

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ -ΣΕΜΦΕ, Ε.Μ.Π.
02/02/2021

ΕΝΑΡΞΗ: 15:00 - ΛΗΞΗ ΥΠΟΒΟΛΗΣ: 16:45

Να αναρτήσετε ένα ενιαίο αρχείο pdf με σκαναρισμένες χειρόγραφες λύσεις στο εργαλείο ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.
ΟΝΟΜΑ ΑΡΧΕΙΟΥ: ΤΟ ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΣΑΣ.

ΟΜΑΔΑ Α

ΑΦΟΡΑ ΜΟΝΟ ΤΟΥΣ ΦΟΙΤΗΤΕΣ ΜΕ Α.Μ. ΠΟΥ ΛΗΓΕΙ
ΑΠΟ 0 ΕΩΣ 4.

ΘΕΜΑ 1 (2 μ.): Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int \int_D \sin\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx dy,$$

όπου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq 1-x\}$.
(Υπόδειξη: Θέτουμε $u = y-x$, $v = y+x$.)

ΘΕΜΑ 2 (2 μ.): Εφαρμόζοντας κατάλληλα το Θ. Green, να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} (\sin x - y^3 + e^y) dx + (x^3 + xe^y) dy,$$

όπου $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

ΘΕΜΑ 3 (2 μ.): Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xy + z - 1, x^2 + 2yz^2, 2y^2z + x - 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Να προσδιορίσετε βαθμωτή συνάρτηση Φ κλάσης C^2 τέτοια ώστε $\nabla\Phi = \vec{F}$, παρουσιάζοντας αναλυτικά τη διαδικασία που θα ακολουθήσετε. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} \vec{F}$, όπου

$$\gamma(t) = \left(\frac{t}{4}, \frac{t \cos t}{4}, t^{8/3} \sin t \right), \quad t \in [0, 4\pi].$$

ΘΕΜΑ 4 (2 μ.): Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(e^z, \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{3/2}, \cos(y^2) \right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Να υπολογίσετε τη ροή του \vec{F} διαμέσου της επιφάνειας που είναι το σύνορο του στερεού

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

(Υπόδειξη: Θεώρημα Gauss.)

ΘΕΜΑ 5 (2 μ.): Δίνεται διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = (3z^2 e^{z^3+y^2}, x^2, -y^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F}$, όπου C το θετικά προσανατολισμένο χείλος (σύνορο) του τμήματος της επιφάνειας του επιπέδου $z = y+1$ που αποκόπτει ο ελλειπτικός κώνος $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$.

(Υπόδειξη: Θεώρημα Stokes.)

Θ.1: Θέτουμε $u = y - x, v = y + x$

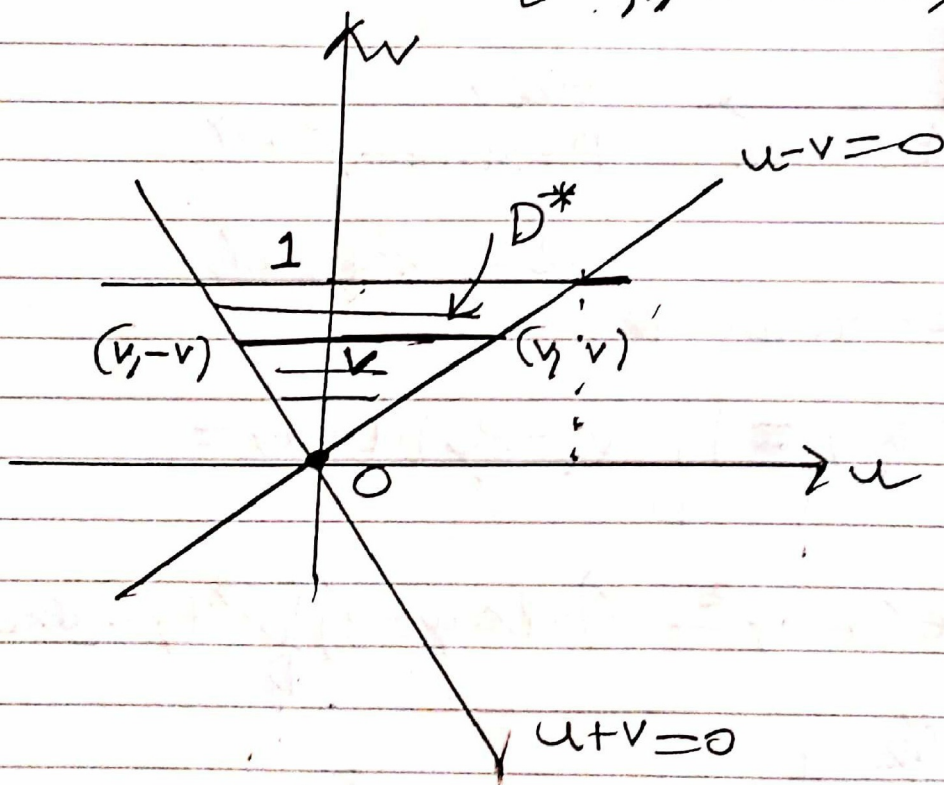
$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{u+v}{2} \\ x = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

Για $(x, y) \in D$, έχουμε $x \geq 0 \Rightarrow \underline{u - v \leq 0}$
 $y \geq 0 \Rightarrow \underline{v \leq 1}$

$y \geq 0 \Rightarrow \underline{u + v \geq 0}$

\Rightarrow το D μετασχηματίζεται στο κωβείο

$$D^* = \{ (u, v) : u - v \leq 0, u + v \geq 0, v \leq 1 \}$$



$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$= -1/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_D \sin\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx dy = \iint_{D^*} \sin\left(\frac{u}{v}\right) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{D^*} \sin\left(\frac{u}{v}\right) du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-v}^v \sin\left(\frac{u}{v}\right) du \right) dv$$

(2)

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 -v \cos\left(\frac{u}{v}\right) \Big|_{u=-v}^v dv$$

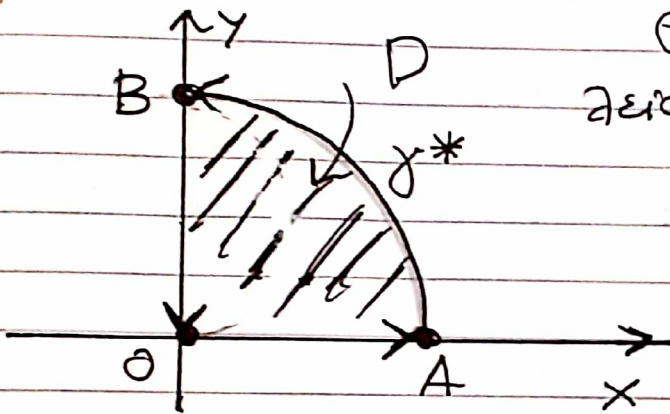
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 v [\cos 1 - \cos(-1)] dv = 0.$$

~~$$= - \left(\int_0^1 v dv \right) \cos 1 = - \frac{1}{2} \cos 1.$$~~



Θέμα 2:

θέμα προσαρ.



Θεωρείτε την ελλειψη Γ με άξονα καμπύλων

$$\Gamma = \gamma + \vec{BO} + \vec{OA}$$

Εάν

$$P = \sin x - y^3 + e^y,$$

$$Q = x^3 + x e^y,$$

από Θ. Green παίρνουμε

$$\int_{\Gamma} (P dx + Q dy) = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy =$$

$$= \iint_D (3x^2 + e^y + 3y^2 - e^y) dx dy = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \rho \\ y &= r \sin \rho \end{aligned} \quad 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 dr d\rho = \frac{3\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} (P dx + Q dy) = \frac{3\pi}{8} - \int_{\vec{BO}} (P dx + Q dy) - \int_{\vec{OA}} (P dx + Q dy)$$

(3)

$$= \frac{3\pi}{8} + \int_{\vec{OB}} (Pdx + Qdy) - \int_{\vec{OA}} (Pdx + Qdy).$$

Αλλά, για $(x,y) \in \vec{OB}$, έχουμε $x=0, y \in [0,1]$

$$\text{κ' } Q(x,y) = Q(0,y) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{OB}} (Pdx + Qdy) = 0$$

κ' για $(x,y) \in \vec{OA}$, έχουμε $y=0, x \in [0,1]$

$$\Rightarrow P(x,y) = P(x,0) = \sin x + 1$$

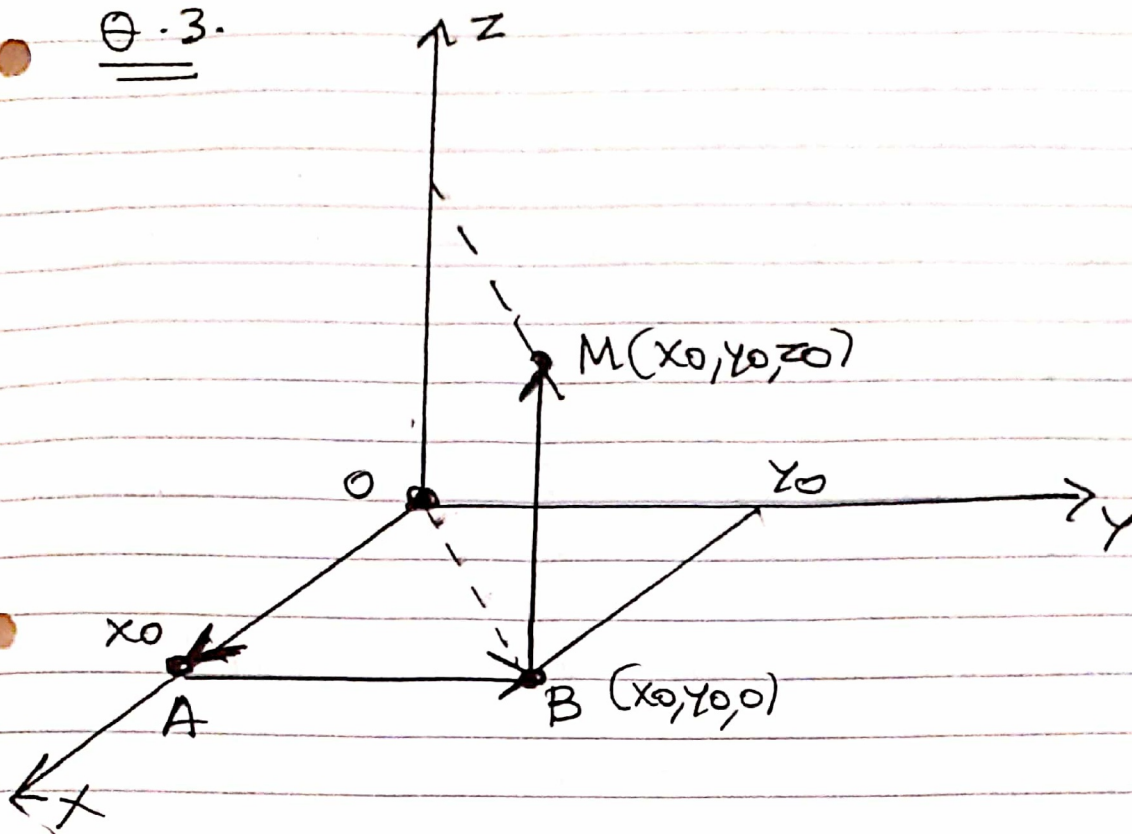
$$\Rightarrow \int_{\vec{OA}} (Pdx + Qdy) = \int_0^1 (\sin x + 1) dx$$

$$= 1 - \cos 1 + 1 = \underline{2 - \cos 1}.$$

$$\text{Άρα, } \int_{\gamma} (Pdx + Qdy) = \boxed{\frac{3\pi}{8} - 2 + \cos 1}.$$



θ.3.



Έστω $M(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $A(x_0, 0, 0)$, $B(x_0, y_0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Θεωρούμε την καμπύλη $\Gamma = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BM}$.

• Για $(x, y, z) \in \vec{OA}$, έχουμε $y = z = 0$, $x \in [0, x_0]$

$$\Rightarrow \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x, 0, 0) = (-1, x^2, x) \text{ ή } dy = dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{OA}} \vec{F} = \int_0^{x_0} (-1) dx = -x_0.$$

• Για $(x, y, z) \in \vec{AB}$, έχουμε $x = x_0$, $y \in [0, y_0]$, $z = 0$

$$\Rightarrow dx = dz = 0 \text{ ή } \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x_0, y, 0) = (2x_0y - 1, x_0^2, x_0) \Rightarrow$$

(5)

$$\Rightarrow \int_{\vec{AB}} \vec{F} = \int_0^{y_0} x_0^2 dy = \underline{x_0^2 y_0}.$$

• Για $(x, y, z) \in \vec{BM}$, έχουμε $x = x_0, y = y_0, z \in [0, z_0]$

$$\Rightarrow dx = dy = 0 \text{ ή } \vec{F}(x_0, y_0, z) =$$

$$= (2x_0 y_0 + z - 1, x_0^2 + 2y_0 z^2, 2y_0^2 z + x_0 - 2z)$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{BM}} \vec{F} = \int_0^{z_0} 2z(y_0^2 - 1) dz + x_0 z_0$$

$$= \underline{z_0^2(y_0^2 - 1) + x_0 z_0}$$

$$\text{Άρα, } \int_{\gamma} \vec{F} = -x_0 + x_0^2 y_0 + z_0^2(y_0^2 - 1) + x_0 z_0$$

\Rightarrow μια συνάρτηση δυναμικού για την \vec{F} είναι η

$$\underline{\phi(x, y, z) = -x + x^2 y + z^2(y^2 - 1) + xz}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} = \phi(\gamma(4\pi)) - \phi(\gamma(0))$$

$$= \phi(\pi, \sqrt{\pi}, 0) - \phi(0, 0, 0)$$

$$= -\pi + \pi^2(1 + \pi) = \underline{-\pi + \pi^3}$$

• Θ. 4. $\text{div } \vec{F} = 0 + \frac{1}{3} \frac{3}{2} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}-1} 2y + 0 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

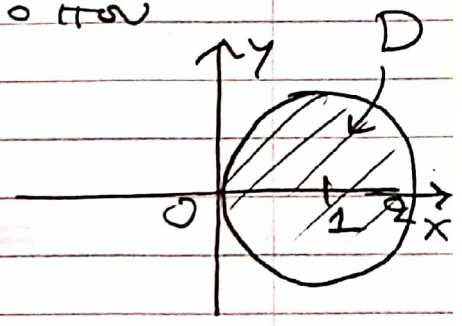
H. Inzwischen für Wolke (Wolke Θ Gauss) für

$$\iiint_K \text{div } \vec{F} = \iiint_K \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{x^2 + y^2}} dz \right) \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

$$= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}^{\frac{3}{2}} \, dx \, dy, \text{ όπου}$$

$$D = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x \}$$



Θ είνουμε $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

$(x, y) \in D$

$$\Rightarrow -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad r^2 \leq 2r \cos \varphi \Rightarrow 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi$$

• $J = r \Rightarrow \iiint_K \text{div } \vec{F} =$

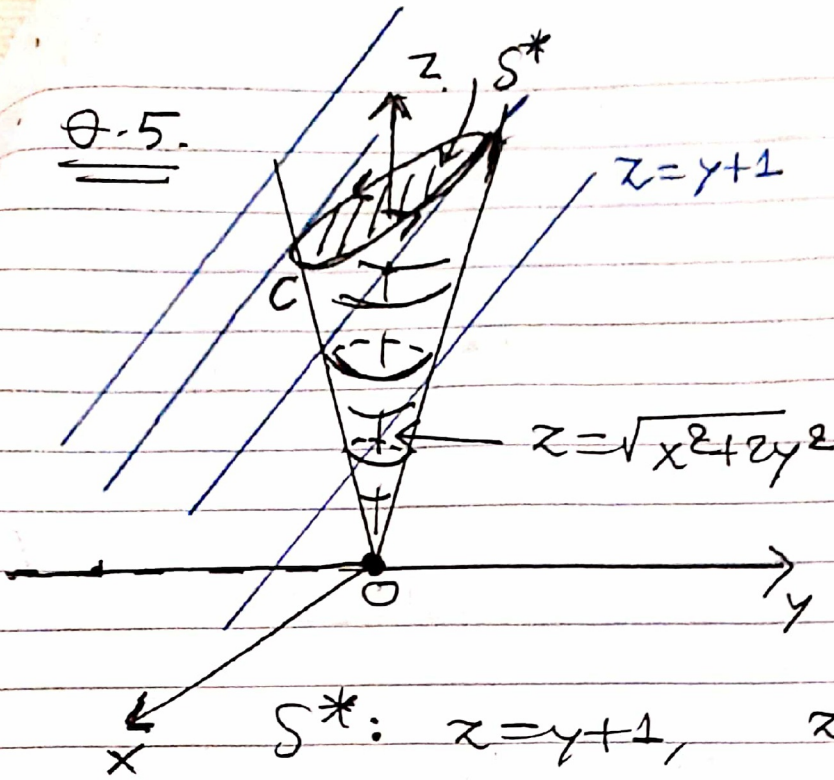
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} r \sin \varphi \, dr \right) d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2^6 \cos^6 \varphi \sin \varphi}{6} d\varphi = 0.$$

π εφ λ ρ η



θ.5.



$S^*: z = y + 1, z \geq \sqrt{x^2 + 2y^2}$

Παραμετρηση της S^* : $S(u, v) = (u, v, v + 1)$

με $\sqrt{u^2 + 2v^2} \leq v + 1 \Leftrightarrow u^2 + 2v^2 \leq (v + 1)^2$

$\Leftrightarrow u^2 + 2v^2 \leq v^2 + 2v + 1$

$\Leftrightarrow u^2 + v^2 - 2v \leq 1$

$\Leftrightarrow u^2 + (v - 1)^2 \leq 2,$

οπότε $S: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3, \Delta = \{(u, v): u^2 + (v - 1)^2 \leq 2\}$

με $S(u, v) = (u, v, v + 1).$

θ-Stokes $\Rightarrow \int_C \vec{F} = \iint_{\Delta} \text{rot } \vec{F}(S(u, v)) \cdot \vec{n}^T(u, v) du dv.$

Έχουμε

$S_u \times S_v = (0, -1, 1)$

$\Rightarrow (S_u \times S_v) \cdot S(u, v) = -v + v + 1 = 1 > 0$

$\Rightarrow S_u \times S_v$ "δείχνει" προς τα έξω αν σχεδιάσει με αρχή το $S(u, v) \Rightarrow \vec{n}^T(u, v) = (0, -1, 1).$

Apa, $V(u,v) \in \Delta$,

$$\text{rot } \vec{F}(S(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) =$$

$$= (3(v+1)^2 e^{(v+1)^3+v^2}, u^2, -v^2) \cdot (0, -1, 1)$$

$$= -(u^2 + v^2)$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} = - \iint_{\Delta} (u^2 + v^2) du dv =$$

$$\begin{aligned} u &= r \cos \varphi \\ v &= 1 + r \sin \varphi \end{aligned} \quad - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} [r^2 \cos^2 \varphi + (1+r \sin \varphi)^2] r dr d\varphi$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (r^2 + 2r \sin \varphi + 1) r dr d\varphi$$

$$= - 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (r^3 + r) dr + 2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr$$

$$= - 2\pi \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = - 2\pi \cdot 2$$

$$= \boxed{-4\pi}$$