ΕΠΙ ΠΤΥΧΙΩ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ
9 Ιουνίου 2021

ΟΜΑΔΑ Β

ΘΕΜΑ 1. *Εξετάστε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.*

(α) Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και $\tau \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε (α) $X \cap (-\infty, \tau) = \emptyset$ και (β) $X \cap (-\infty, \tau') \neq \emptyset$, για κάθε $\tau' > \tau$. Τότε $\tau = \inf X$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής μη σταθερή. Τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f(x)$ άρρητο.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με f' μη σταθερή. Τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x)$ ρητό.

(δ) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχει $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Απάντηση: (α) Αφού $X \cap (-\infty, \tau) = \emptyset$ έξουμε ότι $\tau \leq x$ γιά όλα τα $x \in X$ και άρα το τ είναι κάτω φράγμα του X. Επειδή επιπλέον $X \cap (-\infty, \tau') \neq \emptyset$, για κάθε $\tau' > \tau$, έπεται ότι για κάθε $\tau' > \tau$ υπάρχει $x \in X$ με $x < \tau'$ και άρα κάθε $\tau' > \tau$ δεν είναι κάτω φράγμα του X. Συνεπώς το τ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του X, με άλλα λόγια $\tau = \inf X$. Άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

(β) Αφού η f είναι μη σταθερή υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) \neq f(x_2)$. Έστω $a = f(x_1)$ και $b = f(x_2)$. Έπειδή η f είναι συνεχής έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών δηλαδή η f λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των a και b. Από την πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$ μεταξύ των a και b υπάρχουν άπειροι άρρητοι και άρα η f λαμβάνει άπειρες άρρητες τιμές. Άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

(γ) Ομοίως με το (β) αφού η f' είναι μη σταθερή υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_1) \neq f'(x_2)$. Έστω $a = f'(x_1)$ και $b = f'(x_2)$. Από Θεώρημα Darboux η f' έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, δηλαδή η f' λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των a και b. Από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$ μεταξύ των a και b υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρα η f' λαμβάνει άπειρες ρητές τιμές. Άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

(δ) Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, η συνάρτηση $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ είναι καλά ορισμένη και $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Άρα η πρόταση είναι **σωστή**.

ΘΕΜΑ 2. (α) Δείξτε ότι $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\arctan x}{x} \right) = 1$. (β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Απάντηση: (α) Επειδή $\arctan 0 = 0$ έχουμε
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x - \arctan 0}{x-0}\right)$$
που σημαίνει ότι το ζητούμενο όριο ℓ είναι η παράγωγος της $\arctan x$ στο $x = 0$. Επειδή $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ έπεται ότι το ζητούμενο όριο είναι το $\ell = 1$.

(β) Έχουμε
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} \overset{(a)}{=} 1$$
Επειδή η αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 3. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(a) = a^2$ για κάθε a άρρητο. Δείξτε ότι $f(x) = x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.*

Απάντηση: Έστω $x\in\mathbb{R}$. Από την πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (a_n) αρρήτων με $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x, από Αρχή Μεταφοράς, έχουμε
$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x).$$
Ομοίως, από Αρχή Μεταφοράς για την συνεχή συνάρτηση $g(x) = x^2$, έχουμε
$$\lim_{n\to+\infty} g(a_n) = g(x)$$
Από υπόθεση $f(a_n) = g(a_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και άρα από μοναδικότητα του ορίου, $f(x) = g(x) = x^2$.

ΘΕΜΑ 4. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f'(0) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $b\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η σειρά*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - b\right|$$
συγκλίνει.

Απάντηση: Από τον τύπο Taylor έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ μεταξύ των x και 0 τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot x^2$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για $x = \dfrac{1}{n}$ θα υπάρχει $\xi_n \in \mathbb{R}$ με

$$0 < \xi_n < \frac{1}{n}$$

τέτοιο ώστε

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + f'(0) \cdot \frac{1}{n} + \frac{f''(\xi_n)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = f(0) + \frac{f''(\xi_n)}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Από τα παραπάνω έχουμε

$$\lim_{n \to +\infty} \xi_n = 0$$

και

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right| = \frac{|f''(\xi_n)|}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Αφού η f'' είναι συνεχής έπεται ότι

$$\lim_{n \to +\infty} |f''(\xi_n)| = |\lim_{n \to +\infty} f''(\xi_n)| = |f''(0)|$$

και άρα

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{f''(0)}{2} \in \mathbb{R}$$

Από Οριακό κριτήριο σύγκλισης και επειδή η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, έπεται ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right|$ συγκλίνει. Άρα για $b = f(0)$ έχουμε το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 5. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a) = a$ και $f(b) = b$. Έστω $g = f^{-1}$ η αντίστροφη συνάρτηση της f (δηλαδή $g(f(t)) = t$ για κάθε $t \in [a, b]$). Δείξτε την σχέση*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = b^2 - a^2$$

Μπορείτε να δώσετε μια γεωμετρική εξήγηση για το αποτέλεσμα που βρήκατε κάνοντας ένα σχήμα;

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας την αντικατάστασης $x = f(t)$, $t \in [a, b]$ και ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b g(f(t)) f'(t)\ dt = \int_a^b t f'(t)\ dt \\
&= [t f(t)]_a^b - \int_a^b t' f(t)\ dt \\
&= b^2 - a^2 - \int_a^b f(t)\ dt
\end{aligned}$$

και άρα

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx = b^2 - a^2$$

Για ένα σχήμα κάντε την $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Τότε $g(x) = \sqrt{x}$ και $\int_0^1 (f(x) + g(x))\ dx = 1$ που είναι ίσο με το εμβαδό του τετραγώνου με πλευρά το $[0,1]$.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ **1,5** ΩΡΕΣ

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ (**2 μον.** το καθένα)