ t \in [a,b]$.

Τα ίχνη των γ, $(-\gamma)$ έχουν αντίθετες φορές διαγραφής.

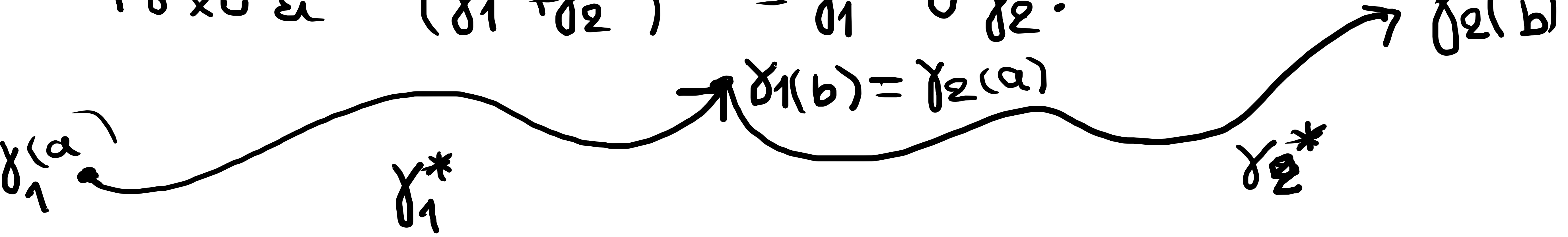


Ορισμός 4: Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ **διαδοχικές καμπύλες**, δηλ. $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$.

Άθροισμα των γ_1, γ_2 είναι η καμπύλη $(\gamma_1 + \gamma_2) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ με

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t-a), & t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-b), & t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]. \end{cases}$$

Ισχύει $(\gamma_1 + \gamma_2)^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$.



<u>Σχόλιο:</u> Το κίνητρο για τον ορισμό της $\gamma_1+\gamma_2$ είναι το εξής: θέλουμε να βρούμε μια καμπύλη με ίχνος την $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$, οπότε είναι λογικό να βρούμε μια συνεχή συνάρτηση $\delta(t) = \begin{cases} \delta_1(t), & t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \delta_2(t), & t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$

ώστε $\delta_1^* = \gamma_1^*$, $\delta_2^* = \gamma_2^*$, δηλ.

$$\delta_1\left(\left[a, \frac{a+b}{2}\right]\right) = \gamma_1([a,b]),\ \delta_2\left(\left[\frac{a+b}{2}, b\right]\right) = \gamma_2([a,b])$$

Αρκεί να βρούμε $\left.\begin{array}{l} \varphi_1 : [a, \frac{a+b}{2}] \to [a,b] \\ \varphi_2 : [\frac{a+b}{2}, b] \to [a,b] \end{array}\right\}$ συνεχείς 1–1 επί

- $\forall t \in [a, \frac{a+b}{2}]$, $2t-a \in [a, b]$ οπότε θέτω

$$\varphi_1(t) = 2t-a$$

- $\forall t \in [\frac{a+b}{2}, b]$, $2t-b \in [a, b]$, οπότε θέτω

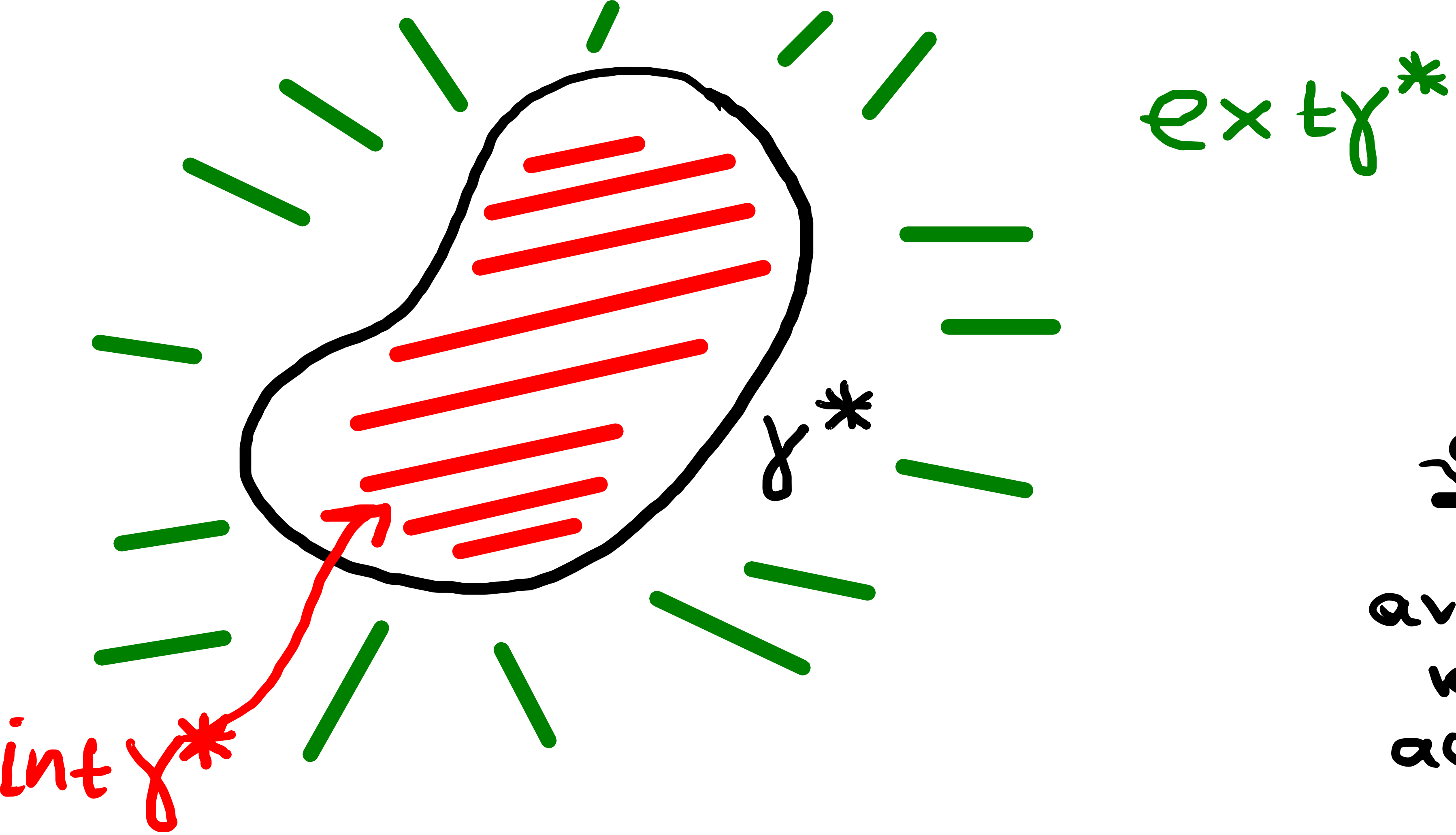
$$\varphi_2(t) = 2t-b.$$

Οι φ_1, φ_2 είναι 1-1, επί.

Θέτουμε $\delta_1 = \gamma_1 \circ \varphi_1$, $\delta_2 = \gamma_2 \circ \varphi_2$.

Θεώρημα 5 (Jordan): Έστω γ απλή, κλειστή καμπύλη. Τότε, το $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma^*$ χωρίζεται σε δύο ξένα πεδία (= ανοικτά, συνεκτικά):

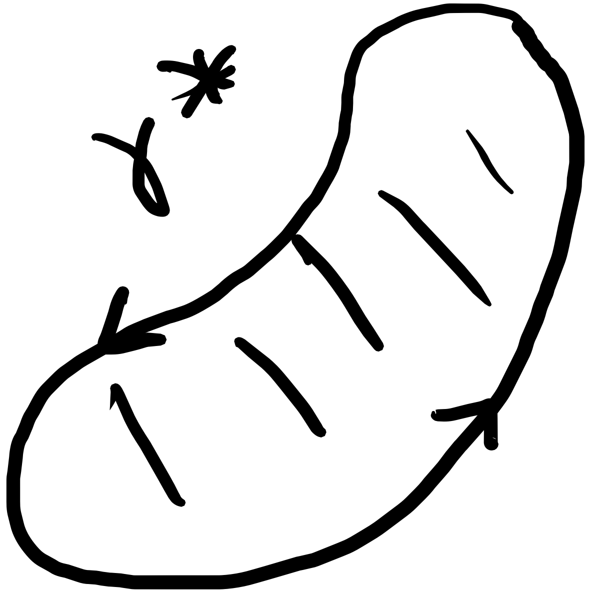
- ένα φραγμένο πεδίο που λέγεται εσωτερικό της γ κ' συμβολίζεται με $\operatorname{int}\gamma^*$
- ένα μη φραγμένο πεδίο που λέγεται εξωτερικό της γ κ' συμβολίζεται με $\operatorname{ext}\gamma^*$.



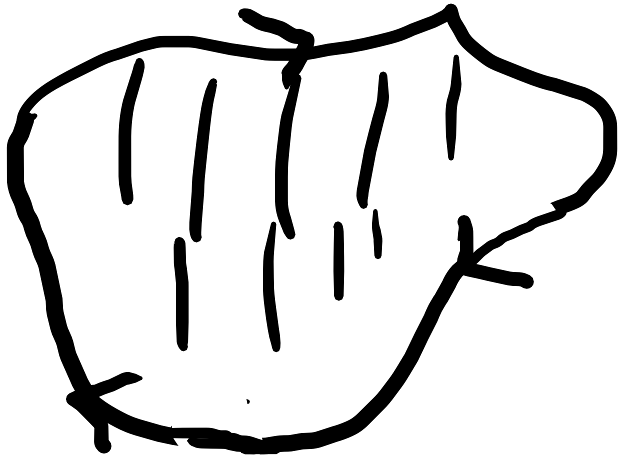
<u>Ορισμός 6:</u>

Μια απλή κλειστή καμπύλη γ λέγεται **<u>θετικά προσανατολισμένη</u>** αν ένας παρατηρητής που κινείται πάνω στο γ^* αφήνει στα αριστερά του το int γ^*.

Η γ λέγεται <u>αρνητικά προσανατολισμένη</u> αν δεν είναι θετικά προσανατολισμένη.



γ: θετικά προσανατολ.



δ: αρνητικά προσαν.

Ορισμός 7: Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ καμπύλη με

$\gamma(t)=(x(t),\, y(t)),\ t\in[a,b]$.

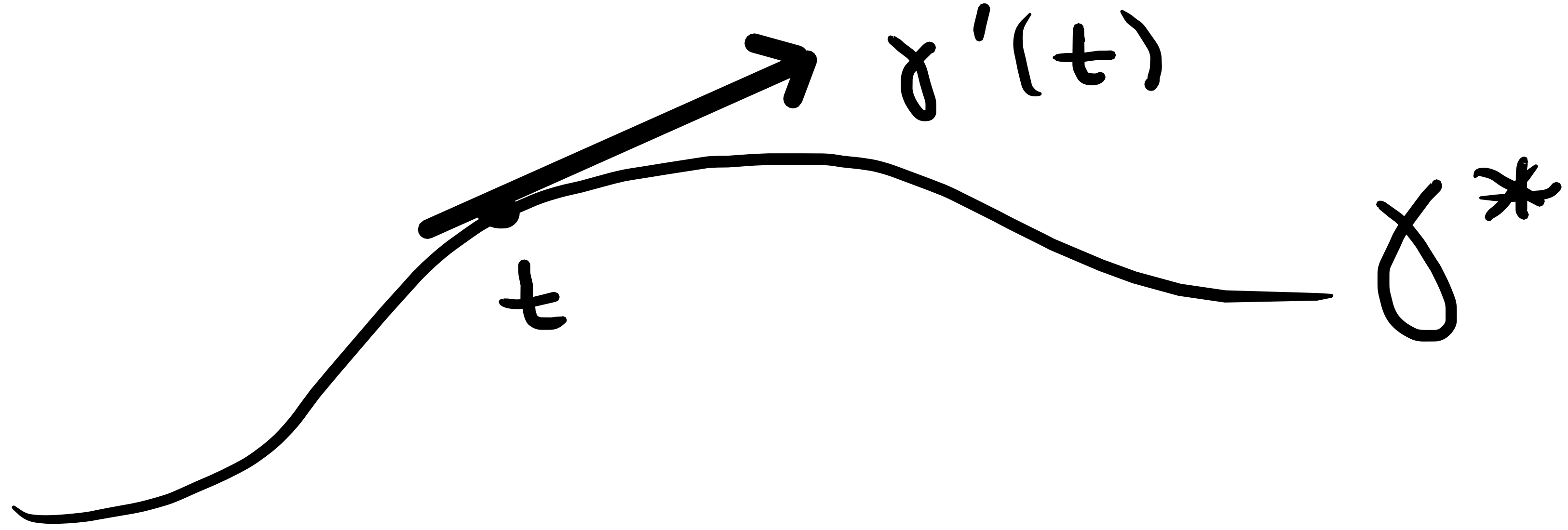
Η γ λέγεται

- **διαφορίσιμη** ανν $x(\cdot), y(\cdot)$ διαφορίσιμες.

Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε $\gamma'(t)=(x'(t),\, y'(t)), t\in[a,b]$.

- **κλάσης C^1** ανν είναι διαφορίσιμη κ' οι $x'(\cdot), y'(\cdot)$ είναι συνεχείς.
- **λεία** ανν είναι κλάσης C^1 κ' $\gamma'(t)\neq(0,0)$, $\forall\, t\in(a,b)$.

Σχόλιο: Η συνθήκη "$\gamma'(t) \neq (0,0)$" $\forall t \in (a,b)$, εξασφαλίζει ότι σε <u>κάθε</u> σημείο του γ^*, το διάνυσμα της ταχύτητας είναι μη μηδενικό κ' άρα ορίζεται η εφαπτομένη.



Ενδέχεται όμως $\gamma'(t_0)=(0,0)$ σε κάποιο σημείο $t_0 \in (a,b)$ να ορίζεται εφαπτομένη στο $(0,0)$ (Βλ. Παράδ. (iii) παρακάτω).

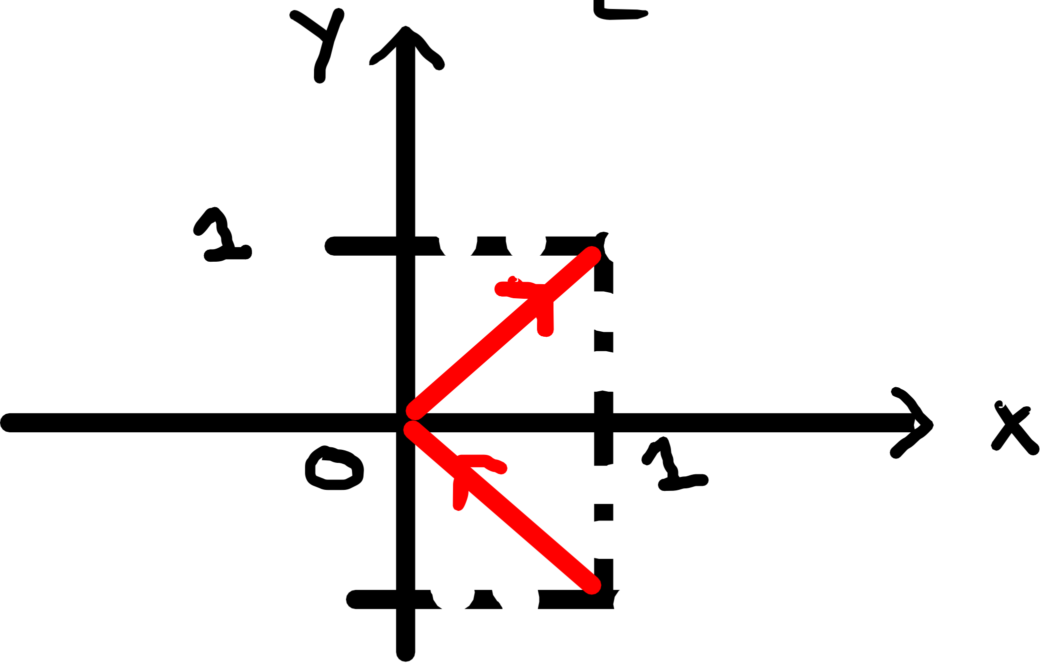
Παραδείγματα:

(i) $\gamma_R(t) = (x_0 + R\cos t,\ y_0 + R\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$ $(x_0, y_0 \in \mathbb{R},\ R > 0)$.

Η γ_R είναι λεία.

(ii)

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^2, t^2), & t \in [0,1] \\ (t^2, -t^2), & t \in [-1, 0] \end{cases}$$



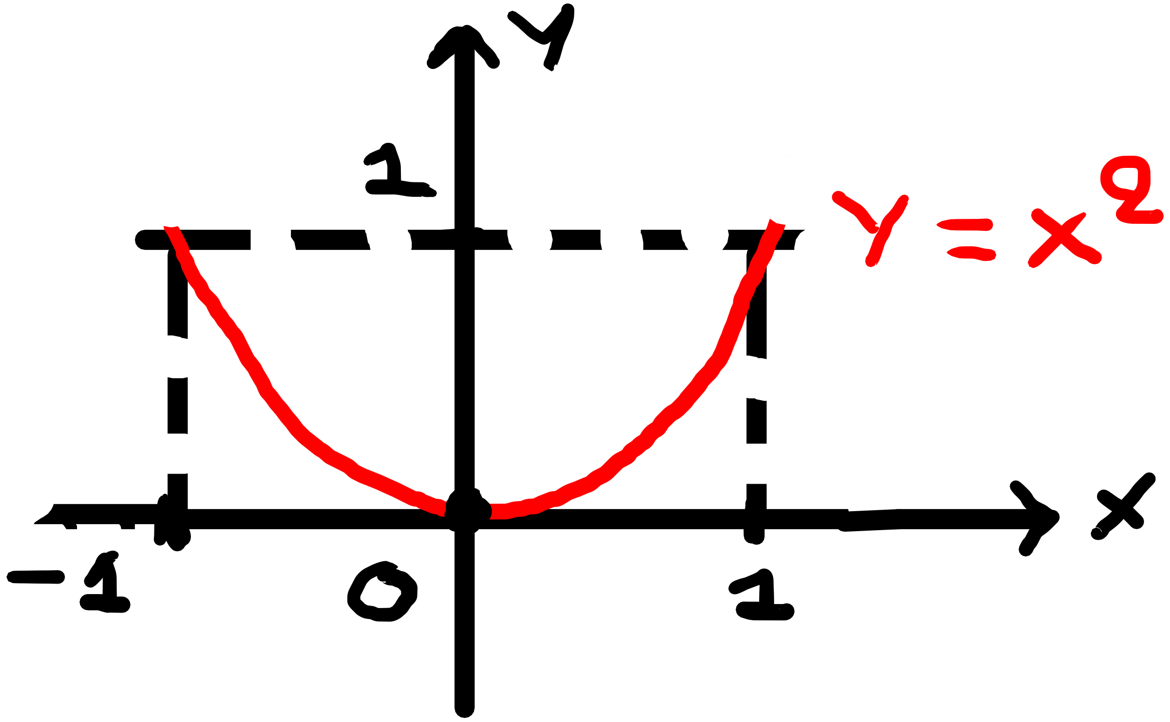
Η γ είναι C^1 αλλά όχι λεία αφού $\gamma'(0) = (0,0)$.

Παρατηρούμε ότι στο $(0,0)$ υπάρχει "γωνία" (δεν ορίζεται εφαπτομένη).

(iii) $\gamma(t) = (t^3, t^6)$, $t \in [-1,1]$. Η γ είναι C^1 αλλά όχι λεία αφού $\gamma'(0) = (0,0)$. Παρ' όλ' αυτά

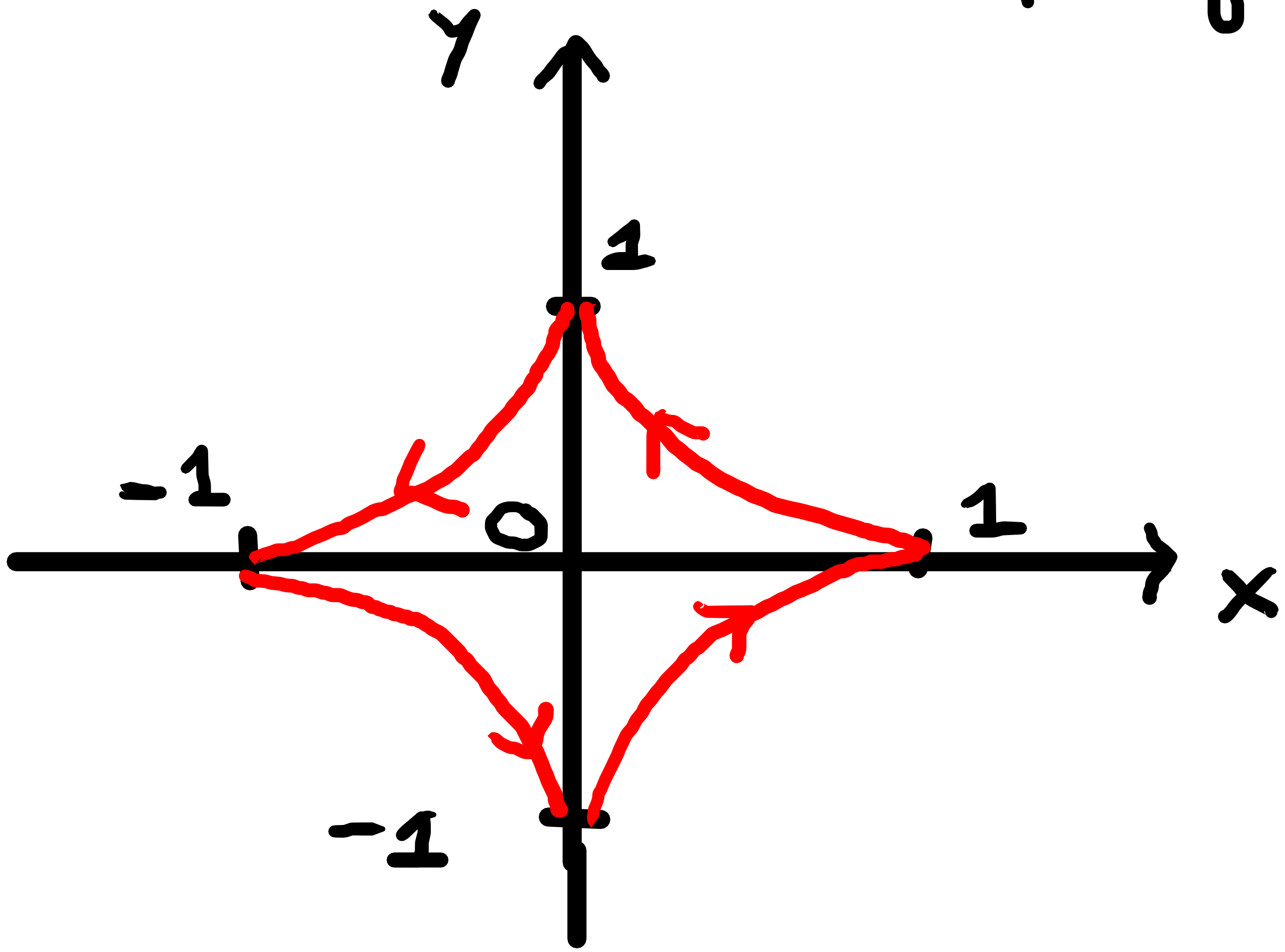
$$\gamma^* = \{(x, x^2) : x \in [-1,1]\} = \text{γράφημα της } y = x^2 \text{ στο } [-1,1]$$

$\Longrightarrow$ η γ^* έχει εφαπτομένη στο $(0,0)$ τον $x'x$.



αστεροειδής

(iv) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Η γ είναι C^1 αλλά όχι λεία αφού $\gamma'(t) = (0,0)$, $\forall t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$.



Στα σημεία $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ υπάρχουν «ακίδες» (χειρότερα από «γωνίες»!)

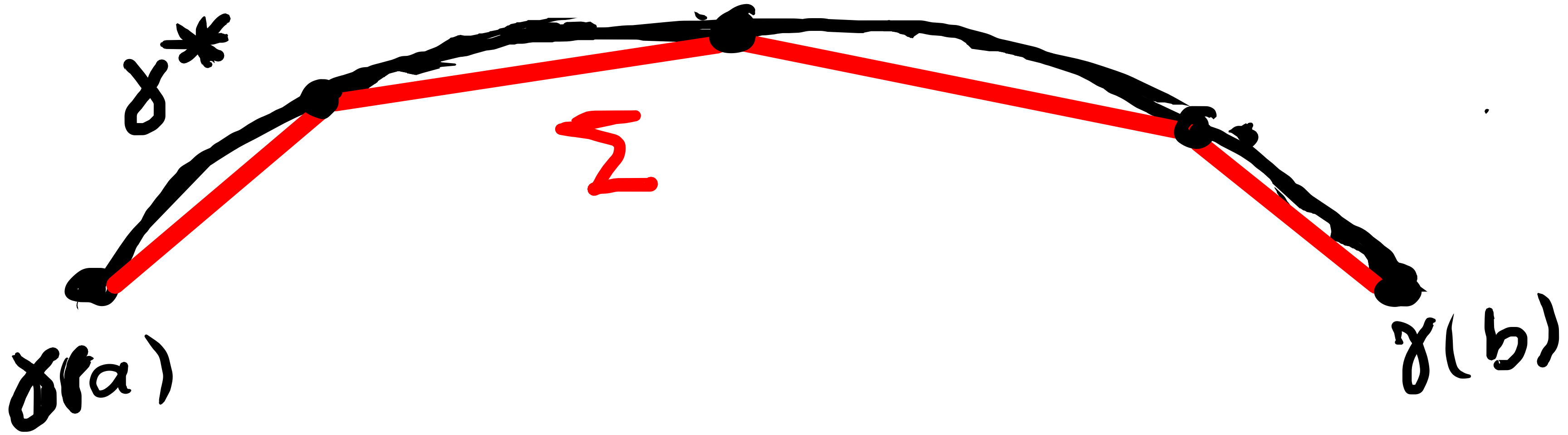
Ορισμός 8: Μια καμπύλη λέγεται **τμηματικά λεία** ανν είναι το άθροισμα διαδοχικών λείων καμπυλών. Οι καμπύλες των Παραδειγμάτων (ii), (iii) (βλ. παραπάνω), είναι τμηματικά λείες.

Ορισμός 9: Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ λεία καμπύλη. **Μήκος** της γ είναι ο αριθμός $\|\gamma\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

δηλ. αν $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$, $\|\gamma\| = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$

[Σημ. ότι ο τυπικός ορισμός του $\|\gamma\|$ είναι ο εξής:

$\|\gamma\| = \sup\{ L(\Sigma) :$ Σ τεθλασμένη γραμμή με κορυφές πάνω στο γ^*, με αρχή το $\gamma(a)$ κ' πέρας το $\gamma(b)\}$.



Εάν γ <u>λεία</u>, αποδεικνύεται ότι $\|\gamma\| < \infty$ κ'

$$\|\gamma\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.]$$

Παραδείγματα (i) $\gamma_R(t)=(\underbrace{x_0+R\cos t}_{x(t)},\ \underbrace{y_0+R\sin t}_{y(t)})$, $t\in[0,2\pi]$

$(x_0, y_0\in\mathbb{R},\ R>0)$.

$$\|\gamma_R\|=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=2\pi R$$ (όπως αναμενόταν!).

(ii) $\gamma(t)=(t-\sin t,\ 1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$ (κυκλοειδής).

$\gamma'(t)=(1-\cos t,\ \sin t)$, $\|\gamma'(t)\|^2=2(1-\cos t)=4\sin^2(t/2)$

$$\|\gamma\|=\int_0^{2\pi}2\sin(t/2)\,dt=4\int_0^{\pi}\sin t\,dt=8.$$

Ορισμός 10: Εάν γ τμηματικά λεία με $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$, όπου $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ διαδοχικές λείες καμπύλες, τότε

$$\|\gamma\| = \sum_{k=1}^{n} \|\gamma_k\|.$$

Ορισμός 11: Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ καμπύλη. Μια καμπύλη $\delta:[c,d]\to\mathbb{R}^2$ λέγεται **αναπαραμέτρηση** της γ ανν $\exists\,\varphi:[c,d]\to[a,b]$ συνεχής, $\uparrow$ κ' επί ώστε

$$\delta=\gamma\circ\varphi.$$

Τότε:

(i) $\delta(c)=\gamma(\varphi(c))=\gamma(a)$, $\delta(d)=\gamma(\varphi(d))=\gamma(b)$

(ii) $\delta^*=\delta([c,d])=\gamma(\varphi([c,d]))=\gamma([a,b])=\gamma^*$

(iii) Εάν γ είναι C^1 κ' φ C^1 τότε κ' η $\delta=\gamma\circ\varphi$ είναι C^1 κ' $\forall s\in[c,d]$, $\delta'(s)=\varphi'(s)\cdot\gamma'(\varphi(s))$.

(iv) Οι δ,γ έχουν την ίδια φορά διαγραφής (διότι $\varphi\uparrow$!)

Πρόταση 12: Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ λεία καμπύλη, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ C^1, επί με $\varphi' > 0$ κ' $\delta = \gamma \circ \varphi$.

Τότε, δ λεία κ' $\|\delta\| = \|\gamma\|$.

Απόδειξη: $\forall s \in [c,d]$, $\delta'(s) = \varphi'(s)\gamma'(\varphi(s)) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ δ λεία.

Επιπλέον $\|\delta\| = \int_c^d \|\delta'(s)\| ds = \int_c^d \|\varphi'(s)\gamma'(\varphi(s))\| ds =$

$$\overset{(\varphi' > 0)}{=} \int_c^d \|\gamma'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds \overset{t = \varphi(s)}{=\!=} \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \|\gamma\|. \boxtimes$$

Σχόλιο: Η Πρόταση 12 μας εξασφαλίζει κάτι αναμενόμενο, δηλ. το ότι το μήκος μιας λείας καμπύλης δεν εξαρτάται από την οποιαδήποτε λεία αναπαραμέτρησή της. Αποδεικνύεται ότι η Πρόταση 12 ισχύει κι για τμημ. λείες καμπύλες.