ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ
ΣΕΜΦΕ, Ε.Μ.Π.
06/09/2021
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 90′

ΘΕΜΑ 1 (2,5 μ.): Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int\int_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy,$$

όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2y, \ \ y \geq 1/2\}$.

ΘΕΜΑ 2 (2,5 μ.): Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{-y}{9x^2+4y^2}\,dx + \frac{x}{9x^2+4y^2}\,dy,$$

όπου γ ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $x^2+y^2=1$.

ΘΕΜΑ 3 (2,5 μ.): Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x,y,z) = (x,x,y), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Με χρήση του Θ. Stokes να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C \vec{F}$, όπου C το θετικά προσανατολισμένο σύνορο (χείλος) του τμήματος της επιφάνειας του επιπέδου $z = 10+2x+5y$ που αποκόπτει ο κύλινδρος $x^2+y^2=1$.

ΘΕΜΑ 4 (2,5 μ.): Με χρήση του Θ. Gauss, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από την επιφάνεια

$$S : \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

με

$$S(u,w) = (\ \cos u \cos w, \ \cos u \sin w, \ \sin(2u)\ ), \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right], \ w \in [0,2\pi].$$

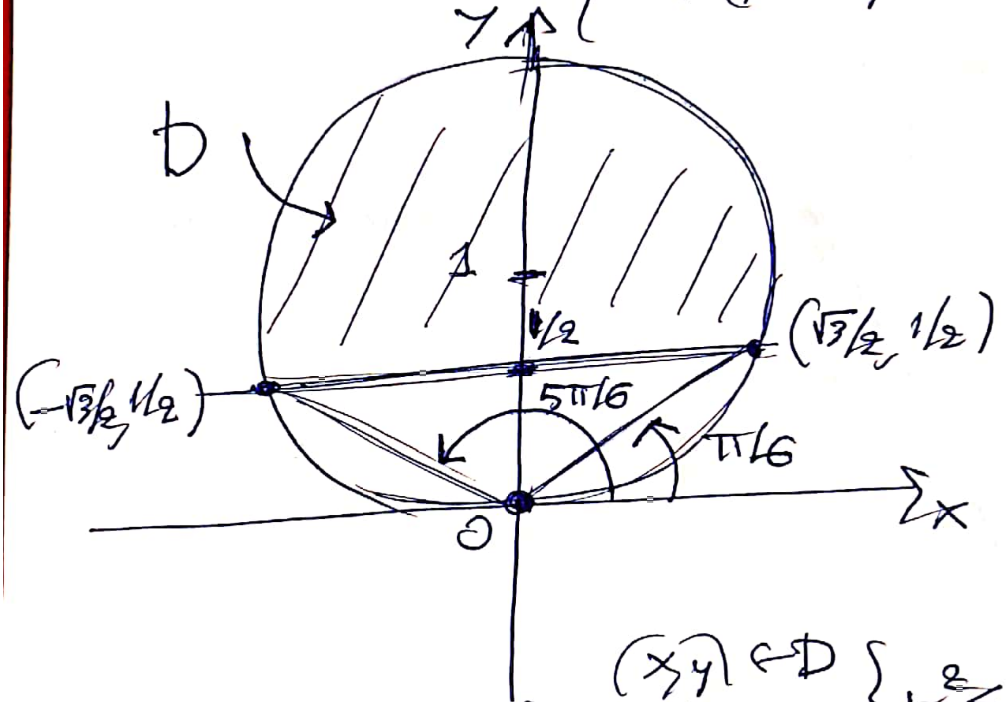
[*Υπόδειξη:* Να παρατηρήσετε ότι $\operatorname{div} \vec{F} = 1$, όπου $\vec{F} = (0,0,z)$.]

ΛΥΣΕΙΣ

Θ-1:

$\forall (x,y) \in D, \quad x^2+y^2 \leq 2y, \ y \geq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left\{ x^2+(y-1)^2 \leq 1, \quad y \geq \frac{1}{2} \right\}$



$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \quad (x,y) \in D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r^2 \leq 2r\sin\varphi, \ r\sin\varphi \geq \frac{1}{2} \\ \pi/6 \leq \varphi \leq 5\pi/6 \end{array} \right\}$

$\Leftrightarrow \quad r \leq 2\sin\varphi, \ r \geq \frac{1}{2\sin\varphi}$

$\& \quad \varphi \in [\pi/6, 5\pi/6]$

$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(\int_{\frac{1}{2\sin\varphi}}^{2\sin\varphi} \frac{r^2\sin\varphi}{r^2}\,dr \right) d\varphi$$

$$= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin\varphi \left(2\sin\varphi - \frac{1}{2\sin\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(2\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) d\varphi$$

$$= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(1 - \cos(2\varphi) - \frac{1}{2}\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) - \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \cos(2\varphi)\, d\varphi$$

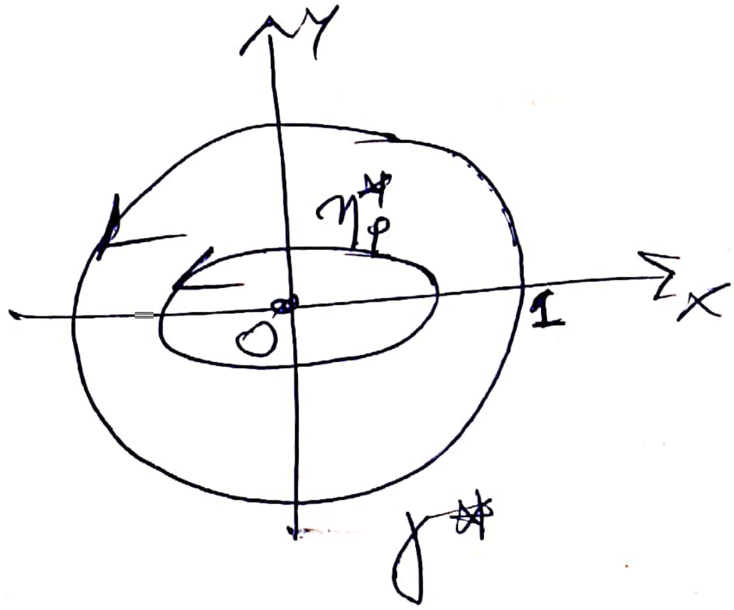
$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Θ. 2



Μέσω, θεωρούμε την θετικά προσανατολ. έλλειψη $\eta_\rho : 9x^2+4y^2=\rho^2$.

Επιλέγουμε $\rho>0$ | $\eta_\rho^* \subset \operatorname{int}\gamma^*$.

Θέτουμε $P(x,y) = -\dfrac{y}{\underbrace{9x^2+4y^2}_{\varphi}}$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{\underbrace{9x^2+4y^2}_{\varphi}}$

$$P = -y/\varphi \Rightarrow P_y = -\frac{\varphi - y\varphi_y}{\varphi^2} = \frac{y\varphi_y - \varphi}{\varphi^2}$$

$$= \frac{y\,8y - 9x^2 - 4y^2}{\varphi^2} =$$

$$= \frac{-9x^2+4y^2}{\varphi^2},$$

$$Q = x/\varphi \Rightarrow Q_x = \frac{\varphi - x\varphi_x}{\varphi^2} =$$

$$= \frac{9x^2+4y^2-18x^2}{\varphi^2} = \frac{-9x^2+4y^2}{\varphi^2} = P_y$$

4

Από Λεξη Παραμόρφωσης,

$$\oint_{\gamma}(Pdx+Qdy)=\oint_{\eta_\rho}(Pdx+Qdy)$$

$$\eta_\rho(t)=\rho\left(\frac{\cos t}{3},\ \frac{\sin t}{2}\right),\ t\in[0,2\pi]$$

$$\left[\frac{x^2}{\left(\frac{\rho}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2}=1\right.$$

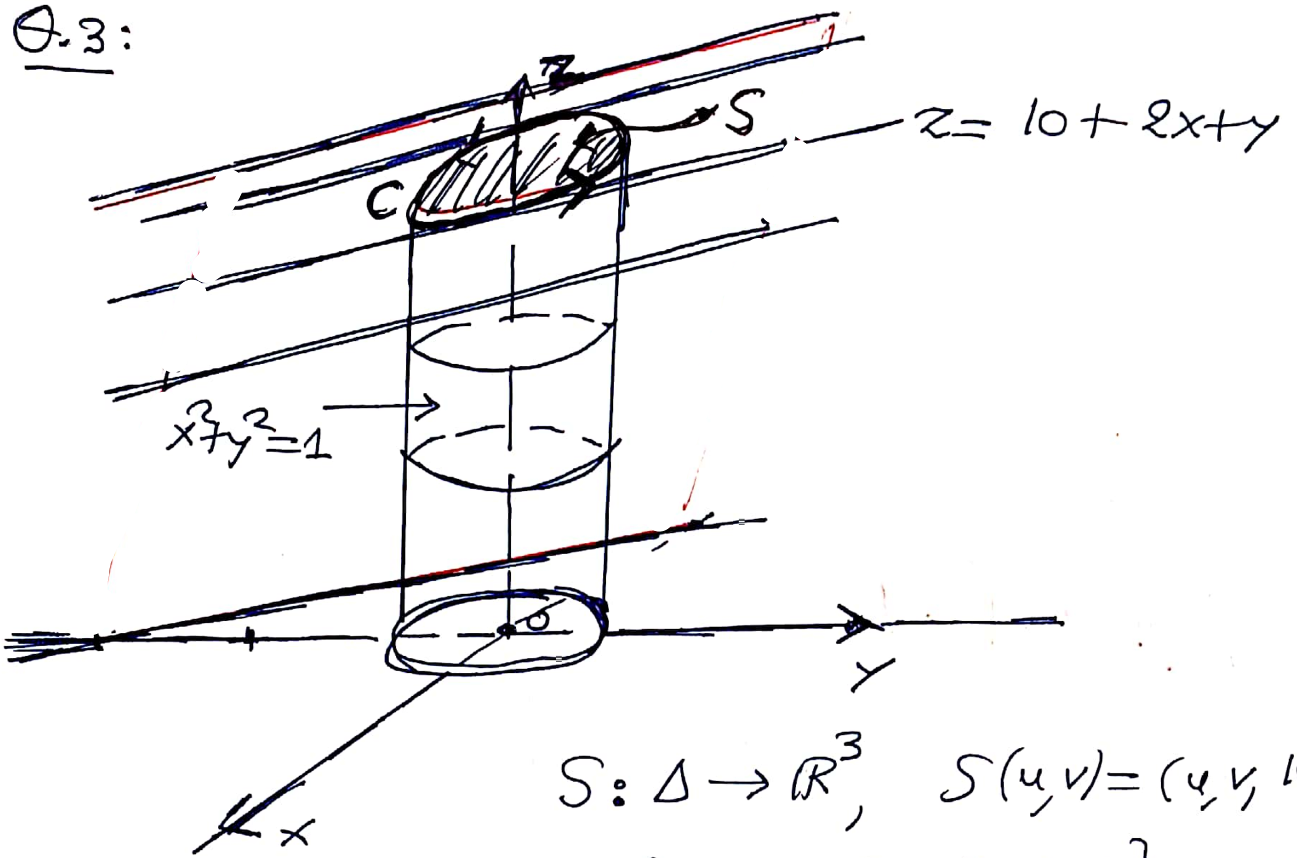
$$\left.x=\frac{\rho}{3}\cos t,\ y=\frac{\rho}{2}\sin t\ \right]$$

$$\rightarrow\oint_{\gamma}(Pdx+Qdy)=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-\rho\frac{\sin t}{2}\left(-\rho\frac{\sin t}{3}\right)+\frac{\rho\cos t}{3}\frac{\rho}{2}\cos t}{\rho^2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{6}dt=\pi/3$$

Θ.3:



$$S: \Delta \to \mathbb{R}^3, \quad S(u,v) = (u, v, 10+2u+v)$$

$$\Delta = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}$$

$$S_u \times S_v = (-2, -1, 1)$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & x & y \end{vmatrix} = (1, 0, 1)$$

$$S(u,v)\cdot(S_u \times S_v) = -2u - v + 10 + 2u + v$$
$$= 10 > 0$$

$\Rightarrow$ $S_u \times S_v$ «δείχνει» προς τα έξω

$$\Rightarrow \vec{n}(u,v) = S_u \times S_v = (-2, -1, 1)$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} = \iint_\Delta \operatorname{rot}\vec{F}(S(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v)\, du\, dv =$$

$$= \iint_\Delta (1,0,1)\cdot(-2, -1, 1)\, du\, dv = -\iint_\Delta du\, dv$$

$$= -\pi$$

Θ.4: Ο ζητούμενος όγκος ισούται με

$$\iiint_V dx dy dz = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, dx dy dz \overset{(Gauss)}{=} \text{ροή του } \vec{F} \text{ μέσω της } S$$

$$= \pm \oiint_S \vec{F} = \pm \iint_\Delta \vec{F}(S(u,w)) \cdot (S_u \times S_w)\, du dw$$

$$= \pm \iint_\Delta \sin(2u)\, z(u,w)\, du dw$$

όπου $z(u,w)$ η κατηγορία του $S_u \times S_w$.

Είναι

$$S_u \times S_w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin u \cos w & -\sin u \sin w & 2\cos(2u) \\ -\cos u \sin w & \cos u \cos w & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (--, \; ---, \; \underbrace{-\sin u \cos u}_{z(u,w)})$$

$$\Rightarrow \iint_\Delta \sin(2u)\, z(u,w)\, du dw =$$

$$= -\iint_{\Delta} \sin(2u)\sin u\cos u\,du\,dv$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(2u)\,du\right]dv$$

$$= -\pi\int_0^{\pi/2} 2\sin^2(2u)\,du = -\pi\int_0^{\pi/2}[1-\cos(4u)]\,du$$

$$= -\pi\left[\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2}\cos(4u)\,du\right] = -\pi^2/2.$$

Άρα, ο ζητούμενος όγκος $= \pi^2/2$