ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ, 19/02/2020

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ **3** ΩΡΕΣ

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ **5** ΑΠΟ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ 6 ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $s = \sup A$. (i) Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ με $s - \epsilon < a \leq s$. (ii) Υπάρχει περίπτωση για κάποια $\epsilon > 0$ να μην υπάρχουν $a \in A$ με $s - \epsilon < a < s$? (0,5+0,5=1 μον.)

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο και $B \subseteq A$ μη κενό. Δείξτε ότι το B είναι και αυτό φραγμένο και ότι $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$. (1 μον.)

ΛΥΣΗ: (α) (i) Έστω $\epsilon > 0$. Έχουμε $s - \epsilon < s$ και άρα το $s - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A (αυτό συμβαίνει διότι το $s = \sup A$ είναι το *ελάχιστο άνω φράγμα* του A και άρα κάθε γνήσια μικρότερος αριθμός δεν είναι άνω φράγμα του A). Αφού λοιπόν το $s - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A δεν είναι μεγαλύτερο ή ίσο από όλα τα στοιχεία του A, δηλαδή υπάρχει κάποιο $a \in A$ με $s - \epsilon < a$. Τώρα κάθε στοιχείο του A είναι μικρότερο ή ίσο του $\sup A$ (αφού το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A). Συνεπώς $s - \epsilon < \alpha \leq s$.

(ii) Ναί μπορεί να συμβεί να μην υπάρχει τέτοιο $a \in A$. Πχ. $A = [0, 1] \cup \{2\}$. Τότε $s = \sup A = 2$ και για $\epsilon = 1$ δεν υπάρχει $a \in A$ με $s - 1 = 1 < a < 2 = s$. Ακόμα χειρότερα αν $A = \{a_0\}$ είναι μονοσύνολο, τότε $\sup A = a_0$ και δεν υπάρχει $a \in A$ με $a < a_0$.

(β) Έχουμε $\inf A \leq a \leq \sup A$ για κάθε $a \in A$ και άρα αφού $B \subseteq A$ θα πρέπει

$$\inf A \leq b \leq \sup A \quad \text{για κάθε } b \in B, \tag{1}$$

δηλαδή το B είναι φραγμένο. Συνεπώς απο την Αρχή Πληρότητας του $\mathbb{R}$ το B έχει infimum και supremum. Απο την σχέση (1) βλέπουμε επίσης ότι το $\inf A$ είναι ενα κάτω φράγμα του B και το $\sup A$ είναι ένα άνω φράγμα του B. Άρα αφού το $\inf B$ είναι το *μέγιστο* κάτω φράγμα του B και το $\sup B$ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του B, θα πρέπει

$$\inf A \leq \inf B \text{ και } \sup B \leq \sup A. \tag{2}$$

Επίσης

$$\inf B \leq \sup B \tag{3}$$

αφού $\inf B \leq b \leq \sup B$ για κάθε $b \in B$. Απο (2) και (3) έχουμε το ζητούμενο.

Θέμα 2. (α) Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών: (i) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$ (ii) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n + 1}$. $(0,5 + 0,5 = 1$ μον.)

(β) Έστω (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Θέτουμε $b_n = (-1)^n a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (i) Αν $a = 0$ δείξτε ότι η ακολουθία (b_n) συγκλίνει. (ii) Τι γίνεται αν $a \neq 0$; (0,5+0,5=1 μον.)

ΛΥΣΗ: (α) (i) $\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to e^2.$

(ii) Έχουμε

$$1 \leq \sqrt[n]{n^2+n+1} \leq \sqrt[n]{3n^2}. \tag{4}$$

Επειδή

$$\sqrt[n]{3n^2} = \sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1 \cdot 1^2 = 1, \tag{5}$$

απο την (4) και το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι

$$\sqrt[n]{n^2+n+1} \to 1.$$

(β) (i) Γνωρίζουμε ότι $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$. Συνεπώς επειδή $|a_n| = |b_n|$ έχουμε ότι $|b_n| \to 0$ και άρα $b_n \to 0$.

(ii) Γνωρίζουμε ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτήν. Άρα $a_{2n} \to a$ και $a_{2n+1} \to a$. Επειδή $b_{2n} = a_{2n}$ και $b_{2n+1} = -a_{2n+1}$ έπεται ότι $b_{2n} \to a$ και $b_{2n+1} \to -a$ και συνεπώς αφού $a \neq -a$ ($a \neq 0$) έχουμε ότι η (b_n) δεν συγκλίνει.

Θέμα 3. (α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+1}$ και (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. (0,5 + 0,5 =1 μον.)

(β) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας) : (i) Αν $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. (ii) Αν $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. (0,5+0,5=1 μον.)

ΛΥΣΗ: (α) (i) Επειδή $\dfrac{n^2+n+1}{n^4+1} = \dfrac{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)} = \dfrac{1}{n^2} \cdot \dfrac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^4}}$, έχουμε ότι

$$\frac{\frac{n^2+n+1}{n^4+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^4}} \to 1.$$

Συνεπώς (απο το κριτήριο ορίου λόγου) οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+1}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ είναι ισοδύναμες. Ως γνωστόν η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και άρα και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+1}$ συγκλίνει.

(ii) Θέτουμε $a_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Τότε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to e^{-1} < 1$$

και άρα απο το κριτήριο λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει.

(β) Και οι δύο προτάσεις είναι ψευδείς. Πράγματι αν $a_n = 1/n$ τότε $a_n \to 0$ και $a_{n+1}/a_n < 1$ ενώ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει.

Θέμα 4. (α) Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και ότι $f(x_0) > g(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in [a,b]$. Δείξτε ότι $f(x) > g(x)$ για όλα τα $x \in [a,b]$ και ειδικότερα υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq g(x) + \theta$, για όλα τα $x \in [a,b]$. (1 μον.)

(β) Έστω $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = f_1(x)$, αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = f_2(x)$, αν x άρρητος. Δείξτε ότι ένας πραγματικός αριθμός x_0 είναι σημείο συνέχειας της f αν και μόνο αν $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. (1 μον.)

ΛΥΣΗ: (α) Εφόσον $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, αν δεν ισχύει ότι $f(x) > g(x)$ για όλα τα $x \in [a,b]$ τότε θα έπρεπε να υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) < g(x_1)$. Άρα $f(x_0) > g(x_0)$ και $f(x_1) < g(x_1)$ που σημαίνει ότι η συνεχής (ως διαφορά συνεχών) συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ αλλάζει πρόσημο στα x_0, x_1. Απο το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ξ μεταθύ των x_0, x_1 με $h(\xi) = 0$. Αλλά τότε $f(\xi) = g(\xi)$ άτοπο. Συνεπώς $f(x) > g(x)$ για όλα τα $x \in [a,b]$. Ειδικότερα η $h(x) = f(x) - g(x)$ ως συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Έστω $\xi_0 \in [a,b]$ με $h(\xi_0) = \min\{h(x) : x \in [a,b]\}$. Τότε

$$h(x) \geq h(\xi_0) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq h(\xi_0) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) + h(\xi_0)$$

Θέτοντας λοιπόν $\theta = h(\xi_0)$ έχουμε $f(x) \geq g(x) + \theta$ για όλα τα $x \in [a,b]$. Το θ είναι γνήσια θετικό αφού $\theta = h(\xi_0)$ και $h(x) = f(x) - g(x) > 0$ για οποιοδήποτε $x \in [a,b]$.

(β) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Δείχνουμε πρώτα την συνεπαγωγή:

$$x_0 \text{ σημείο συνέχειας της } f \Rightarrow f_1(x_0) = f_2(x_0).$$

Πράγματι, έστω (x_n) ακολουθία ρητών με $x_n \to x_0$ και (x_n') ακολουθία αρρήτων με $x_n' \to x_0$ (τέτοιες ακολουθίες υπάρχουν απο την πυκνότητα ρητών και αρρήτων στο $\mathbb{R}$). Αφού υποθέτουμε ότι το x_0 είναι σημείο συνέχειας της f, απο την Αρχή Μεταφοράς, θα πρέπει

$$f(x_n) = f_1(x_n) \to f(x_0) \text{ και } f(x_n') = f_2(x_n') \to f(x_0). \tag{6}$$

Απο την άλλη μεριά οι f_1, f_2 είναι συνεχείς (θυμηθείτε ότι ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$) και άρα πάλι απο Αρχή Μεταφοράς,

$$f_1(x_n) \to f_1(x_0) \text{ και } f_2(x_n') \to f_2(x_0). \tag{7}$$

Απο (6) και (7) έπεται ότι $f(x_0) = f_1(x_0)$ και $f(x_0) = f_2(x_0)$, οπότε $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

Περνάμε τώρα στην αντίστροφη συνεπαγωγή:

$$f_1(x_0) = f_2(x_0) \Rightarrow x_0 \text{ σημείο συνέχειας της } f.$$

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο: Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta. \tag{8}$$

Έστω λοιπόν ένα $\epsilon > 0$ και έστω x_0 με $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Παρατηρούμε ότι ότι και να είναι το x_0 (ρητός ή άρρητος)

$$f(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0). \tag{9}$$

Θα πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ που να ικανοποιεί την (8). Για να προσδιορίσουμε το δ εργαζόμαστε ως εξής: Αφού η f_1 είναι συνεχής θα υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_1(x) - f_2(x_0)| < \epsilon \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta_1. \tag{10}$$

Ομοίως αφού η f_2 είναι συνεχής θα υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_2(x) - f_2(x_0)| < \epsilon \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta_2. \tag{11}$$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ισχυριζόμαστε ότι το δ που ορίσαμε είναι και το ζητούμενο δηλαδή ιακνοποιεί την (8). Καταρχάς έχουμε $\delta = \delta_1$ ή $\delta = \delta_2$ και άρα $\delta > 0$. Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$. Θα δείξουμε ότι όντως $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το x.

Περίπτωση 1: x ρητός.

Τότε απο τον ορισμό της f, $f(x) = f_1(x)$. Επίσης απο την (9) από την (10), αφού $|x - x_0| < \delta \leq \delta_1$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| = |f_1(x) - f_1(x_0)| < \epsilon$.

Περίπτωση 2: x άρρητος.

Ομοίως, απο τον ορισμό της f, $f(x) = f_2(x)$. Επίσης απο την (9) από την (10), αφού $|x - x_0| < \delta \leq \delta_2$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| = |f_2(x) - f_2(x_0)| < \epsilon$.

Απο τα παραπάνω έχουμε ότι $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ και άρα όντως η (8) ικανοποιείται για την επιλογή που κάναμε για το δ.

Αφού το ϵ ήταν έναω οποισδήποτε θετικός αριθμός έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ που να ικανοποιεί την (8) και επομένως η f είναι συνεχής στο x_0.

Θέμα 5. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $A \subseteq \mathbb{R}$ *πεπερασμένο* μη κενό. Αν $f'(x) \in A$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$ δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $a \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (1 μον.)

(β) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης ότι $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ και $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$. (*Υπόδειξη: Τύπος Taylor της f για το* $f(1/2)$) (1 μον.)

ΛΥΣΗ: (α) Απο το θεώρημα Darboux έχουμε ότι αν η f' λαμβάνει δύο διαφορετικέω τιμές τότε λαμβάνει και όλες τις ενδιάμεσες, έχει δηλαδή την *ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών* (παρόλο που δεν είναι κατανάγκη συνεχής). Αυτό όμως συνεπάγεται ότι αν η f' λαμβάνει δύο διαφορετικές τιμές τότε λαμβάνει άπειρες τιμές και άρα το A θα πρέπει να είναι απειροσύνολο, άτοπο. Άρα η f' είναι σταθερή συνάρτηση, δηλαδή για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$ για κάποιο μοναδικό $a \in A$. Αυτό δίνει ότι $f(x) = ax + b$ που επειδή $f(0) = 0$ υα πρέπει $b = 0$. Τελικά $f(x) = ax$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

(β) Απο το θεώρημα Taylor (τύπος Taylor για $n = 1$) έχουμε ότι αν $x_0 \in [0, 1]$ τότε για κάθε $x \in [0, 1]$ υπάρχει ξ γνήσια μεταξύ των x_0, x τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - x_0)^2. \tag{12}$$

Έστω $x = 1/2$. Τότε απο την (12) για $x_0 = 0$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (0, 1/2)$ με

$$f(1/2) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{f''(\xi_1)}{8}$$

Ομοίως για $x_0 = 1$ υπάρχει $\xi_2 \in (1/2, 1)$

$$f(1/2) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = 1 + \frac{f''(\xi_2)}{8}$$

Άρα $f(1/2) = 1 + \frac{f''(\xi_1)}{8} = 1 + \frac{f''(\xi_2)}{8}$ οπότε και $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$.

Θέμα 6. (α) Έστω $f : [a,b] \to [0,1]$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $x < y$ στο $[a,b]$ υπάρχουν $z_1, z_2 \in [x,y]$ με $f(z_1) = 0$ και $f(z_2) = 1$. Δείξτε ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση. (1 μον.)

(β) (i) Αν n θετικός ακέραιος και $0 < \lambda < 1$ δείξτε ότι $\int_0^\lambda \frac{x^n}{1+x^2}\,dx < \xi^n \cdot \frac{\pi}{4}$ για κάποιο ξ στο *ανοικτό* διάστημα $(0,\lambda)$. (ii) Αν $0 < \lambda < 1$ υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_0^\lambda \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$. (0,8+0,2=1 μον.)

ΛΥΣΗ: (α) Εργαζόμαστε όπως για την συνάρτηση Dirichlet και δείχνουμε ότι το κάτω ολοκλήρωμα τηω f είναι 0 ενώ το άνω είναι 1.

Πράγματι, έστω $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Για $1 \le i \le n$ θέτουμε $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ και $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Απο τις υποθέσεις μας για την f προκύπτει ότι $m_i = 0$ και $M_i = 1$ για κάθε $1 \le i \le n$.Άρα

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = 0 \text{ και } U(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a.$$

Οπότε

$$L(f) = \{L(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση του } [a,b]\} = \{0\}$$

και αντίστοιχα

$$U(f) = \{U(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση του } [a,b]\} = \{1\}.$$

Συνεπώς $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup L(f) = 0$ ενώ $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf U(f) = 1$. Άρα $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \neq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ οπότε η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

(β) Έστω $0 < \lambda < 1$. (i) Θα χρησιμοποιήσουμε το γενικό Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού καθώς και την γνωστή πρόταση: Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής και με μη αρνητικές τιμές*, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ για όλα τα } x \in [a,b]. \tag{13}$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Απο το γενικό Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού (για $f(x) = x^n$ και $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$), έχουμε

$$\int_0^\lambda \frac{x^n}{1+x^2}\,dx = \xi^n \int_0^\lambda \frac{1}{1+x^2}\,dx = \xi^n \cdot \arctan\lambda \tag{14}$$

για κάποιο $\xi \in [0,\lambda]$. Επειδή η $\arctan x$ είναι γνησίως αύξουσα και $\lambda < 1$ θα είναι $\arctan\lambda < \arctan 1 = \pi/4$ και άρα για να τελειώσει η απόδειξη μένει να αποκλείσουμε τις περιπτώσεις $\xi = 0$ και $\xi = \lambda$.

(i) Αν $\xi = 0$ τότε απο την (14) θα είχαμε $\int_0^\lambda \frac{x^n}{1+x^2}\,dx = 0$ και άρα αφού η συνάρτηση $\frac{x^n}{1+x^2}$, $x \in [0, \lambda]$ είναι συνεχής και μη αρνητική, απο την (13)) θα είχαμε $\frac{x^n}{1+x^2} = 0$, για όλα τα $x \in [0, \lambda]$ που είναι βέβαια αδύνατον.

(ii) Αν $\xi = \lambda$ τότε απο την (14) θα είχαμε

$$\int_0^\lambda \frac{x^n}{1+x^2}\,dx = \lambda^n \int_0^\lambda \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^\lambda \frac{\lambda^n}{1+x^2}\,dx$$

που συνεπάγεται ότι

$$\int_0^\lambda \frac{x^n}{1+x^2}\,dx = \int_0^\lambda \frac{\lambda^n}{1+x^2}\,dx.$$

Τώρα η γραμμικότητα του ολοκληρώματος δίνει ότι

$$\int_0^\lambda \frac{\lambda^n - x^n}{1+x^2}\,dx = 0.$$

Όμως πάλι η συνάρτηση $\frac{\lambda^n - x^n}{1+x^2}$, $x \in [0, \lambda]$ είναι συνεχής και μη αρνητική, οπότε απο την (13) θα είχαμε $\frac{\lambda^n - x^n}{1+x^2} = 0$, για όλα τα $x \in [0, \lambda]$ που είναι άτοπο.

Απο τα παραπάνω έπεται ότι $\xi \in (0, \lambda)$ και η απόδειξη του (α) έχει ολοκληρωθεί.

(β) Έστω $I_n = \int_0^\lambda \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$. Απο το (α) έχουμε

$$0 < I_n < \lambda^n \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Επειδή $0 < \lambda < 1$ έπεται ότι $\lambda^n \to 0$ και άρα απο θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $I_n \to 0$.