Επιπρόσθετες ασκήσεις (επικαμπ. ολοκλ. στο επίπεδο).

(1) Να υπολογίσετε το $J=\int_\gamma (2x+e^y+y)\,dx+(xe^y+3x-y^3)\,dy$,

όπου $\gamma(t)=(\cos t, \sin t)$, $t\in[0,2\pi]$.

<u>Λύση:</u> γ απλή, κλειστή, θετικά προσανατολ. κ' λεία

κ' $\text{int}\,\gamma^* = \underline{\Omega} = \{(x,y): x^2+y^2<1\}$ = απλά συνεκτικό.

Εάν $P = 2x+e^y+y$, $Q = xe^y+3x-y^3$, τότε P, Q κλάσης C^1 στο $\mathbb{R}^2$.

Από Θ. Green, παίρνουμε

$$J = \iint_{\underline{\Omega}} (Q_x - P_y)\,dxdy = \iint_{\underline{\Omega}} (e^y+3-e^y-1)\,dxdy =$$

$$= 2\iint_{\Omega} dx\,dy = 2\,\text{Εμβ}(\Omega) = 2\pi\cdot 1^2 = \underline{\underline{2\pi}}.$$

---

(2) Να υπολογίσετε το $J = \int_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy)$, όπου

$P = 2x^4 + y^2 + e^x$, $\quad Q = 3x - y^3 - e^{y^2}$,

$\gamma(t) = (-1+\sqrt{2}\cos t,\ \sqrt{2}\sin t)$, $\quad t \in [0, 2\pi]$.

<u>Λύση:</u> $\operatorname{int}\gamma^* = \Omega = \{(x,y) : (x+1)^2 + y^2 < 2\} =$

$=$ απλά συνεκτικό

Θ-Green

$\Rightarrow$

$$J = \iint_{\underline{\Omega}} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint_{\underline{\Omega}} (3 - 2y)\,dx\,dy =$$

$$= 3\,\text{Εμβ}(\underline{\Omega}) - 2\underbrace{\iint_{\underline{\Omega}} y\,dx\,dy}_{A} = 3\pi\cdot(\sqrt{2})^2 - 2A = 6\pi - 2A.$$

Για τον υπολογισμό του A περνάω σε μετατοπισμ. πολικές

$$\left.\begin{aligned} x &= -1 + r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \xRightarrow{(x,y)\in\underline{\Omega}} \quad 0 \le r \le \sqrt{2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

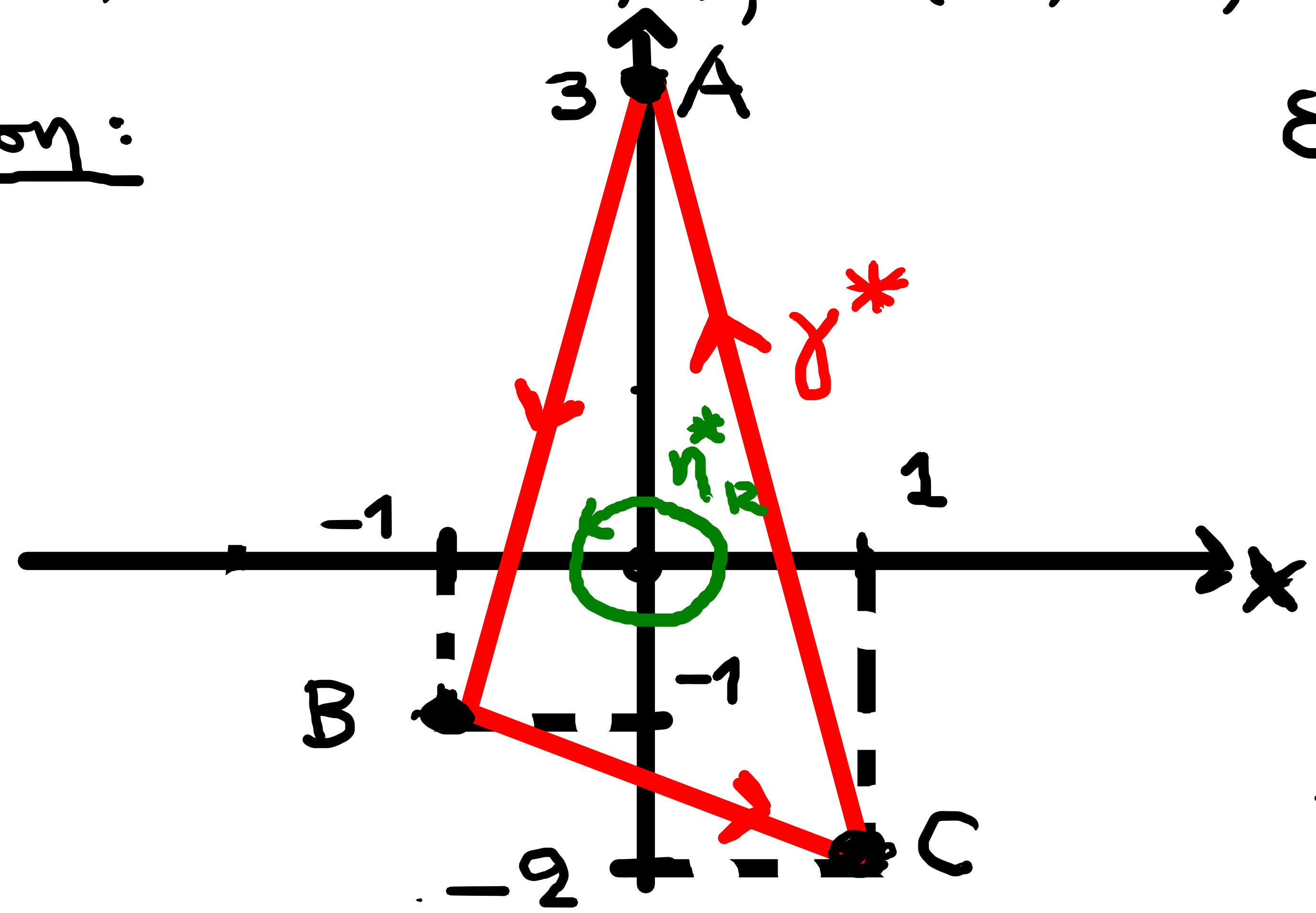
$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{J = 6\pi.}}$$

(3) Να υπολογ. το $J = \int_\gamma \left(\overbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}^{P}\,dx + \overbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}^{Q}\,dy\right)$, όπου

γ^* το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του τριγώνου

ΑΒΓ, όπου $A(0,3)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-2)$.

<u>Λύση:</u>



Επιλέγουμε θετικά προσανατολ. κύκλο

$\eta_R(t) = (R\cos t, R\sin t),\ t\in[0,2\pi]$

με $\eta_R^* \subset \mathrm{int}\,\gamma_R^*$

$\xrightarrow[\text{Παραμ.}]{\text{Αρχή }(+)}$ $J = \int_{\eta_R}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right) = 2\pi.$

$\boxed{(+)\ P_y = Q_x}$

(4) Έστω $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2<1\}$, $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ συνεχείς ώστε $u|_{\Omega}$, $v|_{\Omega}$ κλάσης C^1 κ'

$$u(x,y) = 1, \quad v(x,y) = y, \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega.$$

Θέτουμε $\vec{F} = (v, u)$, $\vec{G} = (u_x - u_y, v_x - v_y)$.

Να υπολογίσετε το $\iint_{\Omega} \vec{F}(x,y) \cdot \vec{G}(x,y)\,dx\,dy$.

Λύση:

$$\vec{F}\cdot\vec{G} = v(u_x - u_y) + u(v_x - v_y) = (u_x v + u v_x) - (u v_y + u_y v)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(uv) - \frac{\partial}{\partial y}(uv) \quad \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_{\underline{\Omega}} \vec{F} \cdot \vec{G} = \iint_{\underline{\Omega}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(uv) - \frac{\partial}{\partial y}(uv)\right] dx\,dy \overset{(\underline{\Theta}.\text{Green})}{=}$$

$$= \int_{\partial \underline{\Omega}} (uv\,dx + uv\,dy) = \int_{\partial \underline{\Omega}} (y\,dx + y\,dy),$$

όπου $\partial \underline{\Omega} = \gamma$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Άρα,

$$\iint_{\underline{\Omega}} \vec{F} \cdot \vec{G} = \int_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t) + \sin t \cdot \cos t]\,dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)-1}{2} dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2t) dt$$

$$= -\pi \quad \left(\text{αφού } \int_0^{2\pi} \cos(2t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt = 0\right).$$

---

(5) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό φραγμ. με σύνορο $\partial\Omega = \gamma$, όπου γ θετικά προσανατολισμένη, απλή, κλειστή, τμημ. λεία καμπύλη κ' $f, g : U \to \mathbb{R}$ κλάσης C^2, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό με $\overline{\Omega} \subset U$. Να δείξετε ότι (Τύπος του Green)

$$\iint_{\Omega} f \Delta g + \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g = \int_{\partial\Omega} (-f g_y \, dx + f g_x \, dy),$$

όπου $\Delta g = g_{xx} + g_{yy}$ = λαπλασιανή της g.

Λύση: $P = -f g_y$, $Q = f g_x$ κλάσης C^1 στο U.

$$\int_{\partial\Omega} (P\,dx + Q\,dy) \overset{(\Theta.\,\text{Green})}{=\!=} \iint_{\Omega} (Q_x - P_y)\, dx\,dy.$$

Έχουμε

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial x}(fg_x) = f_x g_x + f g_{xx},$$

$$P_y = -\frac{\partial}{\partial y}(fg_y) = -f_y g_y - f g_{yy}$$

$$\Rightarrow \quad Q_x - P_y = f(g_{xx} + g_{yy}) + f_x g_x + f_y g_y$$

$$= f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g$$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} f\Delta g + \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} (P\,dx + Q\,dy) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (-f g_y\,dx + f g_x\,dy). \qquad \boxtimes$$

(6) Να υπολογίσετε το $J = \int_\gamma x e^{-y^2} dx + \left(-x^2 y e^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}\right) dy$,

όπου γ ο θετικά προσανατολ. κύκλος $x^2+y^2=1$.

<u>Λύση:</u>

$$J = \int_\gamma \Big[\underbrace{x e^{-y^2}}_{P} dx + \underbrace{\left(-x^2 y e^{-y^2}\right)}_{Q} dy \Big] + \int_\gamma \frac{1}{x^2+y^2} dy$$

P, Q κλάσης C^1 στο $\mathbb{R}^2$ = απλά συνεκτικό

$$P_y = -2xy e^{-y^2}, \quad Q_x = -2xy e^{-y^2} \Rightarrow P_y = Q_x \text{ στο } \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow (P, Q)$ συντηρητικό

γ <u>κλειστή</u>! $\underset{\text{άρα}}{\Rightarrow}$ $\int_\gamma (P dx + Q dy) = 0$.

$\gamma: \; x=\cos t, \; y=\sin t, \quad t\in[0,2\pi]$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{1}\,dt = \sin t\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Άρα, $J=0$.

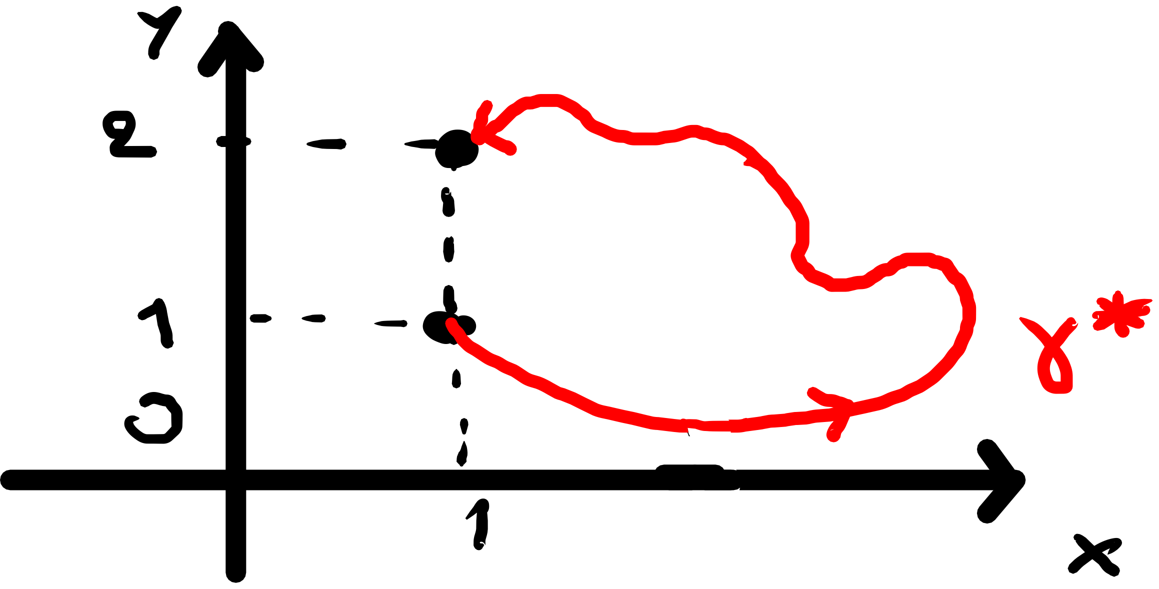
---

(7) Έστω $\Omega = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ κ' $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ με

$$P(x,y) = y\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad Q(x,y) = x\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y)\in\Omega.$$

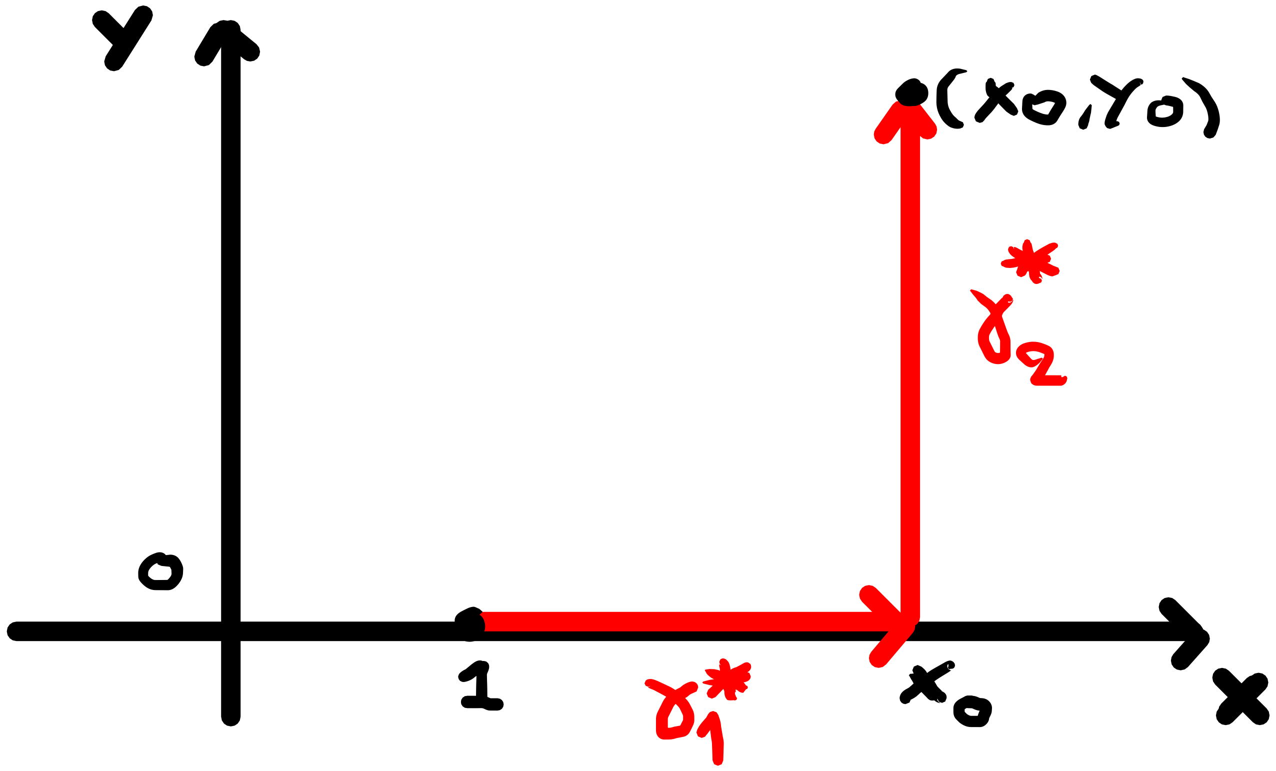
(i) Να δ.ο. το $\vec{F}=(P,Q)$ είναι συντηρητικό στο Ω κ, να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$.

(ii) Να υπολογίσετε το $\int_\gamma \vec{F}$, όπου γ η καμπύλη με ίχνος όπως στο σχήμα:



Λύση:

(i)



Επειδή το Ω **δεν** είναι απλά συνεκτικό, η σχέση $P_y = Q_x$ (που εδώ ισχύει) **δεν** εξασφαλίζει ότι το $\vec{F}=(P,Q)$ είναι συντηρητικό!

Θα πρέπει **απ' ευθείας** να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση δυναμικού $f:\Omega \to \mathbb{R}$. Μια "υποψήφια" τέτοια f ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x_0,y_0) = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F}, \quad (x_0,y_0)\in\Omega, \quad x_0 \neq 0,$$

όπου γ_1, γ_2 όπως στο σχήμα. Έχουμε

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_1} (P\,dx + Q\,dy) = \int_1^{x_0} P(x,0)\,dx = \int_1^{x_0} 0\,dx = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_{\gamma_2} (P\,dx + Q\,dy) = \int_0^{y_0} Q(x_0,y)\,dy = x_0 \int_0^{y_0} \frac{x_0^2 - y^2}{(x_0^2+y^2)^2}\,dy$$

$$\overset{(y = x_0 u)}{=} x_0 \int_0^{y_0/x_0} \frac{x_0^2(1-u^2)}{x_0^4(1+u^2)^2}\, x_0\,du = \int_0^{y_0/x_0} \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}\,du.$$

Αλλά

$$\int \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,du = -\frac{1}{2}\int u \left(\frac{1}{1+u^2}\right)' du = -\frac{u}{2(1+u^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow \int \left[\frac{1}{2(1+u^2)} - \frac{u^2}{(1+u^2)^2} \right] du = \frac{u}{2(1+u^2)} \Rightarrow$$

$$\int \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}\,du = \frac{u}{1+u^2} \quad , \quad \text{οπότε}$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \left.\frac{u}{1+u^2}\right|_0^{y_0/x_0} = \frac{x_0 y_0}{x_0^2+y_0^2}.$$

Άρα, $\displaystyle \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} = \frac{x_0 y_0}{x_0^2+y_0^2}$.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \underline{\Omega}$.

Επαληθεύεται (είναι απαραίτητο!) ότι

$$f_x = P, \quad f_y = Q.$$

(ii) Επειδή $\gamma^* \subset \Omega$ με άκρα $(1,1)$, $(1,2)$ κι' αφού $\vec{F} = \nabla f$,

έπεται ότι $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} = f(1,2) - f(1,1) = \frac{1\cdot 2}{1^2+2^2} - \frac{1\cdot 1}{1^2+1^2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{10}.$$

---

(8) Να υπολογίσετε το $\displaystyle J = \int_\gamma \left(-\frac{y}{9x^2+4y^2}dx + \frac{x}{9x^2+4y^2}dy \right)$, όπου

γ ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $x^2+y^2=1$.

Λύση:

Θα επιλέξουμε $R>0$ ώστε η καμπύλη (έλλειψη)

$$\gamma_R : 9x^2 + 4y^2 = R^2$$

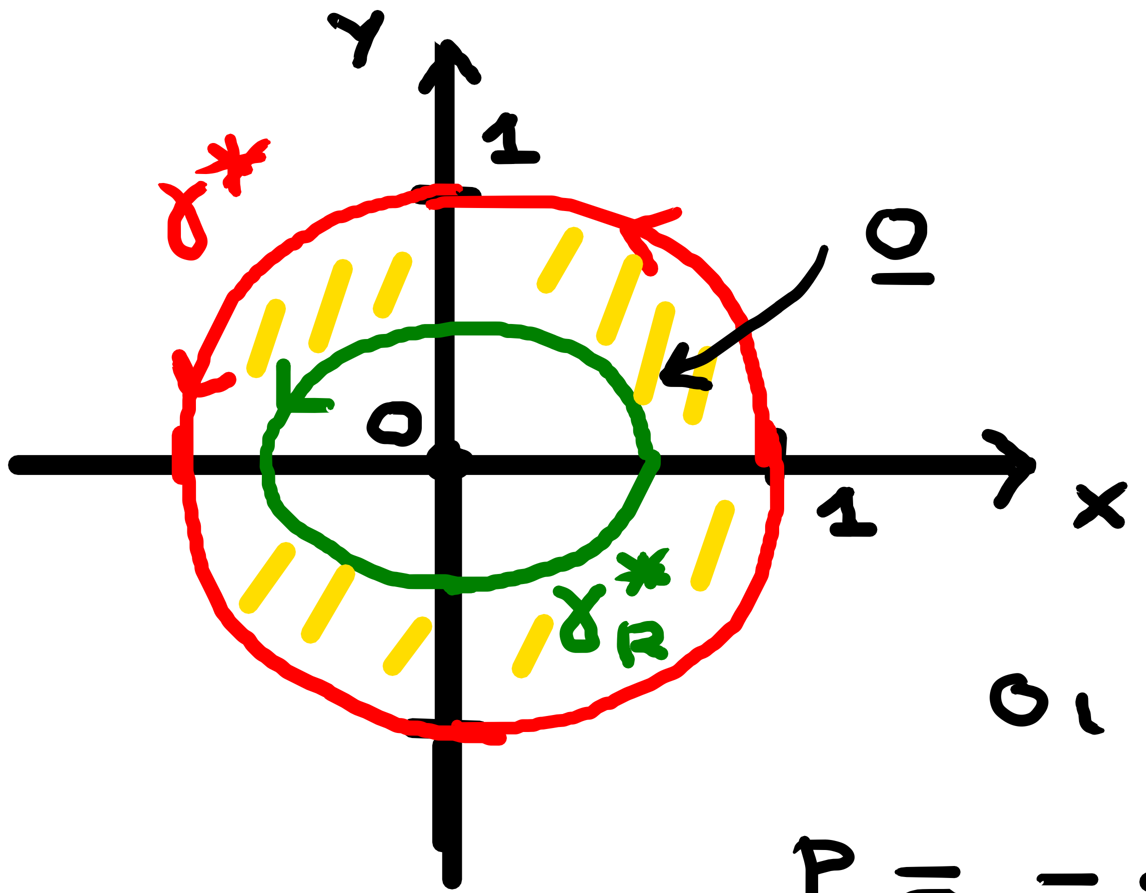
να βρίσκεται στο εσωτερικό της γ.

$$\forall (x,y) \in \gamma_R^* ,$$

$9x^2 \leq R^2 \Rightarrow x^2 \leq R^2/9$, $4y^2 \leq R^2 \Rightarrow y^2 \leq R^2/9$, οπότε

$$x^2 + y^2 \leq \frac{13}{36} R^2 .$$

Για $\frac{13}{36} R^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < R < \frac{6}{\sqrt{13}}$, παίρνουμε $\gamma_R^* \subset \operatorname{int} \gamma^*$.



Επιλέγουμε $0<R<6/\sqrt{13}$ κ'

θεωρούμε την θετικά προσανατολ. έλλειψη

$\gamma_R : 9x^2+4y^2=R^2 \; (\Rightarrow \gamma_R^* \subset \operatorname{int}\gamma^*)$.

Οι συναρτήσεις

$$P=-\frac{y}{9x^2+4y^2}, \qquad Q=\frac{x}{9x^2+4y^2}$$

είναι κλάσης C^1 στο πεδίο Ω που βρίσκεται μεταξύ των γ^*, γ_R^*. Επιπλέον,

$$P_y=Q_x \quad \text{στο } \Omega.$$

Πράγματι· θέτω $\varphi=9x^2+4y^2 \Rightarrow \varphi_x=18x,\ \varphi_y=8y$ κ'

$$P = -\frac{y}{\varphi} \Rightarrow P_y = -\frac{\varphi - y\varphi_y}{\varphi^2} = -\frac{9x^2+4y^2-8y^2}{\varphi^2} = \frac{4y^2-9x^2}{\varphi^2},$$

$$Q = \frac{x}{\varphi} \Rightarrow Q_x = \frac{\varphi - x\varphi_x}{\varphi^2} = \frac{9x^2+4y^2-18x^2}{\varphi^2} = \frac{4y^2-9x^2}{\varphi^2}.$$

Από την Αρχή της Παραμόρφωσης παίρνουμε

$$J = \int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \int_{\gamma_R^*} (P\,dx + Q\,dy) \qquad \kappa'$$

μια παραμέτρηση της $\gamma_R : 9x^2 + 4y^2 = R^2$ είναι η

$$x = x(t) = \frac{R}{3}\cos t, \quad y = y(t) = \frac{R}{2}\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} \left(-\frac{y}{9x^2+4y^2}\,dx + \frac{x}{9x^2+4y^2}\,dy \right) =$$

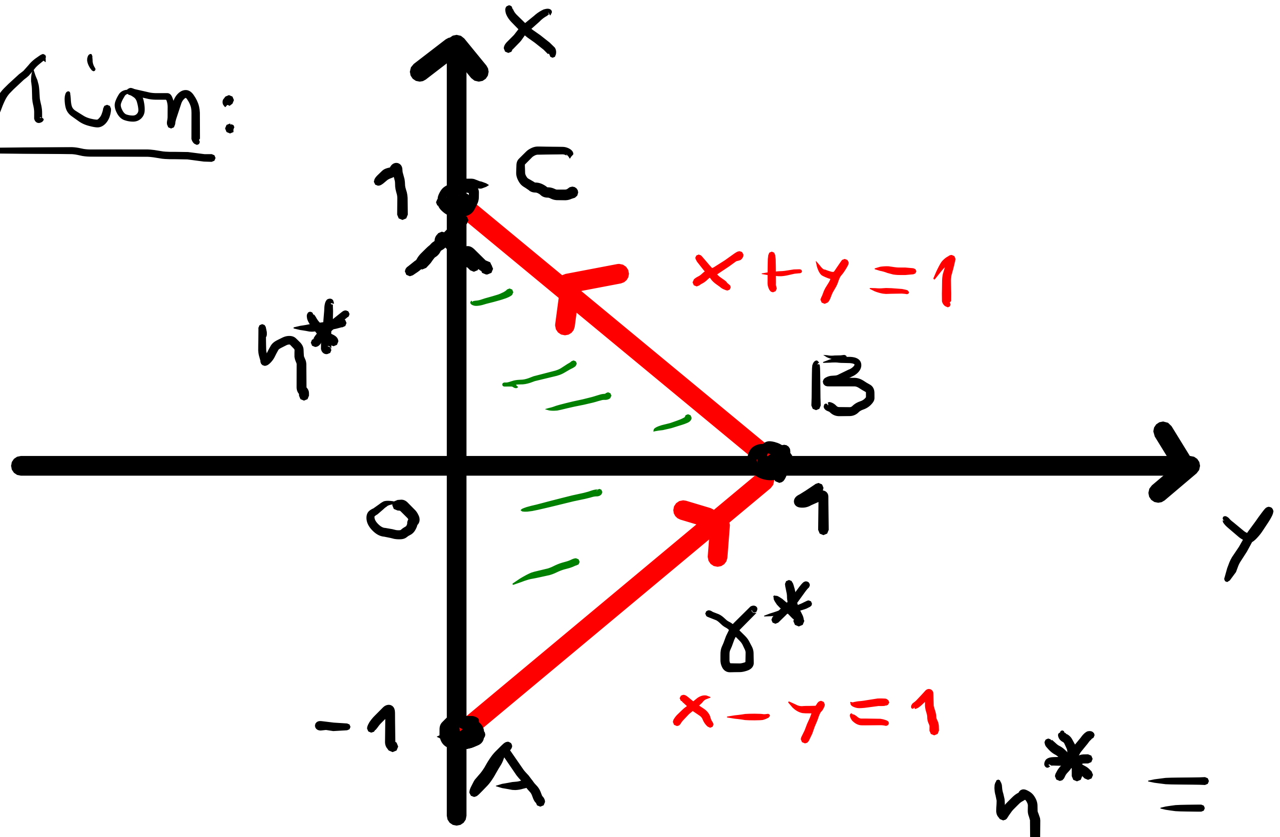
$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\frac{R}{2}\sin t \left(-\frac{R}{3}\sin t\right)}{R^2} + \frac{\frac{R}{2}\cos t \;\frac{R}{3}\cos t}{R^2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \pi/3 \quad \Rightarrow J = \pi/3.$$

(g) Να υπολογίσετε το $\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy)$, όπου

- $P = -3x^2 \sin(x^3)y - y^3$, $Q = \cos(x^3) + e^y$,
- γ η τεθλασμένη γραμμή ABC, όπου $A(0,-1)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$.

<u>Λύση:</u>



$P_y = -3x^2 \sin(x^3) - 3y^2$

$Q_x = -3x^2 \sin(x^3)$

$\Rightarrow$ $\underline{Q_x - P_y = 3y^2.}$

Θέτουμε $\Gamma = \gamma - \eta$, όπου

$\eta^* = \overrightarrow{AC}$. Η Γ είναι κλειστή, θετικά προσανατολ., τμηματικά λεία.

Από Θ. Green παίρνουμε

$$\int_{\Gamma=\gamma-\eta} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_{\triangle ABC} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} 3y^2\,dy \right) dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 3y^2\,dy \right) dx = 2\int_0^1 y^3\Big|_0^{1-x} dx = \frac{2}{4}\int_0^1 (1-x)^3\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^3\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(x-1)^4\Big|_0^1 = -\frac{1}{8}(0-1) = 1/8$$

$$\Rightarrow \int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) - \int_\eta (P\,dx + Q\,dy) = 1/8.$$

Αλλά, $\forall (x,y) \in \eta^* = \overrightarrow{AC}$, έχουμε $x=0$, $-1 \le y \le 1$, οπότε

$$\int_\eta P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{-1}^{1} Q(0,y)\,dy = \int_{-1}^{1} (1+e^y)\,dy =$$

$$= 2 + e^y \Big|_{-1}^{1} = 2 + e - 1/e.$$

Άρα, $\displaystyle\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = 2 + e - 1/e + 1/8 = e - 1/e + 17/8.$

---

(10) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου με σύνορο την καμπύλη

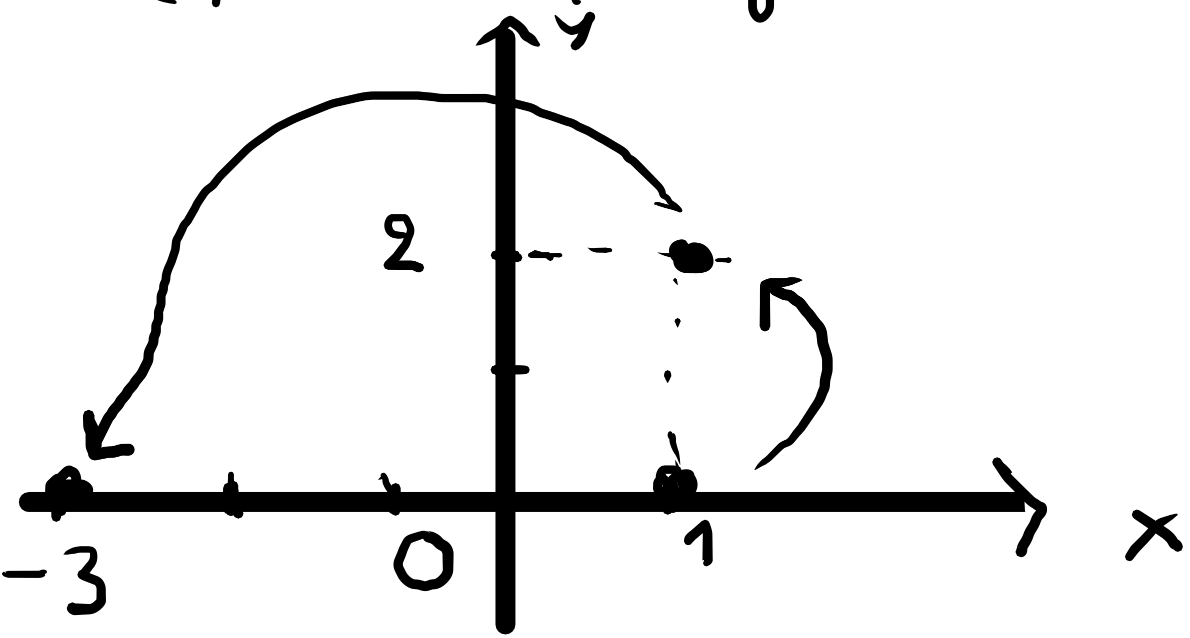
$\gamma: \ x = x(t) = 2\cos t - \cos 2t, \ \ y = y(t) = 2\sin t - \sin(2t), \ t \in [0, 2\pi].$

<u>Λύση</u>: Η γ είναι κλειστή κ' θετικά προσανατολ. διότι

$\gamma(0) = (1,0), \quad \gamma(\pi/2) = (1,2), \quad \gamma(\pi) = (-3,0), \quad \gamma(2\pi) = (1,0)$

οπότε $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ κ'

$(1,0)$ προηγ. του $(1,2)$, $(1,2)$ προηγ. του $(-3,0)$



$$E = \frac{1}{2}\int_{\gamma} (-y\,dx + x\,dy) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[x(t) y'(t) - y(t) x'(t) \right] dt$$

Έχουμε $\quad x(t) = 2\cos t - \cos 2t, \quad y(t) = 2\sin t - \sin 2t,$

$$x'(t) = -2\sin t + 2\sin(2t), \quad y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t),$$

$$\Rightarrow \quad x(t)y'(t) = 4\cos^2 t - 4\cos(2t)\cos t - 2\cos t\cos(2t) + 2\cos^2(2t)$$

$$= \underline{4\cos^2 t - 6\cos(2t)\cos t + 2\cos^2(2t)},$$

$$x'(t)y(t) = -4\sin^2 t + 2\sin t\sin(2t) + 4\sin(2t)\sin t - 4\sin^2(2t)$$

$$= \underline{-4\sin^2 t + 6\sin(2t)\sin t - 2\sin^2(2t)}$$

$$\Rightarrow x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = 6 - 6\left[\cos(2t)\cos t + \sin(2t)\sin t\right]$$

$$= 6 - 6\cos(2t - t) = 6 - 6\cos t, \quad \forall t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} \cdot 6 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\, dt = 3 \left(2\pi - \int_0^{2\pi} \cos t \, dt \right) = 6\pi .$$