3. ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΠΑΝΩ ΣΕ ΦΡΑΓΜΕΝΑ ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ ΤΟΥ $\mathbb{R}^2$.

3.1. Προαπαιτούμενα.

Ορισμός 3.1.1: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$.

(i) Ένα σημείο $\xi_0 \in A$ λέγεται εσωτερικό σημείο του A ανν $\exists\, r>0 \,|$

$$B(\xi_0, r) \subset A, \quad B(\xi_0, r) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|\xi - \xi_0\| < r\}.$$

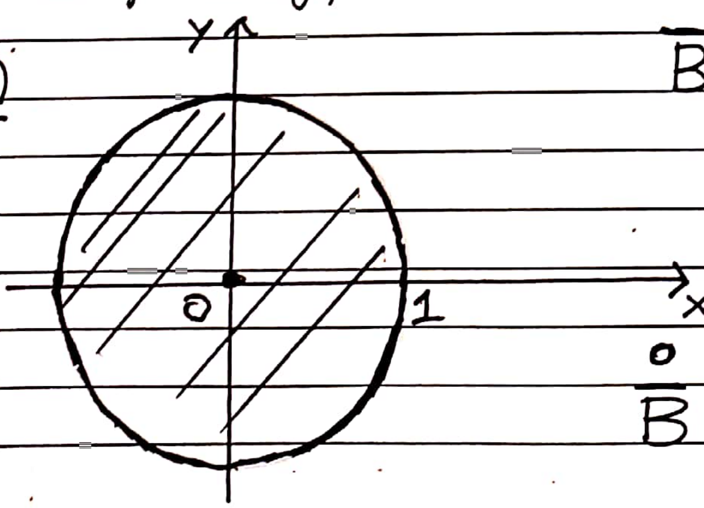
Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A συμβολίζεται με $\mathring{A}$ ή $\mathrm{Int}A$.

(ii) Το A λέγεται ανοικτό αν $\mathring{A} = A$.

(iii) Το A λέγεται κλειστό αν το $\mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι ανοικτό.

Παραδείγματα:

(i)



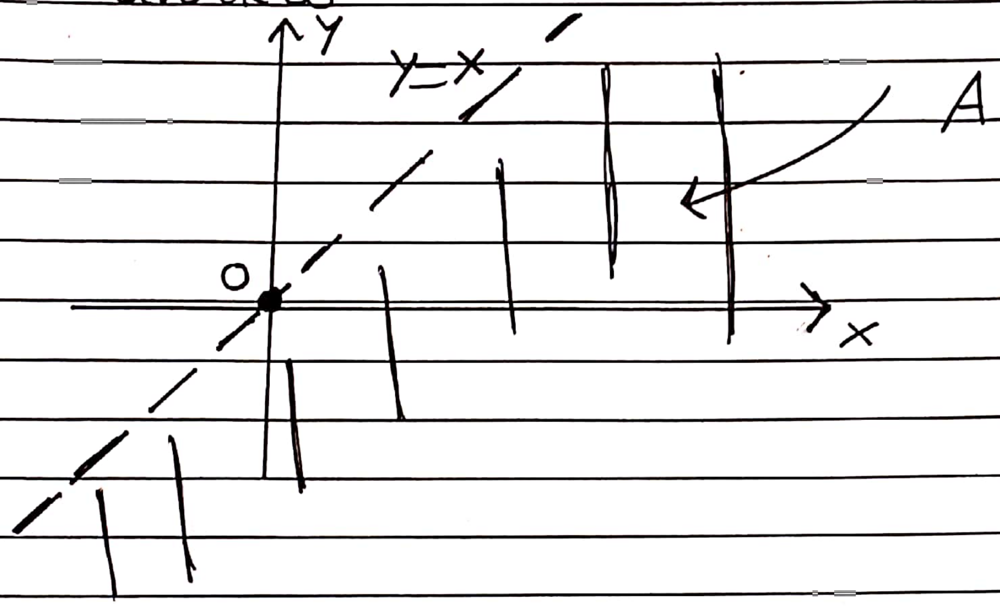
$\bar{B} = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$.

$\bar{B}$ = κλειστό

$\mathring{\bar{B}} = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 < 1\}$.

(ii) Εάν $S \subset \mathbb{R}^2$, το $\overset{\circ}{S}$ είναι ανοικτό.

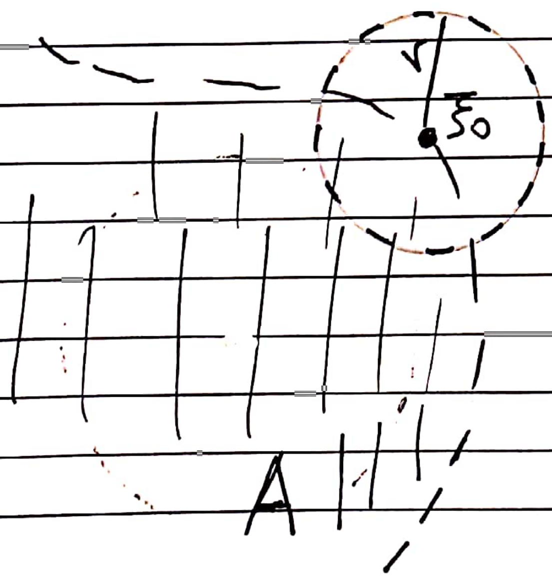
(iii) Το $A = \{(x,y) \mid y < x\}$ είναι ανοικτό.



Ορισμός 3.1.2: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$.

Το ξ_0 λέγεται συνοριακό σημείο του A ανν $\forall r > 0$,

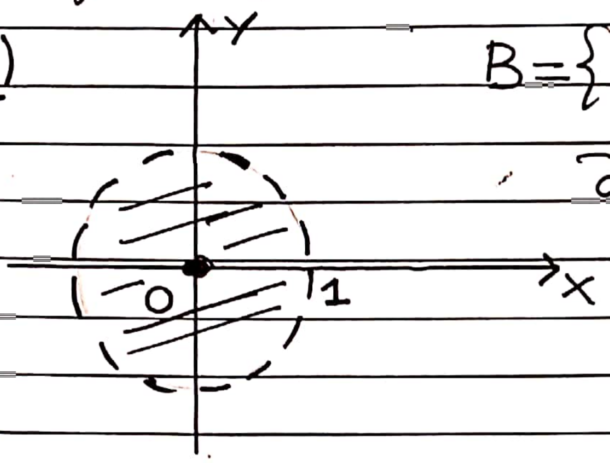
$$B(\xi_0, r) \cap A \neq \emptyset, \qquad B(\xi_0, r) \cap [\mathbb{R}^2 \setminus A] \neq \emptyset.$$



Το σύνολο των συνοριακών σημείων του A συμβολίζεται με ∂A.

Παραδείγματα:

(i)



$B=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}.$

$\partial B=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}.$

(ii) $A=\{(x,y) \mid y<x\}$, $\partial A=\{(x,y) \mid y=x\}$

Ορισμός 3.1.3: Έστω $A\subseteq \mathbb{R}^2$, $A\neq \emptyset$. Η κλειστότητα του A είναι το σύνολο

$$\overline{A}=\mathring{A}\cup \partial A.$$

Π.χ. Αν $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$, τότε

$$\overline{B}=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq 1\}.$$

Πρόταση 3.1.4: Έστω $A\subseteq \mathbb{R}^2$.

(i) $A\subset \overline{A}$ κ' $A=\overline{A}$ ανν A κλειστό.

(ii) Έστω $\xi_0\in \mathbb{R}^2$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) $\xi_0\in \overline{A}$.

(β) $\forall r>0$, $B(\xi_0,r)\cap A\neq \emptyset$.

(γ) $\exists (\xi_n)_{n\geq 1}\subset A \mid \|\xi_n-\xi_0\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής.

Το σύνολο
$$A=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ y\le\varphi(x)\}$$
είναι κλειστό.

Πράγματι· αρκεί να δ.ο.: $\overline{A}=A$ (Πρότ. 3.1.4(i)).

Έστω $(x_0,y_0)\in\overline{A}$. Λόγω της Πρότ. 3.1.4(ii)(γ),

$$\exists\{(x_n,y_n)\}_{n\geq1}\subset A \mid (x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|}(x_0,y_0)$$

δηλ.
$$a\le x_n\le b,\quad y_n\le\varphi(x_n),\quad n\geq1$$
κ'
$$x_n\to x_0,\quad y_n\to y_0.$$

Τότε, $x_0\in[a,b]$ κ' λόγω συνέχειας,
$$\varphi(x_n)\to\varphi(x_0)$$

$$\Longrightarrow\quad y_0\le\varphi(x_0).$$

<u>Πρόταση 3.1.5:</u> Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^2$ κ' $f:A\to\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

με
$$\tilde{f}(\xi)=\begin{cases} f(\xi), & \xi\in A\\ 0, & \xi\notin A.\end{cases}$$

<u>(i)</u> Εάν $\tilde{f}$ συνεχής στο $\xi_0\in A$, τότε κ' f συνεχής στο ξ_0.

<u>(ii)</u> Εάν f συνεχής στο $\xi_0 \in A \setminus \partial A$, τότε κ' $\tilde{f}$ συνεχής στο ξ_0.

<u>(iii)</u> Ισχύει ότι

$$\mathcal{A}(f) \subset \mathcal{A}(\tilde{f}) \subset \mathcal{A}(f) \cup \partial A,$$

όπου

$$\mathcal{A}(f) = \{\xi \in A \mid f \text{ ασυνεχής στο } \xi\},$$

$$\mathcal{A}(\tilde{f}) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid \tilde{f} \text{ ασυνεχής στο } \xi\}.$$

<u>Απόδειξη:</u> <u>(i)</u> Έστω $(\xi_n) \subset A$ με $\xi_n \to \xi_0$.
Αφού $\tilde{f}$ συνεχής στο ξ_0, ισχύει $\tilde{f}(\xi_n) \to \tilde{f}(\xi_0)$

$$\Longrightarrow \quad f(\xi_n) \to f(\xi_0).$$

<u>(ii)</u> $\xi_0 \in A \setminus \partial A \subseteq \bar{A} \setminus \partial A = \mathring{A}$

κ' <u>$\mathring{A}$ ανοικτό</u>.

Επιπλέον, $\tilde{f}|_{\mathring{A}} = f|_{\mathring{A}}$ συνεχής στο ξ_0

$$\xrightarrow{\mathring{A} \text{ ανοικτό}} \quad \tilde{f} \text{ συνεχής στο } \xi_0.$$

(iii) Έστω $\xi_0 \in A(\tilde{f}) \setminus \partial A$.

Έστω ότι $\xi_0 \notin A$. Τότε,

$$\xi_0 \notin A \cup \partial A \Rightarrow \xi_0 \notin \bar{A}$$

[Πρότ. 3.1.4(iii)] $\Longrightarrow$ $\exists r>0 \mid B(\xi_0, r) \cap A = \emptyset$

$$\Rightarrow B(\xi_0, r) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$$

$$\Rightarrow \xi_0 \in \overbrace{\mathbb{R}^2 \setminus A}^{o} = V = \text{ανοικτό}$$

κ' $\tilde{f}|_V = 0 =$ συνεχής

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ συνεχής στο ξ_0 (ΑΤΟΠΟ).

Άρα, $\xi_0 \in A \setminus \partial A \xrightarrow{(ii)} \xi_0 \in A(f)$.

Επομένως,

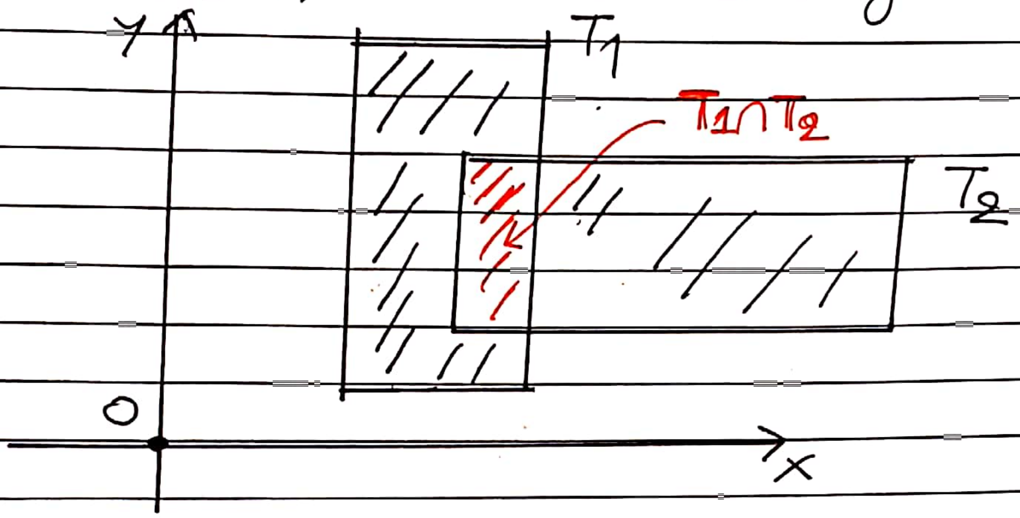
$$A(\tilde{f}) \setminus \partial A \subset A(f)$$

$$\Rightarrow A(\tilde{f}) \subset A(f) \cup \partial A.$$

$\boxtimes$

Τέλος, θα χρειαστούμε κάποιες επιπλέον ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος πάνω σε ορθογώνια.

<u>Πρόταση 3.1.6:</u> Εάν T_1, T_2 ορθογώνια με $\mathring{T}_1 \cap \mathring{T}_2 \neq \emptyset$, τότε $T_1 \cap T_2$ ορθογώνιο.



<u>Πρόταση 3.1.7:</u> Εάν T, T' ορθογώνια με $T' \subset T$ κ' $f: T \to \mathbb{R}$ ολοκλ., τότε κ' η $f|_{T'}: T' \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.

<u>Πρόταση 3.1.8:</u> Έστω $T, T_1, T_2, \dots, T_\nu$ ορθογώνια με $T = \bigcup_{j=1}^{\nu} T_j$, $\mathring{T}_i \cap \mathring{T}_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Έστω κ' $f: T \to \mathbb{R}$.

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) f ολοκλ. στο T

(ii) f ολοκλ. στα $T_1, T_2, \dots, T_\nu$.

Σ' αυτή την περίπτωση, $\iint_T f = \sum_{j=1}^{\nu} \iint_{T_j} f$

3-2. Διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 3-2-1: Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο με $A \neq \emptyset$, $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη κ' T ορθογώνιο με $A \subset T$.

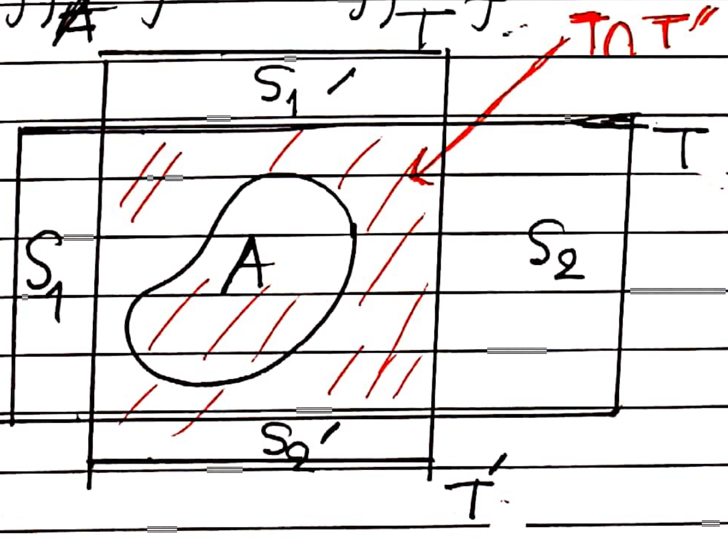
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \notin A. \end{cases}$$

Θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο A ανν η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο T.

Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\iint_A f = \iint_T \tilde{f}.$$



Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του T με $A \subset T$.

Πράγματι: έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο με $A \neq \emptyset$ κ' T, T' ορθογώνια με $A \subset \mathring{T}$, $A \subset \mathring{T}'$.

Υποθέτουμε ότι $\tilde{f}$ ολοκλ. στο T.

Τότε, $T \cap T'$ ορθογώνιο $\subset T$ (Πρότ. 3.1.6)

$\Rightarrow \tilde{f}$ ολοκλ. στο $T \cap T'$.

Αλλά, $\tilde{f}|_{S_1'} = \tilde{f}|_{S_2'} = 0$

$\Rightarrow \tilde{f}$ ολοκλ. στα S_1', S_2'.

Επειδή $T' = (T \cap T') \cup S_1' \cup S_2'$, με ξένα ανά δύο εσωτερικά, έχουμε ότι $\tilde{f}$ ολοκλ. στο T' κ'

$$\iint_{T'} \tilde{f} = \iint_{(T \cap T')} \tilde{f} + \underbrace{\iint_{S_1'} \tilde{f}}_{0} + \underbrace{\iint_{S_2'} \tilde{f}}_{0}.$$

(Πρότ. 3.1.8).

Επειδή $T = (T \cap T') \cup S_1 \cup S_2$ κ' $\tilde{f}|_{S_1} = \tilde{f}|_{S_2} = 0$, έχουμε όμοια

$$\iint_{T} \tilde{f} = \iint_{T \cap T'} \tilde{f} = \iint_{T'} \tilde{f}.$$

Σχόλιο: Με βάση τον Ορισμό 3.2.1, **10**

ενδέχεται για κάποιο $A \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο, οι σταθερές συναρτήσεις να μην είναι ολοκληρ. στο A.

Παράδειγμα: Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$

φραγμένο, ώστε το ∂A να μην έχει μέτρο 0.

[Π.χ. $A = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap T$, $T = [0,1] \times [0,1]$. Τότε, $\partial A = T$.]

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = 1, \quad (x,y) \in A,$$

T ορθογώνιο με $A \subset \mathring{T}$ κ' $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \notin A. \end{cases}$$

Τότε, η $\tilde{f}|_T$ είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $\partial A (\subset \bar{A} = A \subset T)$.

[Πράγματι: έστω $\xi_0 \in \partial A$. Τότε,

$\forall n \geq 1$, $\exists$ $\xi_n, u_n \in B(\xi_0, \frac{1}{n})$ |

$\xi_n \in A$, $u_n \notin A$,

οπότε

$\xi_n \to \xi_0$, $u_n \to \xi_0$, $\tilde{f}(\xi_n) = 1 \to 1$ $\nparallel$

$\tilde{f}(u_n) = 0 \to 0$.]

Επομένως,
$$\partial A \subset \mathcal{A}(\tilde{f}|_T)$$

$\Rightarrow$ το $\mathcal{A}(\tilde{f}|_T)$ δεν έχει μέτρο 0

[Θ. Lebesgue $\Rightarrow$ για ορθογ.] η $\tilde{f}|_T$ δεν είναι ολοκλ.

$\Rightarrow$ η $f = 1$ δεν είναι ολοκλ.!!

Προς αποφυγή τέτοιων καταστάσεων, εργαζόμαστε με σύνολα A ώστε $|\partial A| = 0$.

Ορισμός 3-2.2: Ένα φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται Jordan μετρήσιμο αν $|\partial A| = 0$.

Θεώρημα 3-2.2. (Θ. Lebesgue – Γενικό!)

Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordan μετρήσιμο φραγμένο κ' $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε,
$$f \text{ ολοκλ.} \Leftrightarrow |\mathcal{A}(f)| = 0,$$

όπου
$$\mathcal{A}(f) = \{\xi \in A \mid f \text{ ασυνεχής στο } \xi\}.$$

Απόδειξη:

Έστω T ορθογώνιο με $A \subset \overset{\circ}{T}$ κ' $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

με
$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \notin A. \end{cases}$$

→ Υποθέτουμε ότι $|\mathcal{A}(f)| = 0$.

Λόγω της Πρότασης 3.1.5 (iii),
$$\mathcal{A}(\tilde{f}|_T) \subset \mathcal{A}(f) \cup \partial A.$$

Επειδή $|\mathcal{A}(f)| = |\partial A| = 0$, έπεται ότι

$|\mathcal{A}(f) \cup \partial A| = 0 \Rightarrow |\mathcal{A}(\tilde{f}|_T)| = 0$

$\xrightarrow[\text{για φραγ.}]{\text{[Θ. Lebesgue}}$] $\tilde{f}|_T$ ολοκληρ.

$\Rightarrow f$ ολοκληρ. στο A.

→ Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι f ολοκλ. στο A.

Τότε, $\tilde{f}|_T$ ολοκληρ. στο T

$\xrightarrow[\text{για φραγ.}]{\text{[Θ. Lebesgue}}$] $|\mathcal{A}(\tilde{f}|_T)| = 0$

Αλλά λόγω Πρότ. 3.1.5 (iii),
$$\mathcal{A}(f) \subset \mathcal{A}(\tilde{f}|_T)$$

$$\Rightarrow |\mathcal{A}(f)| = 0. \qquad \boxtimes$$

Πόρισμα 3.2.3: Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο Jordan μετρήσιμο με $A \neq \emptyset$ κ' $f : A \to \mathbb{R}$ φραγμένη, συνεχής.

Τότε, f ολοκληρώσιμη.

Ειδικότερα, αν A κλειστό, φραγμένο Jordan μετρ. κ' $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε f ολοκληρ.

Ορισμός 3.2.4: Έστω A μη κενό, φραγμένο, Jordan μετρήσιμο $\subset \mathbb{R}^2$.

Εμβαδό του A είναι το $\iint_A 1\,dx\,dy = |A|$.

Οι ιδιότητες των ολοκληρ. συναρτήσεων πάνω σε ορθογώνια, επεκτείνονται στις ολοκληρ. συναρτήσεις πάνω σε φραγμένα χωρία.

Πρόταση 3.2.4: Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ μη κενό, φραγμένο κ' $f, g : A \to \mathbb{R}$ ολοκληρ. ώστε το σύνολο $\{\xi \in A \mid f(\xi) \neq g(\xi)\}$ έχει μέτρο 0. Τότε,

$$\iint_A f = \iint_A g.$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω T ορθογώνιο με $A \subset \overset{\circ}{T}$ κ' $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}|_A = f$, $\tilde{g}|_A = g$, $\tilde{f} = \tilde{g} = 0$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Τότε, $\{\xi \in T \mid \tilde{f}(\xi) \neq \tilde{g}(\xi)\} \subset$

$\subset \{\xi \in A \mid f(\xi) \neq g(\xi)\} =$

$=$ μέτρου 0

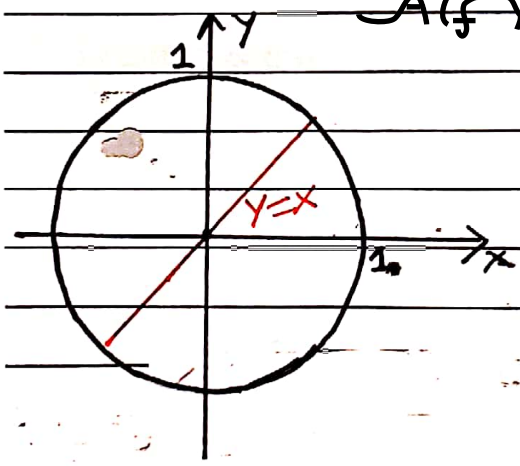
$$\xRightarrow{[\Theta.2.5]} \iint_T \tilde{f} = \iint_T \tilde{g} \Rightarrow \iint_A f = \iint_A g.$$

$\boxtimes$

<u>Παράδειγμα:</u> $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$,

$f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ e^{y^3}, & x = y. \end{cases}$

$\underbrace{\{(x,y) \mid f(x,y) \neq 1\}}_{A(f)} \subset \{(x,y) \mid y = x\} =$ "$\in$" $=$ μέτρου 0



$\xRightarrow{[\text{Πρότ.}3.2.4] + \Theta.\text{Leb.}}$ f ολοκλ. κ' $^{(*)}$

$$\iint_A f = \iint_A 1 = \text{Εμβαδό}(A) = \pi.$$

$(*)$ A Jordan μετρ. διότι

$\partial A =$ κύκλος $=$ μέτρου 0

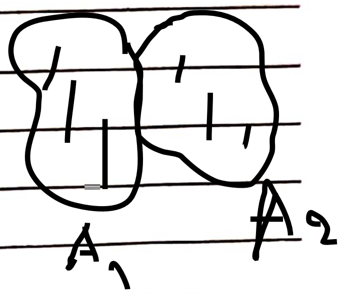
Πρόταση 3.2.5:

Έστω $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$ μη κενά φραγμένα Jordan μετρήσιμα κ' $f: A = A_1 \cup A_2 \to \mathbb{R}$, $\mathring{A}_1 \cap \mathring{A}_2 = \emptyset$.

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) f ολοκληρ. στο A

(ii) f ολοκληρ. στα A_1, A_2.



Σ' αυτή την περίπτωση,

$$\iint_A f = \iint_{A_1} f + \iint_{A_2} f.$$

Πρόταση 3.2.6: Αν $A \subset \mathbb{R}^2$ μη κενό φραγμένο, $f: A \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη κ' $\emptyset \neq B \subset A$, τότε κ' $f|_B$ ολοκληρώσιμη.

Πρόταση 3.2.7: Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ μη κενό, φραγμένο, $f, g: A \to \mathbb{R}$ ολοκληρ. κ' $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε:

(i) $\lambda f + \mu g$ ολοκληρ. και

$$\iint_A (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_A f + \mu \iint_A g.$$

(ii) $f \cdot g$ ολοκληρ.

(iii) $|f|$ ολοκληρ. κ'

$$\left| \iint_A f \right| \leq \iint_A |f|.$$

(iv) Εάν $f \leq g$, τότε $\iint_A f \leq \iint_A g$.

Πρόταση 3.8: Έστω A μη κενό φραγμένο, Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ κ' $f : \bar{A} \to \mathbb{R}$ ολοκληρ. Τότε,

$$\iint_{\bar{A}} f = \iint_{A^{o}} f = \iint_A f.$$

(γενίκευση της Πρότ 3.5)

Πρόταση 3.9: Έστω A_1, A_2 μη κενά φραγμένα και Jordan μετρήσιμα $\subset \mathbb{R}^2$

και f ολοκληρώσιμη στα A_1, A_2. Τότε,

$$\iint_{A_1 \cup A_2} f = \iint_{A_1} f + \iint_{A_2} f - \iint_{A_1 \cap A_2} f.$$

Ειδικότερα, αν $f \geq 0$, τότε

$$\iint_{A_1 \cup A_2} f \leq \iint_{A_1} f + \iint_{A_2} f.$$