

ΕΠΙ ΠΤΥΧΙΩ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ
29/05/2019

Θέμα 1. (α) Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R} τέτοια ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$. (1 μον.)

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 5}{n^3 + 5n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

(1,5 μον.)

Θέμα 2. (α) Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$. (1 μον.)

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε $f(q) = 0$ για κάθε ρητό q και $f(a) = 1$ για κάθε άρρητο a . Δείξτε ότι η f δεν έχει σημεία συνέχειας. (1,5 μον.)

Θέμα 3. (α) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) \neq 0$ δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. (1 μον.)

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αν $f(1/n) = \frac{n}{n^2 + 1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f'(0)$ και $f''(0)$. (1,5 μον.)

Θέμα 4. (α) Υπολογίστε το άοριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx$. (1 μον.)

(β) Υπολογίστε το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sin(x/n)}{1 + x^2} dx.$$

(0,5 μον.)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2,5 ΩΡΕΣ