ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ασκήσεις και Θέματα στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

Γιάννης Σαραντόπουλος

Αθήνα

27 Οκτωβρίου 2016

Περιεχόμενα

Συμβολισμός και Ορολογία

- $\mathbb{R}$- το σύνολο των πραγματικών αριθμών
- $\mathbb{R}_+$- το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών
- $\overline{\mathbb{R}}$—**το επεκταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών**. Είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ στο οποίο έχουμε προσθέσει δύο στοιχεία, το ∞ (ή $+\infty$) και το $-\infty$. Δηλαδή $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, ή , όπως συνήθως γράφεται, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.
- $\mathbb{Z}$- το σύνολο των ακεραίων
- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$-το σύνολο των φυσικών αριθμών
- $\mathbb{N}^*$- το σύνολο των θετικών ακεραίων
- $\mathbb{Q}$- το σύνολο των ρητών
- (a, b)- ανοικτό και φραγμένο διάστημα
- $[a, b]$- κλειστό και φραγμένο διάστημα
- $[a, b)$- ημιανοικτό διάστημα (κλειστό από αριστερά και ανοικτό από δεξιά)
- $(a, b]$- ημιανοικτό διάστημα (ανοικτό από αριστερά και κλειστό από δεξιά)
- Αν $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$,

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n) \quad \text{και} \quad (2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)\,.$$

Είναι $0! := 1$.

- Αν το σύνολο $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, είναι άνω φραγμένο, τότε με $\sup A$ συμβολίζουμε το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Αν όμως το A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε $\sup A = +\infty$.

- Αν το σύνολο $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, είναι κάτω φραγμένο, τότε με $\inf A$ συμβολίζουμε το μέγιστο κάτω φράγμα του A. Αν όμως το A δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε $\inf A = -\infty$.

- Η ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών λέγεται **αύξουσα** (**φθίνουσα**) αν $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ($a_{n+1} \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

- Αν (a_n) είναι μία ακολουθία και $k_1 < k_2 < \cdots < k_n \cdots$ είναι μία γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε η ακολουθία (a_{k_n}) λέγεται **υπακολουθία** της ακολουθίας (a_n).

- Το $c \in \mathbb{R}$ είναι ένα **οριακό σημείο** της ακολουθίας (a_n) αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = c$.

- Έστω S είναι το σύνολο των οριακών σημείων της ακολουθίας (a_n). Το **κατώτερο όριο**, $\underline{\lim}\, a_n$ και το **ανώτερο όριο**, $\overline{\lim}\, a_n$, της ακολουθίας (a_n) ορίζονται ως εξής

$$\underline{\lim}\, a_n = \begin{cases} -\infty & \text{αν η } (a_n) \text{ δεν είναι κάτω φραγμένη },\\ +\infty & \text{αν η } (a_n) \text{ είναι κάτω φραγμένη και } S = \emptyset \text{ },\\ \inf S & \text{αν η } (a_n) \text{ είναι κάτω φραγμένη και } S \neq \emptyset \text{ }, \end{cases}$$

$$\overline{\lim}\, a_n = \begin{cases} +\infty & \text{αν η } (a_n) \text{ δεν είναι άνω φραγμένη },\\ -\infty & \text{αν η } (a_n) \text{ είναι άνω φραγμένη και } S = \emptyset \text{ },\\ \sup S & \text{αν η } (a_n) \text{ είναι άνω φραγμένη και } S \neq \emptyset \text{ }. \end{cases}$$

- Το **ακέραιο μέρος** του $x \in \mathbb{R}$, συμβολίζεται με $[x]$, είναι ο μοναδικός ακέραιος $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $k \leq x < k+1$.

- Το ανοικτό διάστημα $V_x(\varepsilon) := (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, όπου $\varepsilon > 0$, λέγεται **περιοχή** με κέντρο το $x \in \mathbb{R}$ και ακτίνα ε. Κάθε διάστημα της μορφής $(\varepsilon, +\infty)$ (αντίστοιχα $(-\infty, -\varepsilon)$) είναι μια περιοχή του $+\infty$ (αντίστοιχα του $-\infty$).

Αν το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε

- το $x \in A$ είναι **εσωτερικό σημείο** του A, αν υπάρχει περιοχή V_x του x τέτοια ώστε $V_x \subseteq \mathbb{R}$,
- το $x \in A$ λέγεται **οριακό σημείο ή σημείο συσσώρευσης (**$\sigma.\sigma$**)** του A, αν για κάθε περιοχή V_x του x υπάρχει στοιχείο $a \in A$, $a \neq x$, τέτοιο ώστε $a \in V_x$,
- το $x \in A$ είναι **μεμονωμένο σημείο** του A αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A.
- Η συνάρτηση f ορισμένη στο $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, είναι **άνω φραγμένη** (αντίστοιχα **κάτω φραγμένη**), αν το σύνολο $f(A)$ είναι άνω φραγμένο (αντίστοιχα κάτω φραγμένο). Η f είναι **φραγμένη** στο A αν το σύνολο $f(A)$ είναι φραγμένο.
- Η συνάρτηση f ορισμένη στο $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, είναι **άρτια** (αντίστοιχα **περιττή**), όταν για κάθε $x \in A$ το $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$ (αντίστοιχα $f(-x) = -f(x)$).
- Η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα I είναι **αύξουσα** (αντίστοιχα **φθίνουσα**), αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$, με $x_1 < x_2$, είναι $f(x_1) \leq f(x_2)$ (αντίστοιχα $f(x_1) \geq f(x_2)$. Η συνάρτηση f είναι **γνήσια αύξουσα** (αντίστοιχα **γνήσια φθίνουσα**) στο διάστημα I , αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$, με $x_1 < x_2$, είναι $f(x_1) < f(x_2)$ (αντίστοιχα $f(x_1) > f(x_2)$.
- $f^{(n)}$-η n-οστή παράγωγος μιας συνάρτησης f.

Οι πραγματικές συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες σε μια περιοχή του $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Αν $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός
$$f(x) = o\left(g(x)\right) \quad (x \to x_0)\ .$$
- Αν το πηλίκο $f(x)/g(x)$ είναι φραγμένο σε μια περιοχή του $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός
$$f(x) = O\left(g(x)\right) \quad (x \to x_0)\ .$$
- Αν $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός
$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0)\ .$$

Αν το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και κάθε σημείο του A είναι σημείο συσσώρευσης, τότε

- $C\left(A\right)$–είναι το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων στο A,
- $C^n\left(A\right)$–είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι n-φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο A,
- $C^\infty\left(A\right)$–είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες στο A.

Κεφάλαιο 1

Λυμένες Ασκήσεις

1.1 Ακαδημαϊκό έτος 2014–15

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η ομάδα ασκήσεων στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

1. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x\to 0} f(\sin x) = \lambda\,.$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = \lambda$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ τέτοιο ώστε

$$0 < |y| < \delta \Rightarrow |f(y) - \lambda| < \varepsilon\,. \tag{$*$}$$

Επειδή για $0 < |x| < \delta$ έχουμε $0 < |y| = |\sin x| < |x| < \delta$, από την ($*$) έπεται ότι

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(\sin x) - \lambda| < \varepsilon\,.$$

Επομένως $\lim_{x\to 0} f(\sin x) = \lambda$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(\sin x) = \lambda$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(\sin x) - \lambda| < \varepsilon\,. \tag{$**$}$$

Ως γνωστόν $y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$ και η $x = \arcsin y$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση. Έστω $0 < |y| < \sin\delta$. Τότε

$$0 < |y| < \sin\delta \Leftrightarrow \{-\sin\delta < y < \sin\delta,\, y \neq 0\} \Leftrightarrow \{\sin(-\delta) < y < \sin\delta,\, y \neq 0\}$$

και ισοδύναμα

$$\{-\delta < x = \arcsin y < \delta,\, x \neq 0\} \Leftrightarrow 0 < |x| = |\arcsin y| < \delta\,.$$

Επομένως από την $(**)$ έχουμε ότι

$$0 < |y| < \sin\delta \Rightarrow |f(y) - \lambda| = |f(\sin x) - \lambda| < \varepsilon\,.$$

Άρα, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lambda$. ■

2. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 8 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 8x & \text{αν } x \text{ ρητός .} \end{cases}$$

Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{R}$ στα οποία η f είναι συνεχής.

Λύση. Η συνάρτηση f είναι ασυνεχής για $x \neq 2$. Πράγματι, αν (ρ_n) είναι ακολουθία ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \rho_n = x$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = \lim_{n\to\infty} 8\rho_n = 8x\,.$$

Αν (α_n) είναι ακολουθία άρρητων αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = x$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} (2\alpha_n^2 + 8) = 2x^2 + 8\,.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\rho_n)$ αν και μόνο αν

$$2x^2 + 8 \neq 8x \Leftrightarrow (x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2\,.$$

Από το θεώρημα(αρχή) μεταφοράς η f δεν είναι συνεχής για $x \neq 2$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο 2. Επειδή $2 \in \mathbb{Q}$, είναι $f(2) = 16$. Αν το x είναι άρρητος

$$|f(x) - f(2)| = |2x^2 + 8 - 16| = 2|x^2 - 4| = 2|x-2||x+2|$$

και αν το x είναι ρητός

$$|f(x) - f(2)| = |8x - 16| = 8|x - 2|\,.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $|x - 2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, τότε στην περίπτωση που το x είναι άρρητος είναι $|f(x) - f(2)| < 10|x-2|$. Επομένως $|f(x) - f(2)| \leq 10|x-2|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν επιλέξουμε το $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{10}\right\}$, τότε

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon\,.$$

Άρα η f είναι συνεχής στο σημείο 2. ■

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x\to-\infty} f(x) \geq 0$ και $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι $f(x_0) < 0$. Επειδή από την υπόθεση $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f είναι γνήσια αύξουσα οπότε $f(x) < f(x_0)$, για κάθε $x < x_0$. Επομένως

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \leq f(x_0) < 0\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα, $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ■

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} 1/(e^{x^2} - 1) & \text{αν } x > 0 \\ e^x & \text{αν } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση. Είναι

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^-} e^x = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{e^{x^2} - 1} = +\infty\,.$$

Επομένως, αν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα είναι $\lim_{x\to0^-} f'(x) = 1$ και $\lim_{x\to0^+} f'(x) = +\infty$. Όμως από τη θεωρία είναι γνωστό, παραπέμπουμε στο [27, Πόρισμα 3.49], ότι κανένα από τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to0^+} f'(x)$ και $\lim_{x\to0^-} f'(x)$ δεν μπορεί να ισούται με $+\infty$ ή $-\infty$. Άρα, δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ■

5. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο τρίτης τάξης, χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{2f(x+3h) - 3f(x+2h) + f(x)}{3h^2}\,.$$

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$, x σταθερό. Εφαρμόζοντας τον τύπο Taylor μέχρι τρίτης τάξης, για κάθε $h \in \mathbb{R}$ υπάρχουν $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ έτσι ώστε

$$f(x+3h) = f(x) + f'(x)3h + \frac{f''(x)}{2!}9h^2 + \frac{f'''(x+3\theta_1 h)}{3!}27h^3$$

και

$$f(x+2h) = f(x) + f'(x)2h + \frac{f''(x)}{2!}4h^2 + \frac{f'''(x+2\theta_2 h)}{3!}8h^3\,.$$

Από τις παραπάνω ισότητες έπεται ότι

$$2f(x+3h) - 3f(x+2h) + f(x) = 3f''(x)h^2 + [9f'''(x+3\theta_1 h) - 4f'''(x+2\theta_2 h)]h^3$$

και επομένως

$$\lim_{h\to 0} \frac{2f(x+3h) - 3f(x+2h) + f(x)}{3h^2} = f''(x) + \frac{1}{3}\lim_{h\to 0}[9f'''(x+3\theta_1 h) - 4f'''(x+2\theta_2 h)]h = f''(x)\,.$$

Σημείωση. Επειδή η f''' είναι συνεχής συνάρτηση, είναι

$$\lim_{h\to 0}[9f'''(x+3\theta_1 h) - 4f'''(x+2\theta_2 h)] = 9f'''(x) - 4f'''(x) = 5f'''(x)\,.$$

■

6. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης σε δυναμοσειρά, δείξτε ότι

$$\left|e^{xh} - 1\right| \le e^{|h|} - 1\,, \quad \text{για κάθε } x \in [0,1] \text{ και κάθε } h \in \mathbb{R}\,.$$

Λύση. Επειδή $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
\left|e^{xh} - 1\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xh)^n}{n!}\right| \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|xh|^n}{n!} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^n}{n!} && (0 \le x \le 1) \\
&= e^{|h|} - 1\,.
\end{aligned}$$

■

2η ομάδα ασκήσεων στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

1. Δείξτε ότι το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6n-8k}{\sqrt{-4k^2n^2+4kn^3+3n^4}}=\int_0^1\frac{6-8x}{\sqrt{-4x^2+4x+3}}\,dx=\frac{\pi}{3}\,.$$

Λύση. Από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6n-8k}{\sqrt{-4k^2n^2+4kn^3+3n^4}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{6-8(k/n)}{\sqrt{-4(k/n)^2+4(k/n)+3}}\\ &=\int_0^1\frac{6-8x}{\sqrt{-4x^2+4x+3}}\,dx\,,\end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $f(x)=\frac{6-8x}{\sqrt{-4x^2+4x+3}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$. Είναι

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{6-8x}{\sqrt{-4x^2+4x+3}}\,dx &= \int_0^1\frac{4-8x}{\sqrt{-4x^2+4x+3}}\,dx+\int_0^1\frac{2}{\sqrt{-4x^2+4x+3}}\,dx\\ &= 2\,\sqrt{-4x^2+4x+3}\Big|_{x=0}^{x=1}+\int_0^1\frac{2}{\sqrt{4-(2x-1)^2}}\,dx\\ &= 0+\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{2^2-t^2}}\,dt \qquad\qquad (\text{αντικατάσταση } t=2x-1)\\ &= \arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_{t=-1}^{t=1}\\ &= 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\,.\end{aligned}$$

■

2. Έστω η φραγμένη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$\widehat{f}(y):=\int_0^1 f(x)e^{xy}\,dx\,.$$

(α΄) Να βρεθεί η συνάρτηση $\widehat{f}$ αν

$$(i)\ f(x)=1\,,\quad (ii)\ f(x)=e^x\,,\quad (iii)\ f(x)=e^{-x}\,.$$

(β΄) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\widehat{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι για κάθε $y\in\mathbb{R}$ και για κάθε $h\in\mathbb{R}$,

$$|\widehat{f}(y+h)-\widehat{f}(y)|\le\left(e^{|h|}-1\right)\int_0^1|f(x)|e^{xy}\,dx\,.$$

(γ') Δείξτε ότι το όριο $\lim_{y\to-\infty}\widehat{f}(y)=0$.

Λύση.

(α') (i) Αν $f(x)=1$,

$$\widehat{f}(y)=\int_0^1 e^{xy}\,dx=\frac{e^y-1}{y}\,,\quad y\neq 0\quad \text{και}\quad \widehat{f}(0)=1\,.$$

(ii) Αν $f(x)=e^x$,

$$\widehat{f}(y)=\int_0^1 e^x e^{xy}\,dx=\int_0^1 e^{x(1+y)}\,dx=\frac{e^{1+y}-1}{1+y}\,,\quad y\neq -1\quad \text{και}\quad \widehat{f}(-1)=1\,.$$

(ii) Αν $f(x)=e^{-x}$,

$$\widehat{f}(y)=\int_0^1 e^{-x} e^{xy}\,dx=\int_0^1 e^{x(y-1)}\,dx=\frac{e^{y-1}-1}{y-1}\,,\quad y\neq 1\quad \text{και}\quad \widehat{f}(1)=1\,.$$

(β') Για κάθε $y\in\mathbb{R}$ και για κάθε $h\in\mathbb{R}$ είναι

$$|\widehat{f}(y+h)-\widehat{f}(y)|=\left|\int_0^1 f(x)e^{xy}(e^{xh}-1)\,dx\right|\leq\int_0^1|f(x)|e^{xy}|e^{xh}-1|\,dx\,.$$

Όμως από την "1η ομάδα ασκήσεων", άσκηση 6, για κάθε $x\in[0,1]$ και κάθε $h\in\mathbb{R}$ είναι $|e^{xh}-1|\leq e^{|h|}-1$ και επομένως

$$|\widehat{f}(y+h)-\widehat{f}(y)|\leq (e^{|h|}-1)\int_0^1|f(x)|e^{xy}\,dx\,.$$

Επειδή $\lim_{h\to0}(e^{|h|}-1)=0$, έπεται ότι $\lim_{h\to0}\widehat{f}(y+h)=\widehat{f}(y)$ και άρα η συνάρτηση $\widehat{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(γ') Αν $M:=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$, τότε για κάθε $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$|\widehat{f}(y)|=\left|\int_0^1 f(x)e^{xy}\,dx\right|\leq\int_0^1|f(x)|e^{xy}\,dx\leq M\int_0^1 e^{xy}\,dx=M\frac{e^y-1}{y}\,.$$

Επειδή

$$\lim_{y\to-\infty}\frac{e^y-1}{y}=0\,,$$

τότε και $\lim_{y\to-\infty}\widehat{f}(y)=0$.

■

3. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, συνεχής συνάρτηση. Είναι γνωστό ότι στα κλειστά και φραγμένα διαστήματα του $\mathbb{R}$ οι συνεχείς συναρτήσεις προσεγγίζονται ομοιόμορφα από πολυώνυμα. Αυτό είναι το κλασικό *προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass*. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon\,, \quad \text{για κάθε } x \in [a, b]\,.$$

Αν

$$\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,,$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Weierstrass δείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο διάστημα $[a, b]$.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $\int_a^b f(x)^2\,dx = 0$.

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο $p_\varepsilon(x)$ με $|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, για κάθε $x \in [a, b]$. Επειδή από την υπόθεση $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι

$$\int_a^b p_\varepsilon(x) f(x)\,dx = 0\,.$$

Επομένως,

$$\int_a^b f(x)^2\,dx = \int_a^b f(x)(f(x) - p_\varepsilon(x))\,dx + \int_a^b p_\varepsilon(x) f(x)\,dx = \int_a^b f(x)(f(x) - p_\varepsilon(x))\,dx$$

Αν $M := \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$, τότε

$$\int_a^b f(x)^2\,dx \le \int_a^b |f(x)||f(x) - p_\varepsilon(x)|\,dx\,dx \le M\varepsilon(b - a)\,.$$

Επειδή η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, συμπεραίνουμε ότι $\int_a^b f(x)^2\,dx = 0$ και άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. ∎

4. Αν $n \in \mathbb{N}^*$ και η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, υποθέτουμε ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x f(x)\,dx = \cdots = \int_0^1 x^{n-1} f(x)\,dx = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^n f(x)\,dx = 1\,.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $|f(x_0)| \ge 2^n(n + 1)$.

Υπόδειξη. Αν $|f(x)| < 2^n(n + 1)$ για κάθε $x \in [0, 1]$, δείξτε ότι

$$\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n f(x)\,dx < 1\,.$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι $|f(x)| < 2^n(n+1)$, για κάθε $x \in [0,1]$. Τότε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\,dx &\le \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n |f(x)|\,dx \\
&< \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n 2^n(n+1)\,dx \\
&= 2^n(n+1)\int_{-1/2}^{1/2} |t|^n\,dt \qquad (\text{αντικατάσταση } t = x-\tfrac{1}{2}) \\
&= 2^{n+1}(n+1)\int_0^{1/2} t^n\,dt = 2^{n+1}(n+1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = 1\,.
\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(x^n - \frac{n}{2}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2^3}x^{n-2} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2^n}\right) f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x^n f(x)\,dx - \frac{n}{2}\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx + \frac{n(n-1)}{2^3}\int_0^1 x^{n-2}f(x)\,dx \\
&\quad + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2^n}\int_0^1 f(x)\,dx \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$1 = \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\,dx < 1\,. \qquad (\text{άτοπο})$$

Άρα, υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $|f(x_0)| \ge 2^n(n+1)$. ■

5. Να λυθεί η εξίσωση

$$\int_1^x \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt = \frac{\pi}{24}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt &= \int_1^x \frac{1}{(t+1)^2+4}\,dt \\
&= \int_2^{x+1} \frac{1}{u^2+2^2}\,du \qquad (\text{αντικατάσταση } u = t+1) \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_{u=2}^{u=x+1} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{\pi}{8}\,.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_1^x \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt = \frac{\pi}{24} \Longleftrightarrow \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\,.$$

Άρα, $x = 2\sqrt{3}-1$. ■

6. Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και τέτοια ώστε

$$f(x)^2 = 2\int_0^{\sqrt{x}} f(t^2)\,dt\,. \tag{$*$}$$

Δείξτε ότι $f(x) = \sqrt{x}$.

Λύση. Επειδή

$$f(x) = \left(2\int_0^{\sqrt{x}} f(t^2)\,dt\right)^{1/2} \qquad \text{για κάθε } x \geq 0\,,$$

και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, από το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$. Παραγωγίζοντας την ($*$), για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$2f(x)f'(x) = 2f(x)(\sqrt{x})' \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = f(x)\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

και επομένως $f(x) = \sqrt{x} + c$. Επειδή $f(0) = 0$, είναι $c = 0$. Άρα, $f(x) = \sqrt{x}$ για κάθε $x \geq 0$. ■

7. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ ώστε

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{1 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\cos\xi\,.$$

Λύση. Επειδή οι συναρτήσεις $f(x) = \cos x$ και $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ είναι μη αρνητικές και συνεχείς στο διάστημα $[0, 1]$, από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\cos x}{1 + x^2}\,dx &= \cos\xi \cdot \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx \\ &= \cos\xi \cdot \arctan x\big|_{x=0}^{x=1} = \cos\xi(\arctan 1 - \arctan 0) = \cos\xi \cdot \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

για κάποιο ξ με $0 \leq \xi \leq 1$. ■

1.2 Ακαδημαϊκό έτος 2013–14

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η ομάδα ασκήσεων στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

1. Να βρεθούν όλες οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f'(x)=\frac{f(x+n)-f(x)}{n}\Leftrightarrow f(x+n)-f(x)=nf'(x)\,,\quad \forall x\in\mathbb{R} \text{ και } \forall n\in\mathbb{N}^*\,.$$

Λύση. Από την υπόθεση είναι

$$f'(x+1)=\frac{f((x+1)+1)-f(x+1)}{1}=f(x+2)-f(x+1)$$

και

$$f(x+2)-f(x+1)=(f(x+2)-f(x))-(f(x+1)-f(x))=2f'(x)-f'(x)=f'(x)\,.$$

Επομένως

$$f'(x)=f(x+2)-f(x+1)=f'(x+1)\,,\quad \forall x\in\mathbb{R}\,.$$

Επειδή από την υπόθεση η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, από την παραπάνω σχέση έπεται ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} f''(x)&=f'(x+2)-f'(x+1)\\ &=(f(x)+2f'(x))'-f'(x) \qquad (f(x+2)=f(x)+2f'(x) \text{ και } f'(x+1)=f'(x))\\ &=f'(x)+2f''(x)-f'(x)=2f''(x) \end{aligned}$$

και κατά συνέπεια $f''(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα

$$f(x)=c_1x+c_2\,,\quad \text{με } c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

■

2. Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος I. Αν $a,b>0$, δείξτε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+bh)-f(x_0-ah)}{(b+a)h}=f'(x_0)\,.$$

Λύση. Επειδή

$$\frac{f(x_0+bh)-f(x_0-ah)}{(b+a)h} = \frac{b}{b+a}\frac{f(x_0+bh)-f(x_0)}{bh} + \frac{a}{b+a}\frac{f(x_0-ah)-f(x_0)}{-ah}$$

και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος I, είναι

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+bh)-f(x_0-ah)}{(b+a)h} &= \frac{b}{b+a}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+bh)-f(x_0)}{bh} + \frac{a}{b+a}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-ah)-f(x_0)}{-ah} \\ &= \frac{b}{b+a}f'(x_0) + \frac{a}{b+a}f'(x_0) = f'(x_0)\,.\end{aligned}$$

■

3. Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^2 με $f(0) = f'(0) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1, τέτοια ώστε $f(x) = g(x^2)$ για κάθε $x \geq 0$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) := f(\sqrt{x})$. Τότε είναι $f(x) = g(x^2)$ για κάθε $x \geq 0$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η g είναι κλάσης C^1 στο $[0,\infty)$.

(i) Έστω $x > 0$. Τότε

$$g'(x) = \frac{1}{2}\frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

και επειδή από την υπόθεση η f' είναι συνεχής για κάθε $x > 0$, η g είναι κλάσης C^1 στο διάστημα $(0,\infty)$.

(ii) Έστω $x = 0$. Επειδή $f(0) = f'(0) = 0$, είναι

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f(\sqrt{x})}{x} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} f''(\sqrt{x}) && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= \frac{1}{2}f''(0)\,. && \text{(η } f'' \text{ είναι συνεχής στο 0)} \end{aligned}$$

Επίσης

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}f''(0) = g'(0)$$

και επομένως g' είναι συνεχής στο 0. Άρα η g είναι κλάσης C^1 στο διάστημα $[0,\infty)$. ■

4. Αποδείξτε ότι οι n-οστές παράγωγοι του ημιτόνου και του συνημιτόνου δίνονται από τους τύπους

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{και} \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Λύση. (i) Αν $x \in \mathbb{R}$, με επαγωγή θα δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\ . \tag{1.1}$$

Επειδή $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, η (1.1) ισχύει για $n = 1$.

Αν η (1.1) ισχύει για $n = k$, τότε

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(k+1)} &= \frac{d}{dx}\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)\ ,\end{aligned}$$

δηλαδή η (1.1) ισχύει για $n = k + 1$. Άρα η (1.1) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Αν $x \in \mathbb{R}$, παρόμοια αποδεικνύεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\ .$$

■

5. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

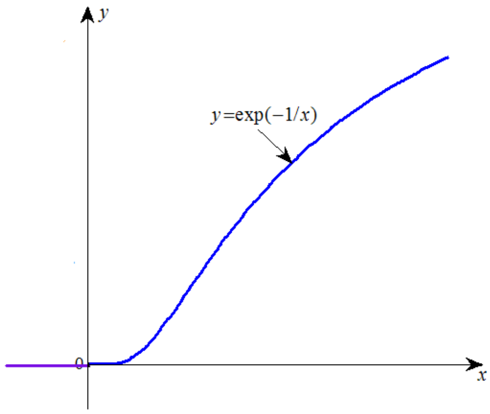
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x \leq 0\ . \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-1/x}P_{2n}(1/x) & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x \leq 0\ , \end{cases}$$

όπου $P_{2n}(1/x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $2n$ ως προς $1/x$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση.



Πρώτα θα αποδείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x > 0$

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right), \tag{1.2}$$

όπου $P_{2n}(1/x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $2n$ ως προς $1/x$.

− Η (1.2) προφανώς ισχύει για $n = 0$ με $P_0 \equiv 1$.

− Αν η (1.2) ισχύει για $n = k \geq 0$, τότε

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(e^{-1/x} P_{2k}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \frac{1}{x^2} e^{-1/x} P_{2k}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} e^{-1/x} P'_{2k}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}\left(P_{2k}\left(\frac{1}{x}\right) - P'_{2k}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= e^{-1/x} P_{2(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

και επομένως η (1.2) ισχύει για $n = k + 1$ με

$$P_{2(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right) = P_{2k+2}\left(\frac{1}{x}\right) := \frac{1}{x^2}\left(P_{2k}\left(\frac{1}{x}\right) - P'_{2k}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Επομένως η (1.2) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x > 0$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό της συνάρτησης f είναι προφανές ότι $f_-^{(n)}(0) = 0$. Για να αποδείξουμε ότι $f^{(n)}(0) = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$f_+^{(n)}(0) = 0. \tag{1.3}$$

– Από τον ορισμό της f η (1.3) ισχύει για $n = 0$.

– Αν η (1.3) ισχύει για $n = k \geq 0$, τότε

$$\begin{aligned} f_+^{(k+1)}(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x} P_{2k}\left(\frac{1}{x}\right) && \text{((1.2) για } n = k\text{)} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{tP_{2k}(t)}{e^t} \\ &= 0\,, && \text{((}2k+1\text{)-φορές εφαρμογή του κανόνα L'Hôpital)} \end{aligned}$$

δηλαδή η (1.3) ισχύει για $n = k+1$. Επομένως η (1.3) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

2η ομάδα ασκήσεων στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $y = f(x) = 1 + x^2 + \arctan(x^2)$ είναι γνήσια μονότονη στο διάστημα $[0, \infty)$. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη της f, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{y\to 1^+} \frac{f^{-1}(y)}{\sqrt{y-1}}\,.$$

Λύση. Είναι

$$f'(x) = 2x + \frac{2x}{1+x^4} = 2x\frac{2+x^4}{1+x^4} \geq 0\,, \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x = 0$. Επομένως η συνεχής συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $[0, \infty)$ και κατά συνέπεια αντιστρέφεται. Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} θα είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα. Είναι $f(0) = 1$ οπότε και $f^{-1}(1) = 0$. Επειδή $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$ και $\lim_{y\to 1^+} f^{-1}(y) = f^{-1}(1^+) = 0$, έπεται ότι το $x \to 0^+$ καθώς το $y \to 1^+$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 1^+} \left(\frac{f^{-1}(y)}{\sqrt{y-1}}\right)^2 &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{f(x) - 1} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{2x\frac{2+x^4}{1+x^4}} && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{y\to 1^+} \frac{f^{-1}(y)}{\sqrt{y-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

■

2. (α΄) Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\,.$$

Είναι η f παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

(β΄) Να λυθεί η εξίσωση

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arctan x\,.$$

(γ΄) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ και $y = \arctan x$.

Λύση.

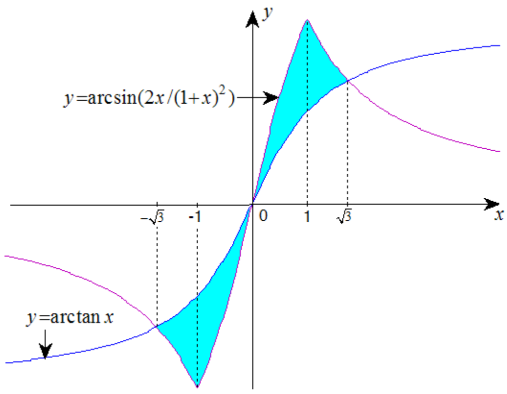
(α΄) Είναι $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$ και επομένως η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη. Επειδή

$$f'(x) = \frac{\left(2x/(1+x^2)\right)'}{\sqrt{1-(2x/(1+x^2))^2}} = 2\frac{1-x^2}{|1-x^2|(1+x^2)} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{αν } |x|<1 \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{αν } |x|>1 \end{cases}\,,$$

η f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(-1,1)$ και γνήσια φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(1,\infty)$. Είναι $\max f(x) = f(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ και $\min f(x) = f(-1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Η παράγωγος f' δεν υπάρχει στα σημεία ± 1. Είναι $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = -1$, $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1$ και $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1$. Επειδή

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arcsin 0 = 0\,,$$

η $y=0$, δηλαδή ο άξονας Ox, είναι οριζόντια ασύμπτωτη. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(β΄) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned} x &= \tan\left(\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right) \\ &= \frac{\sin\left(\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right)}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right)} \\ &= \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2x}{|1-x^2|} \end{aligned}$$

και επομένως οι ρίζες της εξίσωσης είναι 0 και $\pm\sqrt{3}$.

(γ΄) Αν $g(x) = \arctan x$, λόγω συμμετρίας το εμβαδόν του χωρίου E είναι

$$\begin{aligned} |E| &= 2\left[\int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx + \int_1^{\sqrt{3}} (f(x)-g(x))\,dx\right] \\ &= 2(f(1)-g(1)) - 2(f(0)-g(0)) - 2\int_0^1 x(f'(x)-g'(x))\,dx \\ &\quad + 2(f(\sqrt{3})-g(\sqrt{3})) - 2(f(1)-g(1)) - 2\int_1^{\sqrt{3}} x(f'(x)-g'(x))\,dx \\ &\qquad\qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= 2\arcsin(\sqrt{3}/2) - 2\arctan\sqrt{3} - 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx + 6\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= 2\frac{\pi}{3} - 2\frac{\pi}{3} - \ln(1+x^2)\big|_{x=0}^{x=1} + 3\ln(1+x^2)\big|_{x=1}^{x=\sqrt{3}} \\ &= -\ln 2 + 3\ln 4 - 3\ln 2 = 2\ln 2\,. \end{aligned}$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου E είναι $|E| = 2\ln 2$.

■

3. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο $[a, b)$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (ξ_n) σημείων του (a, b) τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = f'(a)$.

   Σημείωση. Επειδή $\lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = f'(a)$, το $f'(a)$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου
   $$f'((a, b)) = \{f'(x) : x \in (a, b)\}\,.$$
   Υπόδειξη. ΘΜΤ για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[a,\, a + \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   Λύση. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $a + \frac{1}{n} < b$ για κάθε $n \geq N$. Από το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $\left[a,\, a + \frac{1}{n}\right]$, $n \geq N$, έχουμε
   $$f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a) = \frac{1}{n} f'(\xi_n) \Leftrightarrow f'(\xi_n) = \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}{\frac{1}{n}}\,,$$
   για κάποιο $\xi_n \in \left(a, a + \frac{1}{n}\right)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο a, από το θεώρημα μεταφοράς
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}{\frac{1}{n}} = f'(a)$$
   και επομένως $\lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = f'(a)$, όπου $(\xi_n)_{n\geq N}$ ακολουθία σημείων του (a, b). ■

4. Αν $f(x) := \frac{1}{2}\sin(\ln(x + 1))$, $x > -1$, χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor για την f μέχρι τον όρο δεύτερης τάξης και κέντρο το $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι
   $$|f(n-1) + f(n+1) - 2f(n)| = |f''(\xi)|\,, \quad \text{για κάποιο } \xi \in (n-1, n+1)\,,$$
   με $|f''(\xi)| < n^{-2}$.

   Εφαρμογή. Αν $a_n := f(n) = \frac{1}{2}\sin(\ln(n + 1))$, η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει και είναι τέτοια ώστε
   $$|a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n| < \frac{1}{n^2}\,, \quad \forall n \geq 2\,.$$
   Λύση. Από τον τύπο Taylor έχουμε
   $$f(n-1) = f(n) - f'(x) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\,, \text{ για κάποιο } \xi_1 \in (n-1, n)$$
   και
   $$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\,, \text{ για κάποιο } \xi_2 \in (n, n+1)\,.$$

Τότε,

$$f(n+1)+f(n-1)-2f(n)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]\,.$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής είναι

$$\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]=f''(\xi)\,,\text{ για κάποιο } \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(n-1,n+1)$$

και επομένως

$$|f(n-1)+f(n+1)-2f(n)|=|f''(\xi)|\,,\quad \text{για κάποιο } \xi\in(n-1,n+1)\,.$$

Επειδή

$$f'(x)=\frac{\cos(\ln(x+1))}{2(x+1)}\quad \text{και}\quad f''(x)=-\frac{\sin(\ln(x+1))+\cos(\ln(x+1))}{2(x+1)^2}\,,$$

είναι $|f''(x)|\le\frac{1}{(x+1)^2}$ και κατά συνέπεια

$$|f''(\xi)|\le\frac{1}{(\xi+1)^2}<\frac{1}{n^2}\,. \qquad (n<\xi+1<n+2)$$

■

3η Ομάδα Ασκήσεων στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

1. Έστω η συνάρτηση $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D\neq\emptyset$ και έστω $a\in\mathbb{R}$ από αριστερά και από δεξιά *σ.σ* του D. Αν $\lim_{x\to a^-}f(x)=\lambda_1$, $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lambda_2$ με $\lambda_1<\lambda_2$, να δείξετε ότι υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x,y\in D$ με $a-\delta<x<a<y<a+\delta$ είναι $f(x)<f(y)$.

Λύση. Έστω $\varepsilon:=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}>0$. Επειδή $\lim_{x\to a^-}f(x)=\lambda_1$, υπάρχει $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x\in D\cap(a-\delta_1,a)\Rightarrow|f(x)-\lambda_1|<\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\,.$$

Επομένως για κάθε $x\in D$ με $a-\delta_1<x<a$ είναι

$$f(x)-\lambda_1<\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\Leftrightarrow f(x)<\lambda_1+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}=\frac{\lambda_2+\lambda_1}{2}\,.$$

Επειδή $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lambda_2$, υπάρχει $\delta_2>0$ τέτοιο ώστε

$$\forall y\in D\cap(a,a+\delta_2)\Rightarrow|f(y)-\lambda_2|<\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\,.$$

Επομένως για κάθε $y \in D$ με $a < y < a + \delta_2$ είναι

$$\lambda_2 - f(y) < \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \Leftrightarrow f(y) > \lambda_2 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2}.$$

Αν $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, τότε για κάθε $x, y \in D$ με $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ είναι

$$f(x) < \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} < f(y).$$

■

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή $m \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_0 < x_2$ τέτοια ώστε

$$f(x) > f(x_0),\ \forall x < x_1 \quad \text{και} \quad f(x) > f(x_0),\ \forall x > x_2.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[x_1, x_2]$, υπάρχει $c \in [x_1, x_2]$ τέτοιο ώστε

$$m = f(c) = \min_{x\in[x_1,x_2]} f(x) \le f(x_0).$$

Τότε είναι $m = f(c) \le f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Άρα, η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της m στο $c \in \mathbb{R}$. ■

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 0$. Αν $a \neq 0$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} f\left(\frac{a^n}{n!}\right) = 0.$$

Λύση. Από την υπόθεση έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Αν $x_n = \frac{a^n}{n!}$, είναι γνωστό ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Επομένως από το θεώρημα μεταφοράς $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 0$ και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} f\left(\frac{a^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(a^n/n!\right)}{a^n/n!} = 0.$$

■

4. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης $y = e^x$ σε σειρά Maclaurin, να βρεθεί το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n!} x^n \,, \quad \forall x \in \mathbb{R} \,.$$

Λύση. Ως γνωστόν $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(n-1)+2n+1}{n!} x^n \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= 2x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)'' + 2x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= 2x^2 (e^x)'' + 2x (e^x)' + e^x = (2x^2+2x+1)e^x \,.
\end{aligned}$$

■

5. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0,1]$, δείξτε ότι το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2-4kn}{k^2-2kn+3n^2} = 2 - 3\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -0,6 \,.$$

Λύση. Από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2-4kn}{k^2-2kn+3n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2(k/n)^2-4(k/n)}{(k/n)^2-2(k/n)+3} \\
&= \int_0^1 \frac{2x^2-4x}{x^2-2x+3}\, dx \,,
\end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2-4x}{x^2-2x+3}$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2x^2-4x}{x^2-2x+3}\,dx &= 2\int_0^1 dx - 6\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx \\
&= 2 - 6\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2+2}\,dx \\
&= 2 - 6\int_{-1}^0 \frac{1}{(\sqrt{2})^2+t^2}\,dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t = x-1\text{)} \\
&= 2 - \frac{6}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{t=-1}^{t=0} \\
&= 2 - 3\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -0,6\,.
\end{aligned}$$

■

6. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}}\,, \quad x > 0\,.$$

Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.

Λύση. Είναι

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}} = \int_0^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}} - \int_0^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}}\,,$$

οπότε $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{8x^3+2x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \\
&= \frac{2\sqrt{x^3+x} - \sqrt{8x^3+2x}}{\sqrt{8x^3+2x}\cdot\sqrt{x^3+x}} \\
&= \frac{-2x(2x^2-1)}{\sqrt{8x^3+2x}\cdot\sqrt{x^3+x}\left(2\sqrt{x^3+x}+\sqrt{8x^3+2x}\right)} \\
&= \frac{-2(2x^2-1)}{\sqrt{x}\sqrt{8x^2+2}\cdot\sqrt{x^2+1}\left(2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{8x^2+2}\right)}
\end{aligned}$$

και επομένως $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$. Επειδή για $x > 0$

$$0 < f(x) \le \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{x}{\sqrt{x^3+x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. ■

7. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, συνάρτηση κλάσης C^1. Δείξτε ότι

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)| \leq \int_a^b |f'(t)|\, dt + \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|\, dt\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $|f(x_1)| = \min\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$ και $|f(x_2)| = \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$, τότε

$$|f(x_2)| \leq |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_1)|\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
|f(x_2)| &= |(f(x_2) - f(x_1)) + f(x_1)| \\
&\leq |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_1)| \\
&= \left|\int_{x_1}^{x_2} f'(t)\, dt\right| + |f(x_1)| \\
&\leq \int_{x_1}^{x_2} |f'(t)|\, dt + \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|\, dt \\
&\leq \int_a^b |f'(t)|\, dt + \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|\, dt\,.
\end{aligned}$$

■

8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x(\arctan x)^2\, dx\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\int x(\arctan x)^2\, dx &= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int x^2 \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx \\
&\qquad\qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{-1+(1+x^2)}{1+x^2} \arctan x\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 + \int \frac{1}{1+x^2} \arctan x\, dx - \int \arctan x\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 + \frac{1}{2}(\arctan x)^2 - \int \arctan x\, dx \\
&= \frac{x^2+1}{2}(\arctan x)^2 - x\arctan x + \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \\
&\qquad\qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= \frac{x^2+1}{2}(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\int_0^1 x(\arctan x)^2\,dx = (\arctan 1)^2 - \arctan 1 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

■

9. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt\,.$$

Υπόδειξη. Αντικατάσταση $u = \ln t$

Λύση. Είναι

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt = \int_{\ln x}^{\ln(x^2)} \frac{e^u}{u}\,du = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^u}{u}\,du \qquad \text{(αντικατάσταση } u = \ln t\text{)}$$

(i) $x > 1$. Επειδή οι συναρτήσεις $f(u) = e^u$ και $g(u) = \frac{1}{u}$ είναι μη αρνητικές και συνεχείς στο διάστημα $[\ln x, 2\ln x]$, από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα

$$\int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^u}{u}\,du = e^{\xi_x}\int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{1}{u}\,du = e^{\xi_x}[\ln(2\ln x) - \ln(\ln x)] = e^{\xi_x}\ln 2\,,$$

για κάποιο ξ_x με $\ln x \le \xi_x \le 2\ln x$. Τότε $\lim_{x\to 1^+}\xi_x = 0$ και επομένως

$$\lim_{x\to 1^+}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt = \lim_{x\to 1^+} e^{\xi_x}\ln 2 = \ln 2\,.$$

(ii) $0 < x < 1$. Επειδή

$$\int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^u}{u}\,du = \int_{2\ln x}^{\ln x} -\frac{e^u}{u}\,du\,,$$

οι συναρτήσεις $f(u) = e^u$ και $g(u) = -\frac{1}{u}$ είναι μη αρνητικές και συνεχείς στο διάστημα $[2\ln x, \ln x]$ και παρόμοια έχουμε

$$\int_{2\ln x}^{\ln x} -\frac{e^u}{u}\,du = e^{\xi_x}\int_{2\ln x}^{\ln x} -\frac{1}{u}\,du = e^{\xi_x}[-\ln(\ln x) + \ln(2\ln x)] = e^{\xi_x}\ln 2\,,$$

για κάποιο ξ_x με $2\ln x \le \xi_x \le \ln x$. Τότε $\lim_{x\to 1^-}\xi_x = 0$ και επομένως

$$\lim_{x\to 1^-}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt = \lim_{x\to 1^-} e^{\xi_x}\ln 2 = \ln 2\,.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt = \ln 2\,.$$

■

10. Δείξτε ότι
$$\lim_{x\to 0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^x\,dt=\frac{\pi}{2}\,.$$

Υπόδειξη. Έστω $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$. Για την απόδειξη χρησιμοποιείστε τα παρακάτω βήματα:

(i) Για κάθε $x>0$
$$0\le\int_0^{\varepsilon}(\sin t)^x\,dt\le\varepsilon\,.$$

(ii) Για κάθε $x>0$
$$\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)(\sin\varepsilon)^x\le\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^x\,dt\le\frac{\pi}{2}-\varepsilon\,.$$

(iii) Επειδή $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)(\sin\varepsilon)^x=\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(0,\delta)$ είναι
$$\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)(\sin\varepsilon)^x>\frac{\pi}{2}-2\varepsilon\,.$$

(iv) Να συμπεράνετε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(0,\delta)$ είναι
$$\frac{\pi}{2}-2\varepsilon<\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^x\,dt\le\frac{\pi}{2}\,.$$

Λύση. Έστω $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$. Για κάθε $x>0$ είναι
$$0\le\int_0^{\varepsilon}(\sin t)^x\,dt\le\varepsilon\,.$$

Επειδή η $y(t)=(\sin t)^x$, $x>0$, είναι αύξουσα στο διάστημα $\left[\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right]$, έχουμε
$$\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)(\sin\varepsilon)^x\le\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^x\,dt\le\frac{\pi}{2}-\varepsilon\,.$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)(\sin\varepsilon)^x=\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(0,\delta)$ είναι
$$\left|\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)(\sin\varepsilon)^x-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right|=\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)(\sin\varepsilon)^x<\varepsilon\,,$$

οπότε
$$\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)(\sin\varepsilon)^x>\frac{\pi}{2}-2\varepsilon\,.$$

Επομένως, για κάθε $x\in(0,\delta)$ είναι
$$\frac{\pi}{2}-2\varepsilon<\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^x\,dt=\int_0^{\varepsilon}(\sin t)^x\,dt+\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^x\,dt\le\frac{\pi}{2}\,.$$

Έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (0, \delta)$ είναι

$$\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon < \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \, dt < \frac{\pi}{2} + 2\varepsilon \Leftrightarrow \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \, dt - \frac{\pi}{2} \right| < 2\varepsilon$$

και άρα

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \, dt = \frac{\pi}{2} \, .$$

$\blacksquare$

1.3 Ακαδημαϊκό έτος 2012–13

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου συνάρτησης, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{x\to -1}\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)=3\,.$$

Δηλαδή για κάθε $\varepsilon>0$ να βρεθεί $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in D:=(-\infty,0]\cup[3,\infty)$ με $0<|x+1|<\delta$ να ισχύει

$$\left|\sqrt{x^2-3x}-x-3\right|<\varepsilon\,.$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι το -1 είναι $\sigma.\sigma$ του D. Για κάθε $x\in D$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x^2-3x}-x-3\right| &= \frac{\left|(x^2-3x)-(x+3)^2\right|}{\left|\sqrt{x^2-3x}+x+3\right|}\\ &= 9\frac{|x+1|}{\left|\sqrt{x^2-3x}+x+3\right|}\,.\end{aligned}$$

Όμως για κάθε $x\in D$ είναι $\sqrt{x^2-3x}+x+3>1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x}>-(x+2)$. Επομένως,

$$\left|\sqrt{x^2-3x}-x-3\right|<9|x+1|\,.$$

Για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$ επιλέγουμε το $\delta=\varepsilon/3$. Τότε, για κάθε $x\in D$ με $0<|x+1|<\delta$,

$$\left|\sqrt{x^2-3x}-x-3\right|<9|x+1|<\varepsilon$$

και επομένως $\lim_{x\to-1}(\sqrt{x^2-3x}-x)=3$. ■

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\,.\end{cases}$$

(α') Αποδείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

(β') Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $g : \left[0, \frac{2}{\pi}\right] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ και ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε

$$|g(x)| \leq C\sqrt{x} \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right).$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση fg είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$.

Λύση.

(α') Έστω $x_n = 1/2n\pi$ και $y_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε $x_n, y_n \to 0$, ενώ

$$f(x_n) = \cos 2n\pi = 1 \text{ και } f(y_n) = \cos(2n\pi + \pi/2) = 0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή $f(x_n) \to 1$ και $f(y_n) \to 0$. Επομένως το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

(β') – Η fg είναι γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο ανοικτό διάστημα $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ και επομένως είναι συνεχής συνάρτηση στο $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$.

– Από την υπόθεση είναι $f(0)g(0) = 0$. Επειδή

$$|f(x)g(x)| = |\cos(1/x)g(x)| \leq |g(x)| \leq C\sqrt{x} \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right),$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)g(x) = 0 = f(0)g(0)$ και επομένως η fg είναι από δεξιά συνεχής στο 0.

– Από την υπόθεση είναι $f(2/\pi)g(2/\pi) = \cos(\pi/2)g(2/\pi) = 0$. Επειδή

$$|f(x)g(x)| = |\cos(1/x)g(x)| \leq |\cos(1/x)|C\sqrt{x} \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right)$$

και $\lim_{x\to(2/\pi)^-} |\cos(1/x)|C\sqrt{x} = 0$, έπεται ότι

$$\lim_{x\to(2/\pi)^-} f(x)g(x) = 0 = f\left(\frac{2}{\pi}\right) g\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

Επομένως η fg είναι από αριστερά συνεχής στο σημείο $\frac{2}{\pi}$.

Άρα η fg είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$

■

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 1 & \text{αν } x \text{ άρρητος}. \end{cases}$$

Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{R}$ στα οποία η f είναι συνεχής.

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$, x σταθερό. Αν (ρ_n) είναι ακολουθία ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \rho_n = x$, τότε $\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = \lim_{n\to\infty} \rho_n^3 = x^3$. Αν (α_n) είναι ακολουθία άρρητων αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = x$, τότε $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = 1$.

Είναι $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\rho_n)$ αν και μόνο αν $x^3 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$. Επομένως το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις συνεπάγεται ότι η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1. Είναι $f(1) = 1^3 = 1$ και επομένως

$$|f(x) - f(1)| = |f(x) - 1| \leq \max\{|x^3 - 1|, 0\} = |x^3 - 1|\,.$$

Από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ και κατά συνέπεια η f είναι συνεχής στο 1. ■

4. Διατυπώστε το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες και το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις.

   (α΄) Έστω $f, g : [a,b] \to (0,\infty)$ συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) > f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι

   $$\text{υπάρχει } \lambda > 1, \text{ τέτοιο ώστε } g(x) \geq \lambda f(x) \text{ για κάθε } x \in [a,b]\,. \tag{1.4}$$

   Υπόδειξη. Έστω η (1.4) δεν ισχύει. Τότε,

   $$\text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^* \text{ υπάρχει } x_n \in [a,b], \text{ τέτοιο ώστε } g(x_n) < \left(1 + \frac{1}{n}\right) f(x_n)\,.$$

   (β΄) Με κατάλληλο αντιπαράδειγμα αποδείξτε ότι η (α΄) δεν ισχύει αν αντικαταστήσουμε το $[a,b]$ με το ανοικτό διάστημα (a,b).

Λύση.

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες: Κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις: Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$.

(α΄) Η απόδειξη θα γίνει με την απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι η (1.4) δεν ισχύει. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $x_n \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$g(x_n) < \left(1 + \frac{1}{n}\right) f(x_n) . \tag{1.5}$$

Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και επομένως από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) με $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$. Είναι $a \le x_{k_n} \le b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κατά συνέπεια το $x_0 \in [a, b]$. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, από το θεώρημα μεταφοράς $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$ και $\lim_{n\to\infty} g(x_{k_n}) = g(x_0)$. Επομένως από τη (1.5) έπεται ότι

$$g(x_0) \le f(x_0) . \tag{άτοπο}$$

(β΄) Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$ στο $(0, 1)$. Είναι $x > x^2$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Όμως δεν υπάρχει $\lambda > 1$, τέτοιο ώστε $x \ge \lambda x^2$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Πράγματι, αν $x \ge \lambda x^2$ για κάθε $x \in (0, 1)$, τότε

$$\lim_{x\to 1^-} x \ge \lambda \cdot \lim_{x\to 1^-} x^2 \text{ και κατά συνέπεια } \lambda \le 1 .$$

■

5. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $\lim_{x\to-\infty} f(x) \ge 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) < 0$. Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f είναι γνήσια αύξουσα και επομένως

$$f(x) < f(x_0) \text{ για κάθε } x < x_0 .$$

Τότε,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \le f(x_0) < 0 . \tag{άτοπο}$$

Άρα, $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ■

6. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή $(a - \delta, a + \delta)$ του $a \in \mathbb{R}$. Αν η f' δεν είναι συνεχής στο a, δείξτε ότι ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια $f'(a+) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$ και $f'(a-) = \lim_{x\to a^-} f'(x)$ δεν υπάρχει.

Υπόδειξη. Αν και τα δύο πλευρικά όρια $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, $\lim_{x\to a^-} f'(x)$ υπάρχουν, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x) = f'(a)$, δηλαδή η f' είναι συνεχής στο a.

Λύση.

- Έστω ότι το όριο $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ υπάρχει, δηλαδή είναι πραγματικός αριθμός. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, a+h]$, $h < \delta$, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a+\theta h)\,, \text{ για κάποιο } \theta \in (0,1)\,.$$
Επειδή το όριο $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ υπάρχει, είναι $\lim_{h\to 0^+} f'(a+\theta h) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$ και επομένως
$$f'(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} f'(a+\theta h) = \lim_{x\to a^+} f'(x)\,.$$
Δηλαδή $f'(a) = f'(a+)$.
Σημείωση. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον κανόνα L'Hôpital. Πράγματι,
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} f'(a+h) && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= \lim_{x\to a^+} f'(x)\,. \end{aligned}$$
- Αν το όριο $\lim_{x\to a^-} f'(x)$ υπάρχει, τότε παρόμοια αποδεικνύεται ότι $f'(a) = f'(a-)$.

Επομένως, αν και τα δύο πλευρικά όρια $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, $\lim_{x\to a^-} f'(x)$ υπάρχουν, τότε
$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x) = f'(a)\,.$$
Δηλαδή η f' είναι συνεχής στο a που είναι άτοπο.
Άρα τουλάχιστον ένα από τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, $\lim_{x\to a^-} f'(x)$ δεν υπάρχει. ■

7. Έστω η συνάρτηση $f : (a,b) \to (-1,1)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) με $b - a \geq 4$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$, τέτοιο ώστε
$$|f'(\xi)| < \sqrt{1-(f(\xi))^2}\,.$$

Υπόδειξη. Θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $F(x) := \arcsin f(x)$, $x \in (a,b)$.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $F(x) := \arcsin f(x)$, $x \in (a,b)$. Έστω $x_1, x_2 \in (a,b)$ με $a < x_1 < x_2 < b$. Τότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε

$$F(x_2) - F(x_1) = F'(\xi)(x_2 - x_1) \Leftrightarrow \arcsin f(x_2) - \arcsin f(x_1) = \frac{f'(\xi)}{\sqrt{1-(f(\xi))^2}}(x_2 - x_1)\,.$$

Επειδή $-\pi/2 < \arcsin f(x_1)$, $\arcsin f(x_2) < \pi/2$, είναι $-\pi < \arcsin f(x_2) - \arcsin f(x_1) < \pi$ και ισοδύναμα $|\arcsin f(x_2) - \arcsin f(x_1)| < \pi$. Επομένως

$$\pi > |\arcsin f(x_2) - \arcsin f(x_1)| = \frac{|f'(\xi)|}{\sqrt{1-(f(\xi))^2}}(x_2 - x_1)$$

και κατά συνέπεια

$$\frac{|f'(\xi)|}{\sqrt{1-(f(\xi))^2}} < \frac{\pi}{x_2 - x_1}\,.$$

Επειδή $b - a \geq 4$, μπορούμε να επιλέξουμε τα $x_1, x_2 \in (a,b)$ έτσι ώστε $x_2 - x_1 > \pi$. Τότε,

$$\frac{|f'(\xi)|}{\sqrt{1-(f(\xi))^2}} < \frac{\pi}{\pi} = 1 \Leftrightarrow |f'(\xi)| < \sqrt{1-(f(\xi))^2}\,.$$

■

8. Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ και η f'' υπάρχει στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$. Αν

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad \text{και } f(1) = 1\,,$$

να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $|f''(\xi)| \geq 4$.

Υπόδειξη. Εφαρμογή του τύπου Taylor για $x = 1/2$ με $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$.

Πρακτική εφαρμογή: Αν ο χρόνος ενός αθλητή των $100m$ είναι $10\,\mathrm{sec}$, τότε κάποια χρονική στιγμή η επιτάχυνση του αθλητή είναι τουλάχιστον $4m/\sec^2$.

Λύση. Για κάθε $x \in [0,1]$ από τον τύπο Taylor έχουμε

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2\,, \text{ για κάποιο } \xi \in (0,1)\,.$$

Για $x = 1/2$ με $x_0 = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= f(0) + f'(0)\frac{1}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{f''(\xi_1)}{8}\,, \quad \text{για κάποιο } \xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

ενώ για $x = 1/2$ με $x_0 = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= f(1) + f'(1)\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 \\ &= 1 + \frac{f''(\xi_2)}{8}, \quad \text{για κάποιο } \xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

Τότε

$$\frac{f''(\xi_1)}{8} = 1 + \frac{f''(\xi_2)}{8} \Leftrightarrow f''(\xi_1) - f''(\xi_2) = 8$$

και επομένως

$$8 = |f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| \le |f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|.$$

Από την παραπάνω ανισότητα έπεται ότι είτε $|f''(\xi_1)| \ge 4$ ή $|f''(\xi_2)| \ge 4$. ■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

1. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f(x) = 1/x^2$ στο διάστημα $[a, b]$ με $0 < a < b$. Έστω

$$P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\} \text{ διαμέριση του } [a, b], \text{ όπου } x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \ k = 0, 1, \dots, n$$

και έστω $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n\}$ με $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}x_k} \in [x_{k-1},\, x_k]$, $k = 1, \dots, n$. Αν

$$S(f, P_n, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

είναι το άθροισμα Riemann της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P_n και στην επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ, είναι γνωστό ότι

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k).$$

Δείξτε ότι

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{k-1}x_k} \\
&= \lim_{n\to\infty} (b-a)n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[na+(k-1)(b-a)]\,[na+k(b-a)]} \\
&= \lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{na+(k-1)(b-a)} - \frac{1}{na+k(b-a)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left[\frac{1}{na} - \frac{1}{na+n(b-a)}\right] \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\,.
\end{aligned}$$

■

2. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0,1]$, να αποδειχθεί ότι το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{16n}{k^2+2kn+5n^2} = 2\pi - 8\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 2,574\,.$$

Λύση. Από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{16n}{k^2+2kn+5n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{16}{(k/n)^2+2(k/n)+5} \\
&= 16 \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx\,,
\end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $f(x) = 1/(x^2+2x+5)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
16 \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx &= 16 \int_0^1 \frac{1}{4+(x+1)^2}\,dx \\
&= 16 \int_1^2 \frac{1}{2^2+t^2}\,dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t = x+1\text{)} \\
&= 8\,\arctan \frac{t}{2}\Big|_{t=1}^{t=2} \\
&= 8\arctan 1 - 8\arctan\frac{1}{2} = 2\pi - 8\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 2,574\,.
\end{aligned}$$

■

3. Αν η συνάρτηση $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, είναι συνεχής και άρτια, να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x}\, dx &= \int_{-a}^{0} \frac{f(x)}{1+e^x}\, dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^x}\, dx \\
&= -\int_a^0 \frac{f(-t)}{1+e^{-t}}\, dt + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^x}\, dx && \text{(αντικατάσταση } x=-t\text{)} \\
&= \int_0^a \frac{e^t f(t)}{1+e^t}\, dt + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^x}\, dx && (f \text{ άρτια}) \\
&= \int_0^a \frac{(1+e^x) f(x)}{1+e^x}\, dx = \int_0^a f(x)\, dx\,.
\end{aligned}$$

■

4. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ότι η παράγωγος f' είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[1, x]$, για κάθε $x \geq 1$. Αν το ακέραιο μέρος $[x] = m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι

$$\begin{aligned}
\int_1^x [t] f'(t)\, dt &= \sum_{k=1}^{m-1} \int_k^{k+1} [t] f'(t)\, dt + \int_m^x m f'(t)\, dt \\
&= m f(x) - \sum_{k=1}^{m} f(k) = [x] f(x) - \sum_{n \leq x} f(n)\,.
\end{aligned}$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι για $k \leq t < k+1$, $k \in \mathbb{N}$, είναι $[t] = k$. Επίσης για $m \leq t \leq x$, όπου $m = [x]$, είναι $[t] = m$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_1^x [t] f'(t)\, dt &= \sum_{k=1}^{m-1} \int_k^{k+1} [t] f'(t)\, dt + \int_m^x m f'(t)\, dt \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \int_k^{k+1} k f'(t)\, dt + \int_m^x m f'(t)\, dt \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} k \int_k^{k+1} f'(t)\, dt + m \int_m^x f'(t)\, dt \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} k \left(f(k+1) - f(k)\right) + m \left(f(x) - f(m)\right) \\
&= m f(x) - \sum_{k=1}^{m} f(k) = [x] f(x) - \sum_{n \leq x} f(n)\,.
\end{aligned}$$

■

5. Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Να αποδειχθεί ότι
$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx\,.$$

Λύση. Επειδή η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, η f είναι γνήσια μονότονη και κατά συνέπεια η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής και γνήσια μονότονη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $I = f([a, b])$ με άκρα τα $f(a)$ και $f(b)$. Τότε,
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= xf(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b xf'(x)\,dx && \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\
&= bf(b) - af(a) - \int_a^b f^{-1}(f(x))f'(x)\,dx\\
&= bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(u)\,du && \text{(αντικατάσταση } u = f(x)\text{)}\\
&= bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

■

6. Αν η φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, να αποδειχθεί ότι
$$\lim_{x\to 0^+} \int_{a+x}^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Λύση. Έστω $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Τότε,
$$\begin{aligned}
\left|\int_{a+x}^b f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| &= \left|\int_{a+x}^b f(t)\,dt + \int_b^a f(t)\,dt\right|\\
&= \left|\int_{a+x}^a f(t)\,dt\right|\\
&= \left|\int_a^{a+x} f(t)\,dt\right|\\
&\leq \int_a^{a+x} |f(t)|\,dt\\
&\leq \int_a^{a+x} M\,dt\\
&= Mx \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0\,.
\end{aligned}$$

Άρα,
$$\lim_{x\to 0^+} \int_{a+x}^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

■

7. Αν $a > 0$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^\pi t^a\cos^2(xt)\,dt = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\int_0^\pi t^a(1+\cos(2xt))\,dt = \frac{\pi^{a+1}}{2(a+1)}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi t^a\cos^2(xt)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^\pi t^a(1+\cos(2xt))\,dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi t^a\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi t^a\cos(2xt)\,dt\\
&= \frac{\pi^{a+1}}{2(a+1)} + \frac{1}{4x}\int_0^\pi t^a\frac{d}{dt}(\sin(2xt))\,dt\\
&= \frac{\pi^{a+1}}{2(a+1)} + \frac{1}{4x}\,t^a\sin(2xt)\big|_{t=0}^{t=\pi} - \frac{a}{4x}\int_0^\pi t^{a-1}\sin(2xt)\,dt\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\
&= \frac{\pi^{a+1}}{2(a+1)} + \frac{\pi^a}{4x}\sin(2\pi x) - \frac{a}{4x}\int_0^\pi t^{a-1}\sin(2xt)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση. Αν $0 < a < 1$, τότε

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to0^+} t^{a-1}\sin(2xt) &= \lim_{t\to0^+}\frac{\sin(2xt)}{t^{1-a}}\\
&= \frac{2x}{1-a}\lim_{t\to0^+}\frac{\cos(2xt)}{t^{-a}} \qquad\text{(κανόνας L'Hôpital)}\\
&= \frac{2x}{1-a}\lim_{t\to0^+} t^a\cos(2xt) = 0
\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi t^{a-1}\sin(2xt)\,dt$ υπάρχει.

Επειδή

$$\left|\frac{\pi^a}{4x}\sin(2\pi x)\right| \le \frac{\pi^a}{4x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

και

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a}{4x}\int_0^\pi t^{a-1}\sin(2xt)\,dt\right| &\le \frac{a}{4x}\int_0^\pi |t^{a-1}\sin(2xt)|\,dt\\
&\le \frac{a}{4x}\int_0^\pi t^{a-1}\,dt\\
&= \frac{\pi^a}{4x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0\,,
\end{aligned}$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi^a}{4x}\sin(2\pi x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{4x}\int_0^\pi t^{a-1}\sin(2xt)\,dt = 0\,.$$

Άρα

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^\pi t^a\cos^2(xt)\,dt = \frac{\pi^{a+1}}{2(a+1)}\,.$$

■

8. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lambda_1,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda_2\,,\quad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\,.$$

Αν $a>0$, για κάθε $r,R\in\mathbb{R}$ αποδείξτε ότι

$$\int_r^R \left(f(x+a)-f(x)\right)\,dx = \int_R^{R+a} f(x)\,dx - \int_r^{r+a} f(x)\,dx$$

και στη συνέχεια υπολογίστε το όριο

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to-\infty}} \int_r^R \left(f(x+a)-f(x)\right)\,dx\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_r^R \left(f(x+a)-f(x)\right)\,dx &= \int_r^R f(x+a)\,dx - \int_r^R f(x)\,dx\\
&= \int_{r+a}^{R+a} f(t)\,dt - \int_r^R f(x)\,dx \qquad (\text{αντικατάσταση } t=x+a)\\
&= \int_R^{R+a} f(x)\,dx - \int_R^{r+a} f(x)\,dx - \int_r^R f(x)\,dx\\
&= \int_R^{R+a} f(x)\,dx - \int_r^{r+a} f(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα έχουμε

$$\int_R^{R+a} f(x)\,dx - \int_r^{r+a} f(x)\,dx = af(\xi_R) - af(\eta_r)\,,$$

για κάποια ξ_R,η_r με $R\le\xi_R\le R+a$ και $r\le\eta_r\le r+a$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to-\infty}} \int_r^R \left(f(x+a)-f(x)\right)\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_R^{R+a} f(x)\,dx - \lim_{r\to-\infty}\int_r^{r+a} f(x)\,dx\\
&= a\lim_{R\to\infty} f(\xi_R) - a\lim_{r\to-\infty} f(\eta_r)\\
&= a\lambda_2 - a\lambda_1 = a(\lambda_2-\lambda_1)\,.
\end{aligned}$$

■

9. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογιστεί το όριο
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{n\sin x}{x+n}\,dx\,.$$

Λύση. *1ος τρόπος*. Επειδή οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{n}{x+n}$ και $g(x)=\sin x$ είναι μη αρνητικές και συνεχείς στο διάστημα $[0,\pi]$, από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα(παραπέμπουμε στο [27])
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{n\sin x}{x+n}\,dx &= \frac{n}{\xi+n}\int_0^{\pi}\sin x\,dx\\ &= \frac{2n}{\xi+n}\,,\end{aligned}$$
για κάποιο ξ με $0\le\xi\le\pi$. Όμως $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\xi+n}=2$ και επομένως
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{n\sin x}{x+n}\,dx=2\,.$$

2ος τρόπος. Είναι
$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi}\frac{n\sin x}{x+n}\,dx-\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right| &= \left|\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{x+n}\,dx\right|\\ &= \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{x+n}\,dx\le\frac{\pi^2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\,.\end{aligned}$$

Άρα,
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{n\sin x}{x+n}\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2\,.$$

■

10. Αν η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδειχθεί ότι
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)\,dx=f(0)\,.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ είναι
$$\int_0^1 f(x^n)\,dx=\int_0^{1/\sqrt{n}}f(x^n)\,dx+\int_{1/\sqrt{n}}^1 f(x^n)\,dx\,.$$

Αποδείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/\sqrt{n}}f(x^n)\,dx=0\quad\text{και}\quad\lim_{n\to\infty}\int_{1/\sqrt{n}}^1 f(x^n)\,dx=f(0)\,.$$

Απόδειξη. Αν $M = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$, τότε

$$\left| \int_0^{1/\sqrt{n}} f(x^n)\, dx \right| \leq \int_0^{1/\sqrt{n}} |f(x^n)|\, dx \leq \int_0^{1/\sqrt{n}} M\, dx = \frac{M}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/\sqrt{n}} f(x^n)\, dx = 0\,.$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα έχουμε

$$\int_{1/\sqrt{n}}^1 f(x^n)\, dx = f(\xi_n^n) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\,,$$

για κάποιο ξ_n με $0 \leq \xi_n \leq 1 - 1/\sqrt{n}$. Επειδή $0 \leq \xi_n^n \leq (1-1/\sqrt{n})^n$ και $\lim_{n\to\infty}(1-1/\sqrt{n})^n = 0$, είναι $\lim_{n\to\infty} \xi_n^n = 0$ και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/\sqrt{n}}^1 f(x^n)\, dx = f(0)\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0)\,.$$

□

1.4 Ακαδημαϊκό έτος 2011–12

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου συνάρτησης, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x-2}{x^2+2}=\frac{1}{3}\,.$$

Δηλαδή για κάθε $\varepsilon>0$ να βρεθεί $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $0<|x-1|<\delta$ να ισχύει

$$\left|\frac{x^3+2x-2}{x^2+2}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon\,.$$

Λύση. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3+2x-2}{x^2+2}-\frac{1}{3}\right| &= \frac{\left|3x^3-x^2+6x-8\right|}{3\,(x^2+2)}\\ &= \frac{3x^2+2x+8}{3\,(x^2+2)}\,|x-1|\,. \quad (3x^3-x^2+6x-8=(x-1)(3x^2+2x+8))\end{aligned}$$

Παίρνουμε $|x-1|<1 \Leftrightarrow 0<x<2$. Τότε,

$$3x^2+2x+8<3\cdot 2^2+2\cdot 2+8=24\,,\quad 3(x^2+2)>3(0^2+2)=6$$

και κατά συνέπεια

$$\left|\frac{x^3+2x-2}{x^2+2}-\frac{1}{3}\right|<\frac{24}{6}|x-1|=4|x-1|\,.$$

Για κάθε $\varepsilon>0$ επιλέγουμε

$$\delta(\varepsilon):=\min\left\{1,\,\frac{1}{4}\varepsilon\right\}\,.$$

Τότε,

$$\text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ με } 0<|x-1|<\delta(\varepsilon) \text{ είναι } \left|\frac{x^3+2x-2}{x^2+2}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon\,.$$

■

2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f:(-a,a)\setminus\{0\}\to(0,\infty)$ είναι τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)=2\,.$$

Αποδείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει και ισούται με 1.

Λύση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : (-a, a) \setminus \{0\} \to (0, \infty)$ με

$$g(x) := f(x) + \frac{1}{f(x)}\,.$$

Επειδή

$$(f(x) - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x)^2 - 2f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2\,,$$

είναι $g(x) \geq 2$ για κάθε $x \in (-a, a) \setminus \{0\}$. Από τον ορισμό της g έχουμε ότι

$$f(x)^2 - g(x)f(x) + 1 = 0$$

και επομένως

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) \pm \sqrt{g(x)^2 - 4}\right)\,.$$

Άρα, για κάθε $x \in (-a, a) \setminus \{0\}$ είναι

$$\frac{1}{2}\left(g(x) - \sqrt{g(x)^2 - 4}\right) \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\left(g(x) + \sqrt{g(x)^2 - 4}\right)\,.$$

Επειδή $\lim_{x\to 0} g(x) = 2$, από τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει και ισούται με 1. ■

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 0 & \text{αν } x \text{ ρητός}\,. \end{cases}$$

Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{R}$ στα οποία η f είναι συνεχής.

Λύση. Η συνάρτηση f είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \neq \pm 2$. Πράγματι, αν (ρ_n) είναι ακολουθία ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \rho_n = x_0$, τότε $\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = 0$. Αν (α_n) είναι ακολουθία άρρητων αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = x_0$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n^2 - 4) = x_0^2 - 4 \neq 0\,.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\rho_n)$ και από το θεώρημα μεταφοράς η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \neq \pm 2$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημεία -2 και 2. Επειδή $\pm 2 \in \mathbb{Q}$ και $f(\pm 2) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$|f(x) - f(\pm 2)| = |f(x)| \leq \left|x^2 - 4\right| .$$

Επειδή $\lim_{x\to\pm 2}(x^2 - 4) = 0$, από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι $\lim_{x\to\pm 2} f(x) = f(\pm 2)$ και κατά συνέπεια η f είναι συνεχής στα σημεία ± 2. ■

4. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$|f(x) - f(y)| \geq a|x - y| \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}\,,$$

όπου $a > 0$. Δείξτε ότι η f είναι $1 - 1$ και επί.

Λύση. Από την υπόθεση είναι προφανές ότι η f είναι $1 - 1$. Επίσης από την υπόθεση έχουμε

$$|f(x) - f(0)| \geq a|x| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και $1 - 1$, η f είναι γνήσια μονότονη.

− Έστω η f είναι *γνήσια αύξουσα*. Τότε για κάθε $x > 0$

$$f(x) - f(0) \geq ax \Leftrightarrow f(x) \geq ax + f(0)$$

και επομένως $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Για κάθε $x < 0$ έχουμε

$$f(0) - f(x) \geq -ax \Leftrightarrow f(x) \leq f(0) + ax$$

και επομένως $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι f είναι επί (Έστω $c \in \mathbb{R}$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(\alpha) < c < f(\beta)\,.$$

Από το θεώρημα Bolzano ή ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = c$).

− Αν η f είναι *γνήσια φθίνουσα* η απόδειξη είναι ανάλογη. ■

5. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|} & \text{αν } x \neq 0\,, \\ \frac{\pi}{2} & \text{αν } x = 0\,, \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Λύση. Η συνάρτηση f είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$. Επειδή

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \arctan\frac{1}{|x|} = \frac{\pi}{2} = f(0)\,,$$

η f είναι συνεχής στο 0.

Για κάθε $x \neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη. Για $x > 0$ είναι

$$f'(x) = \left(\arctan\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = -\frac{1}{1+x^2}\,,$$

ενώ για $x < 0$

$$f'(x) = \left(\arctan\frac{1}{-x}\right)' = -\left(\arctan\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Επειδή

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(1/x)-\pi/2}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = -1 \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}$$

και

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\arctan(-1/x)-\pi/2}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1/x^2}{1+1/x^2} = 1\,, \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}$$

f δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν ■

6. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{n}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)f'(0)\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{n}\right)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x} + \frac{f(x/2)-f(0)}{x} + \cdots + \frac{f(x/n)-f(0)}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x} + \frac{1}{2}\frac{f(x/2)-f(0)}{x/2} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{f(x/n)-f(0)}{x/n}\right)\\
&= f'(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \cdots + \frac{1}{n}f'(0)\\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)f'(0)\,.
\end{aligned}$$

■

7. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $y = f(x) = \arcsin x + 2\arccos x$ είναι γνήσια μονότονη στο διάστημα $(-1,1)$. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη της f, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{y\to\pi}\frac{f^{-1}(y)}{y-\pi}.$$

Λύση. Είναι

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0\,, \quad \text{για κάθε } x \in (-1,1).$$

Επομένως η συνεχής συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $(-1,1)$.

Ως γνωστόν $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ και η f^{-1} είναι συνεχής και γνήσια φθίνουσα. Επειδή $f(0) = \pi$ και η f^{-1} είναι συνεχής, αν το $y \to \pi$ τότε το $x \to 0$. Άρα,

$$\lim_{y\to\pi}\frac{f^{-1}(y)}{y-\pi} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-\pi} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)} = -\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2} = -1\,.$$

■

8. (**Ανισότητα Kolmogorov**) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και f''' είναι φραγμένες με

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| = M_0 \text{ και } \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f'''(x)\right| = M_3\,.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor αποδείξτε ότι η f' είναι φραγμένη με

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f'(x)\right| \le \frac{1}{2}\sqrt[3]{9M_0^2M_3}\,.$$

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$, x σταθερό. Για κάθε $h > 0$ από τον τύπο Taylor έχουμε

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}h^3\,, \text{ για κάποιο } \xi_1 \in (x, x+h)$$

και

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{3!}h^3\,, \text{ για κάποιο } \xi_2 \in (x-h, x)\,.$$

Τότε,

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{h^3}{3!}\left[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right]$$

και κατά συνέπεια

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{2\cdot 3!}\left[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right]\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right| &\le \frac{|f(x+h)-f(x-h)|}{2h} + \frac{h^2}{2\cdot 3!}\left|f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right| \\ &\le \frac{|f(x+h)|+|f(x-h)|}{2h} + \frac{h^2}{2\cdot 3!}\left(\left|f'''(\xi_1)\right|+\left|f'''(\xi_2)\right|\right) \\ &\le \frac{M_0+M_0}{2h} + \frac{h^2}{2\cdot 3!}(M_3+M_3) \\ &= \frac{M_0}{h} + \frac{M_3}{6}h^2 .\end{aligned}$$

Αν $\varphi(h) := \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_3}{6}h^2$, τότε

$$\varphi'(h) = -\frac{M_0}{h^2} + \frac{M_3}{3}h, \text{ οπότε } \varphi'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{3\frac{M_0}{M_3}} .$$

Είναι

$$\min_{h>0}\varphi(h) = \varphi\left(\sqrt[3]{3\frac{M_0}{M_3}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{9M_0^2M_3} .$$

Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$\left|f'(x)\right| \le \frac{1}{2}\sqrt[3]{9M_0^2M_3}$$

και κατά συνέπεια $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|f'(x)\right| \le \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{9M_0^2M_3}$. ■

9. Έστω $f(x) = x\sin x^2$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $y = \sin x^2$ σε δυναμοσειρά να υπολογιστεί η παράγωγος $f^{(15)}(0)$.

Λύση. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, οπότε

$$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} .$$

Επομένως,

$$f(x) = x\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} .$$

Όμως το ανάπτυγμα της f σε σειρά Malaurin είναι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} .$$

Άρα,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} .$$

Επειδή το ανάπτυγμα της f σε δυναμοσειρά είναι μοναδικό, έχουμε

$$\frac{f^{(15)}(0)}{15!} = (-1)^3 \frac{1}{(2\cdot 3+1)!} \Leftrightarrow f^{(15)}(0) = -\frac{15!}{7!}\,.$$

■

*10. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη.

(α΄) Αν

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)+f'(x)\big)=0\,,$$

τότε το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει και ισούται με το μηδέν.

Για την απόδειξη χρησιμοποιείστε τα παρακάτω βήματα:

(i) Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή $\lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x))=0$,

$$\text{υπάρχει } A>0 \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } x>A \text{ είναι } \big|f(x)+f'(x)\big|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

(ii) Έστω $x>A$. Αν $g(x):=e^x f(x)$, χρησιμοποιώντας το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής (θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy) για τις συναρτήσεις $y=g(x)$ και $y=e^x$ αποδείξτε ότι

$$|g(x)-g(A)|<\frac{\varepsilon}{2}\left|e^x-e^A\right|\,.$$

(iii) Να συμπεράνετε ότι για κάθε $x>A$ είναι

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\left|f(A)e^{A-x}\right|$$

(iv) Αποδείξτε ότι υπάρχει $B>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x>B$ είναι

$$\left|f(A)e^{A-x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Αν $\Delta=\max\{A,B\}$, τότε για κάθε $x>\Delta$ είναι $|f(x)|<\varepsilon$.

(β΄) Αν

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)+f'(x)\big)=1\,,$$

τότε $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$.

Απόδειξη. (α΄) Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής βήματα:

(i) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x)) = 0$,

$$\text{υπάρχει } A > 0 \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } x > A \text{ είναι } \left|f(x)+f'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

(ii) Έστω $x > A$. Αν $g(x) := e^x f(x)$, από το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής (θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy) για τις συναρτήσεις $y = g(x)$ και $y = e^x$, παραπέμπουμε στο [27], υπάρχει $c \in (A, x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{g(x)-g(A)}{e^x - e^A} = \frac{g'(c)}{e^c} \Leftrightarrow \frac{g(x)-g(A)}{e^x - e^A} = \frac{e^c f(c) + e^c f'(c)}{e^c} = f(c) + f'(c)\,.$$

Επομένως,

$$|g(x) - g(A)| = \left|f(c)+f'(c)\right| \left|e^x - e^A\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left|e^x - e^A\right|\,. \qquad \text{(από το } (i))$$

(iii) Από το (ii) έπεται ότι $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\left|e^x - e^A\right| + |g(A)|$ και κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}
|f(x)| &< e^{-x}\left[\frac{\varepsilon}{2}|e^x - e^A| + |f(A)e^A|\right] \\
&= \frac{\varepsilon}{2}|1 - e^{A-x}| + |f(A)e^{A-x}| \\
&= \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{A-x}) + |f(A)e^{A-x}| \qquad (e^A < e^x \Leftrightarrow e^{A-x} < 1) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + |f(A)e^{A-x}|\,.
\end{aligned}$$

(iv) Επειδή $\lim_{x\to\infty}|f(A)e^{A-x}| = 0$, υπάρχει $B > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(A)e^{A-x}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } x > B\,.$$

Αν $\Delta = \max\{A, B\}$, τότε για κάθε $x > \Delta$ έχουμε

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Άρα, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(β΄) Είναι $\lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x)) = 1$ και ισοδύναμα

$$\lim_{x\to\infty}\left[(f(x)-1) + (f(x)-1)'\right] = 0\,.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας το (α΄) έχουμε ότι $\lim_{x\to\infty}[(f(x)-1)] = 0$ και ισοδύναμα $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

□

2η Σειρά Ασκήσεων στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

1. Έστω $x > 1$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt$$
και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η λύση της εξίσωσης
$$\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$
είναι $x = 4/3$.

Λύση. Είναι
$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt &= \int_1^x \frac{1}{t^2\sqrt{1+1/t^2}}\,dt\\ &= -\int_1^{1/x} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du \qquad \text{(αντικατάσταση } u = 1/t\text{)}\\ &= \int_{1/x}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du\\ &= \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\Big|_{u=1/x}^{1}\\ &= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln\left(1/x+\sqrt{1+1/x^2}\right).\end{aligned}$$

Επομένως
$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) &\Leftrightarrow \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln\left(1/x+\sqrt{1+1/x^2}\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow \ln\left(1/x+\sqrt{1+1/x^2}\right) = \ln 2\\ &\Leftrightarrow 1/x+\sqrt{1+1/x^2} = 2\\ &\Leftrightarrow \sqrt{1+1/x^2} = 2-1/x\\ &\Leftrightarrow 1+1/x^2 = (2-1/x)^2\\ &\Leftrightarrow 4/x = 3 \Leftrightarrow x = 4/3\,.\end{aligned}$$

Σημείωση. (i) Αν χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση $u = \sqrt{1+t^2}$, τότε
$$\int \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int \frac{1}{u^2-1}\,du = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}+1}\right).$$

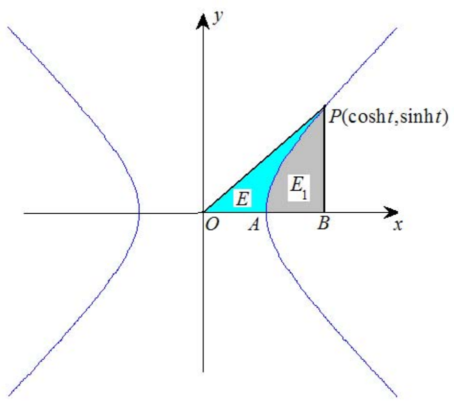
(ii) Αν χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση $t = \tan\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, $\theta \neq 0$, τότε

$$\int \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int \frac{1}{\sin\theta}\,d\theta\,.$$

■

2. Έστω $P(\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, σημείο του δεξιού κλάδου της υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$ με εξίσωση $y = \sqrt{x^2-1}$, $x \geq 1$. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του χωρίου του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x^2-1}$, τον άξονα Ox και το ευθ. τμήμα OP ισούται με $t/2$.

Λύση.



Το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου OBP ισούται με $\dfrac{1}{2}\cosh t \sinh t = \dfrac{\sinh 2t}{4}$ ενώ το εμβαδόν του χωρίου E_1 είναι

$$\begin{aligned}
|E_1| &= \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2-1}\,dx \\
&= \int_0^t \sqrt{\cosh^2 u - 1}\cdot \sinh u\,du && (\text{αντικατάσταση } x=\cosh u) \\
&= \int_0^t \sinh^2 u\,du && (\cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u) \\
&= \int_0^t \frac{\cosh 2u - 1}{2}\,du && (\cosh 2u = 1 + 2\sinh^2 u) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \cosh 2u\,du - \frac{1}{2}\int_0^t du \\
&= \left.\frac{\sinh 2u}{4}\right|_{u=0}^{u=t} - \frac{t}{2} \\
&= \frac{\sinh 2t}{4} - \frac{t}{2}\,.
\end{aligned}$$

Άρα, το εμβαδόν του χωρίου E είναι

$$|E| = \frac{\sinh 2t}{4} - |E_1| = \frac{\sinh 2t}{4} - \left(\frac{\sinh 2t}{4} - \frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2}\,.$$

■

3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^x \cos t\,dt \ \text{ και } \int_0^x \frac{1}{\cos t}\,dt,\ 0 \le x < \pi/2\,.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz αποδείξτε ότι για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ είναι

$$\sin x \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) \ge 2x^2\,. \tag{1.6}$$

Λύση. Επειδή

$$\begin{aligned}
\sin(-x)\ln\left(\frac{1+\sin(-x)}{1-\sin(-x)}\right) &= -\sin x \ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) \\
&= -\sin x\left[-\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right] = \sin x \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\,,
\end{aligned}$$

η συνάρτηση στο αριστερό μέλος της (1.6) είναι άρτια. Επίσης και η $y = 2x^2$ είναι άρτια. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την (1.6) για $x \in [0, \pi/2)$. Παρατηρούμε ότι για $0 \le x < \pi/2$ είναι

$$\int_0^x \cos t\,dt = \sin x$$

και

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{\cos t}\,dt &= \int_0^x \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt \\
&= \int_0^x \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt \\
&= \int_0^{\sin x} \frac{1}{1-u^2}\,du \qquad\qquad (\text{αντικατάσταση } u=\sin t) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sin x}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\Bigg|_{u=0}^{u=\sin x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right).
\end{aligned}$$

Τότε, για $0 \le x < \pi/2$ από την ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε

$$x^2 = \left(\int_0^x \sqrt{\cos t}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos t}}\,dt\right)^2 \le \left(\int_0^x \cos t\,dt\right)\left(\int_0^x \frac{1}{\cos t}\,dt\right) = \sin x\cdot\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right).$$

■

4. Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$t-\frac{t^3}{3} < \arctan t < t\,, \quad \text{για κάθε } t>0\,.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ανισότητες να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{3x}\frac{\arctan t}{t^2}\,dt = \ln 3\,.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $x>0$ είναι

$$\int_x^{3x}\frac{\arctan t}{t^2}\,dt - \ln 3 = \int_x^{3x}\frac{\arctan t - t}{t^2}\,dt\,.$$

Λύση. Για $x>0$ είναι

$$\begin{aligned}
\int_x^{3x}\frac{\arctan t}{t^2}\,dt - \ln 3 &= \int_x^{3x}\frac{\arctan t}{t^2}\,dt - (\ln 3x - \ln x) \\
&= \int_x^{3x}\frac{\arctan t}{t^2}\,dt - \int_x^{3x}\frac{1}{t}\,dt = \int_x^{3x}\frac{\arctan t - t}{t^2}\,dt\,.
\end{aligned}$$

Όμως για κάθε $t>0$ έχουμε

$$t-\frac{t^3}{3} < \arctan t < t \Leftrightarrow -\frac{t^3}{3} < \arctan t - t < 0 \text{ και κατά συνέπεια } \left|\frac{\arctan t - t}{t^2}\right| < \frac{t}{3}\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\left|\int_x^{3x}\frac{\arctan t}{t^2}\,dt-\ln 3\right| &= \left|\int_x^{3x}\frac{\arctan t-t}{t^2}\,dt\right|\\ &\leq \int_x^{3x}\left|\frac{\arctan t-t}{t^2}\right|\,dt\\ &\leq \int_x^{3x}\frac{t}{3}\,dt=\frac{4x^2}{3}\xrightarrow[x\to0^+]{}0\,.\end{aligned}$$

Άρα, $\lim_{x\to0^+}\int_x^{3x}\left(\arctan t/t^2\right)\,dt=\ln 3$. ■

5. Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,\infty)$ είναι συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$f(x)\leq a\int_0^x f(t)\,dt \text{ για κάθε } x\in[0,1]\,.$$

Να βρεθεί η συνάρτηση f.

Λύση. Έστω $F(x):=\int_0^x f(t)\,dt$, $x\in[0,1]$. Η συνάρτηση F είναι μη αρνητική και από την υπόθεση έχουμε

$$F'(x)\leq aF(x)\Leftrightarrow\left(F(x)e^{-ax}\right)'\leq 0 \text{ για κάθε } x\in[0,1]\,.$$

Αν $g(x):=F(x)e^{-ax}$, η συνάρτηση g είναι μη αρνητική και φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$. Επειδή $g(0)=F(0)=0$, η $g(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Τότε θα είναι και $F(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και επομένως

$$F(1)=\int_0^1 f(t)\,dt=0\,.$$

Όμως η f είναι μη αρνητική και συνεχής στο διάστημα $[0,1]$. Άρα, $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$. ■

6. (α΄) Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0,1]$ να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\,.$$

(β΄) Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x\,,\quad \text{για κάθε } x>0\,.$$

Από τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^3 < \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\,. \tag{1.7}$$

Χρησιμοποιώντας την (1.7) και το (α΄), να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right).$$

Λύση.

(α΄) Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

(β΄) Για $x = \frac{n}{n^2+k^2}$, από τις ανισότητες έχουμε

$$\frac{n}{n^2+k^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^3 < \sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right) < \frac{n}{n^2+k^2}$$

και κατά συνέπεια

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^3 < \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\,.$$

Όμως

$$0 < \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^3 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3} = n\cdot\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^3 = 0\,.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}\,,$$

από την (1.7) έπεται ότι και

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$

■

7. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$|f'(x)| \leq M < +\infty\,, \quad \forall x \in [a,b]\ .$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, θεωρείστε τη διαμέριση $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ του $[a,b]$ με

$$x_k - x_{k-1} \leq \frac{1}{b-a}\,, \quad k = 1,2,\ldots,n\,.$$

Έστω $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$. Αποδείξτε ότι

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{M}{2}\,.$$

Υπόδειξη. Αποδείξτε πρώτα ότι

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq M \int_{x_{k-1}}^{x_k} |x - \xi_k|\ dx \leq \frac{M}{2}(x_k - x_{k-1})^2\,.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x) - f(\xi_k)\right)\,dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(c_x)\,(x - \xi_k)\ dx\,,$$

για κάποιο c_x μεταξύ ξ_k και x. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| &\leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left|f'(c_x)\right| |x - \xi_k|\ dx \\
&\leq M \int_{x_{k-1}}^{x_k} |x - \xi_k|\ dx \\
&= M \left[\int_{x_{k-1}}^{\xi_k} (\xi_k - x)\,dx + \int_{\xi_k}^{x_k} (x - \xi_k)\,dx \right] \\
&= \frac{M}{2} \left[(\xi_k - x_{k-1})^2 + (x_k - \xi_k)^2 \right] \\
&\leq \frac{M}{2} \left[(\xi_k - x_{k-1}) + (x_k - \xi_k) \right]^2 = \frac{M}{2}(x_k - x_{k-1})^2\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right)\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \\
&\le \frac{M}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})^2 \\
&\le \frac{M}{2(b-a)}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \qquad \left(x_k - x_{k-1} \le \tfrac{1}{b-a}\right) \\
&= \frac{M}{2(b-a)}(x_n - x_0) = \frac{M}{2}\,.
\end{aligned}
$$

□

8. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx\,.$$

Λύση. Επειδή οι συναρτήσεις $f(x) = x^n$ και $g(x) = \frac{1}{1+x}$ είναι μη αρνητικές και συνεχείς στο διάστημα $[0,1]$, από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα(παραπέμπουμε στο [27])

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx &= \xi^n \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \\
&= \xi^n \ln(1+x)\big|_{x=0}^{x=1} = \xi^n \ln 2\,,
\end{aligned}
$$

για κάποιο ξ με $0 \le \xi \le 1$.

- Είναι $\xi \ne 1$. Πράγματι, αν $\xi = 1$ τότε

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1-x^n}{1+x}\,dx = 0\,.$$

  Άτοπο, επειδή $\frac{1-x^n}{1+x} > 0$ για κάθε $x \in [0,1)$ και αυτό συνεπάγεται ότι $\int_0^1 \frac{1-x^n}{1+x}\,dx > 0$.

- Επομένως $0 \le \xi < 1$. Τότε $\lim_{n\to\infty}\xi^n = 0$ και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\xi^n \ln 2 = 0\,.$$

■

9. Έστω τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$(i) \quad \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2\sin^2 x}\,dx\,, \quad (ii) \quad \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,dx\,.$$

Εξετάστε αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν και αν ναι να υπολογιστούν.

Λύση.

(i) Είναι

$$\frac{x}{1+x^2\sin^2 x} \geq \frac{x}{1+x^2}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln(1+x^2) = \infty\,. \qquad \text{(αποκλίνει)}$$

Επομένως, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2\sin^2 x}\,dx = \infty\,. \qquad \text{(αποκλίνει)}$$

(ii) Επειδή

$$0 < \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} < \frac{1}{\sqrt{e^x}} = e^{-x/2}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-x/2}\,dx = 2$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \left(1/\sqrt{e^x+1}\right)\,dx$ θα συγκλίνει. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,dx &= \int \frac{2}{t^2-1}\,dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t=\sqrt{e^x+1} \Leftrightarrow x = \ln(t^2-1)\text{)}\\
&= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\,dt\\
&= \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right)\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,dx &= \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1-1/\sqrt{e^x+1}}{1-1/\sqrt{e^x+1}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\\
&= \ln 1 + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\,.
\end{aligned}$$

■

1.5 Ακαδημαϊκό έτος 2010–11

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η Ομάδα ερωτήσεων τύπου σωστό–λάθος στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Δώστε κατάλληλο αντιπαράδειγμα στην περίπτωση που μια πρόταση είναι ψευδής.

1. Έστω η συνάρτηση $f : (-a, a) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $a > 0$. Τότε

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x\to 0} f(|x|) = \lambda.$$

Ψευδής. Αν $\lim_{x\to 0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to 0} f(|x|) = \lambda$. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του ορίου.

Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Αν $f(x) = [x]$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to 0} [|x|] = 0$ ενώ το $\lim_{x\to 0} [x]$ δεν υπάρχει. ∎

2. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\lim_{x\to +\infty} f(x)\, g(x) = +\infty$. Τότε είτε $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

Ψευδής. Αν $f(x) = -1$ και $g(x) = -x$, τότε

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -1\,, \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)\, g(x) = +\infty\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Υπάρχουν συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\lim_{x\to +\infty} f(x)\, g(x) = +\infty$ ενώ τα όρια $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ δεν υπάρχουν.

Πράγματι, αν $f(x) = 1 + x\cos^2 x$ και $g(x) = 1 + x\sin^2 x$, τότε

$$f(x)\, g(x) = 1 + x + x^2 \cos^2 x \sin^2 x \geq 1 + x\,.$$

Επομένως, $\lim_{x\to +\infty} f(x)\, g(x) = +\infty$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$f(n\pi) = 1 + n\pi,\ f(n\pi + \pi/2) = 1,\ g(n\pi) = 1, \text{ και } g(n\pi + \pi/2) = 1 + n\pi + \pi/2.$$

Τότε, $\lim_{n\to +\infty} n\pi = \lim_{n\to +\infty} (n\pi + \pi/2) = +\infty$. Επειδή

$$\lim_{n\to +\infty} f(n\pi) = +\infty \neq 1 = \lim_{n\to +\infty} f(n\pi + \pi/2)$$

και

$$\lim_{n\to+\infty} g(n\pi) = 1 \neq +\infty = \lim_{n\to+\infty} g(n\pi + \pi/2) ,$$

από το θεώρημα μεταφοράς τα όρια $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ δεν υπάρχουν. ∎

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι συνεχής, τότε και η f θα είναι συνεχής.

Ψευδής. Ένα αντιπαράδειγμα είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \geq 0 \\ -1 & \text{αν } x < 0 \, . \end{cases}$$

∎

4. Αν οι f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε κάποιο υποσύνολο $D \subseteq \mathbb{R}$, τότε οι $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, όπου

$$\max(f,g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} , \quad \min(f,g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \, .$$

Αληθής. Επειδή οι συναρτήσεις $f \pm g$, $|f - g|$ είναι συνεχείς, τότε και οι συναρτήσεις

$$\max(f,g) = \frac{f + g + |f - g|}{2} , \quad \min(f,g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

είναι συνεχείς. ∎

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε η f είναι μονότονη στο διάστημα $[0, a]$.

Ψευδής. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \, . \end{cases}$$

Αν $a > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$x_1 = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \in (0, a) \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{1}{2n\pi - \pi/2} \in (0, a) \, .$$

Επειδή $0 < x_1 < x_2$ και $f(0) = 0$, $f(x_1) = x_1 > 0$, $f(x_2) = -x_2 < 0$, η f δεν είναι μονότονη στο διάστημα $[0, a]$. ∎

6. Έστω η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $I = (-a, a)$, $a > 0$. Τότε η f είναι άρτια αν και μόνο αν η f' είναι περιττή.

Αληθής. Αν $g(x) := f(x) - f(-x)$, είναι $g(0) = 0$. Τότε,

$$f \text{ άρτια} \iff g = 0 \iff g \text{ σταθερή} \iff g' = 0 \iff f' \text{ περιττή} .$$

■

7. Έστω η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, τότε και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Ψευδής. Αν $f(x) = (1/x)\sin x^2$, τότε η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin x^2 + 2\cos x^2 .$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι $f'\left(\sqrt{2n\pi}\right) = 2$, $f'\left(\sqrt{2n\pi + \pi/2}\right) = -1/\sqrt{2n\pi + \pi/2}$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} f'\left(\sqrt{2n\pi}\right) = 2$ και $\lim_{n\to+\infty} f'\left(\sqrt{2n\pi + \pi/2}\right) = 0$, από το θεώρημα μεταφοράς συμπεραίνουμε ότι το $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ δεν υπάρχει. ■

8. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f'(0) = 1$. Τότε υπάρχει διάστημα $[-a, a]$, $a > 0$, στο οποίο η f είναι αύξουσα.

Αληθής. Επειδή η f' είναι συνεχής, υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [-a, a]$ είναι

$$\left|f'(x) - f'(0)\right| < 1 \Leftrightarrow \left|f'(x) - 1\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < f'(x) < 2 .$$

Δηλαδή για κάθε $x \in [-a, a]$ είναι $f'(x) > 0$ και κατά συνέπεια η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[-a, a]$. ■

9. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f'(0) = 1$. Τότε υπάρχει διάστημα $[-a, a]$, $a > 0$, στο οποίο η f είναι αύξουσα.

Ψευδής. Έστω η συνάρτηση

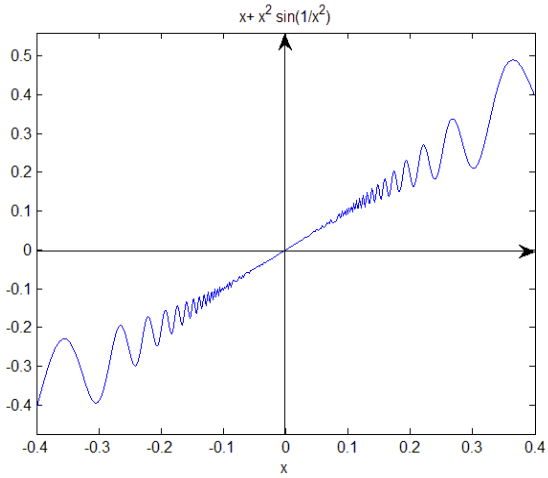
$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(1/x^2\right) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 . \end{cases}$$

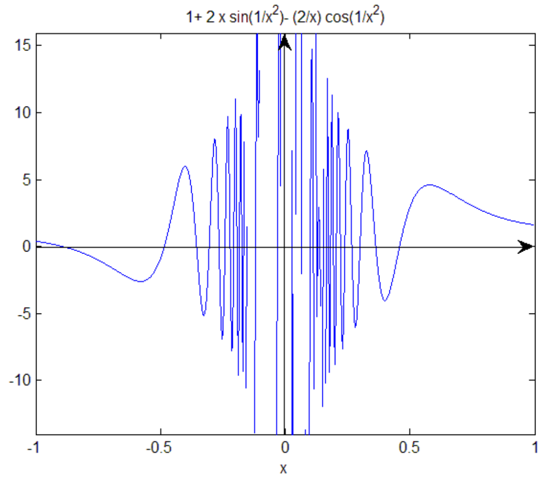
Είναι

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \left(1 + x\sin\left(1/x^2\right)\right) = 1$$

και

$$f'(x) = 1 + 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \text{για κάθε } x \neq 0.$$





Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $f'(0) = 1$.

Για κάθε $a > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $\pm\frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \in [-a, a]$. Επειδή

$$f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = 1 + 2\sqrt{2n\pi} > 0 \quad \text{και} \quad f'\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = 1 - 2\sqrt{2n\pi} < 0\,,$$

η f δεν μπορεί να είναι αύξουσα στο διάστημα $[-a, a]$, $a > 0$.

Σημείωση. Για $x \neq 0$ η παράγωγος

$$f'(x) = 1 + 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

παρουσιάζει έντονες ταλαντώσεις πλησίον του μηδενός. Επομένως, η f' δεν διατηρεί το πρόσημο πλησίον του μηδενός και κατά συνέπεια η f δεν μπορεί να είναι αύξουσα. Η συνάρτηση f δεν είναι **συνεχώς παραγωγίσιμη**. Πράγματι, επειδή

$$\lim_{n\to\infty} f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + 2\sqrt{2n\pi}\right) = +\infty$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f'\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - 2\sqrt{2n\pi}\right) = -\infty\,,$$

από το θεώρημα μεταφοράς το όριο $\lim_{x\to 0} f'(x)$ δεν υπάρχει και επομένως η f' δεν είναι συνεχής στο 0. Αν η f' ήταν συνεχής στο μηδέν, τότε η f θα ήταν συνεχώς παραγωγίσιμη και επομένως η f θα ήταν αύξουσα σε μια περιοχή του μηδενός (βλέπε το προηγούμενο αποτέλεσμα). ■

10. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ότι η παράγωγος f' είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}_+$. Αν η ακολουθία $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ τείνει στο $+\infty$, δηλαδή $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$, τότε και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

    Αληθής. Έστω $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$. Αν $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}_+$, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$|f(x) - f([x])| \leq M\,|x - [x]| < M$$

    και επομένως

$$f(x) > f([x]) - M\,.$$

    Επειδή $[x] = n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και από την υπόθεση $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$, θα είναι και $\lim_{x\to+\infty} f([x]) = +\infty$. Άρα, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. ■

11. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ότι η παράγωγος f' είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}_+$. Αν η ακολουθία $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, έστω $\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$.

    Ψευδής. Αν $f(x) = \sin(\pi x)$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η παράγωγος $f'(x) = \pi\cos(\pi x)$ είναι φραγμένη. Επειδή $f(n) = \sin(n\pi) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$. Όμως, το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sin(\pi x)$ δεν υπάρχει. ■

12. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Τότε, για κάθε $A \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = A$.

    Σημείωση. Η f' μπορεί να μην είναι συνεχής.

    Αληθής. Έστω $A \in \mathbb{R}$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f'(\alpha) < A < f'(\beta)\,.$$

    Τότε, από το θεώρημα Darboux υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = A$. ■

1η Σειρά Ασκήσεων στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου συνάρτησης, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{2x+2}-2} = 2\,.$$

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ να βρεθεί $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [-1,\infty)\setminus\{1\}$ με $0 < |x-1| < \delta$ να ισχύει

$$\left|\frac{x-1}{\sqrt{2x+2}-2} - 2\right| < \varepsilon\,.$$

Λύση. Για κάθε $x \geq -1$, $x \neq 1$, είναι

$$\begin{aligned}\left|\frac{x-1}{\sqrt{2x+2}-2} - 2\right| &= \left|\frac{x+3-2\sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+2}-2}\right| \\ &= \frac{|x-1|^2}{\left|\sqrt{2x+2}-2\right|\left(x+3+2\sqrt{2x+2}\right)} \\ &= \frac{|x-1|^2\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{2\,|x-1|\left(x+3+2\sqrt{2x+2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2x+2}+2}{2\left(x+3+2\sqrt{2x+2}\right)}\,|x-1| \\ &< |x-1|\ .\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε το $\delta = \varepsilon$, τότε για κάθε $x \in [-1,\infty)\setminus\{1\}$ με $0 < |x-1| < \delta$ είναι

$$\left|\frac{x-1}{\sqrt{2x+2}-2} - 2\right| < \varepsilon\,.$$

■

2. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$, δηλαδή

$$f(x+T) = f(x)\ , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει, να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή. Ισοδύναμα, αν η f δεν είναι σταθερή τότε το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ δεν υπάρχει.

Εφαρμογή. Υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to\infty} \sin x \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\infty} \cos x;$$

Υπόδειξη. Αν το $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$ υπάρχει και η f δεν είναι σταθερή, είναι $f(a) \neq \lambda$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Το γεγονός ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$ οδηγεί σε άτοπο.

Λύση. Θα αποδείξουμε ότι αν το $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$ υπάρχει, τότε η T-περιοδική συνάρτηση f είναι σταθερή. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι σταθερή, έστω $a \in \mathbb{R}$ με $f(a) \neq \lambda$. Τότε, για $\varepsilon = |f(a) - \lambda|$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > M$ έχουμε

$$|f(x) - \lambda| < |f(a) - \lambda| .$$

Παίρνουμε τώρα το $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε $a + nT > M \Leftrightarrow n > (M - a)/T$. Τότε,

$$|f(a + nT) - \lambda| < |f(a) - \lambda| \Leftrightarrow |f(a) - \lambda| < |f(a) - \lambda| \qquad \text{(η f είναι T-περιοδική)}$$

που είναι άτοπο. Άρα, $f(a) = \lambda$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η f είναι σταθερή.

Εφαρμογή. Οι συναρτήσεις $y = \sin x$ και $y = \cos x$ είναι 2π-περιοδικές και δεν είναι σταθερές. Επομένως, τα όρια $\lim_{x\to\infty} \sin x$ και $\lim_{x\to\infty} \cos x$ δεν υπάρχουν. ∎

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ \sin|x| & \text{αν } x \text{ ρητός .} \end{cases}$$

Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{R}$ στα οποία η f είναι συνεχής.

Λύση. Η συνάρτηση f είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Πράγματι, αν (α_n) είναι ακολουθία άρρητων αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = x_0$, τότε $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = 0$. Αν (ρ_n) είναι ακολουθία ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \rho_n = x_0$, επειδή η $y = \sin|x|$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε $\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = \lim_{n\to\infty} \sin|\rho_n| = \sin|x_0| \neq 0$. Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\rho_n)$$

και από το θεώρημα μεταφοράς η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \neq k\pi$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή ο $k\pi$, $k \neq 0$, είναι άρρητος αριθμός και $f(0) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$|f(x) - f(k\pi)| = |f(x)| \leq |\sin|x|| = |\sin(|x| - |k\pi|)| \leq ||x| - |k\pi|| \leq |x - k\pi| .$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $\delta = \varepsilon > 0$, τοτε $|x - k\pi| < \delta$ συνεπάγεται ότι $|f(x) - f(k\pi)| < \varepsilon$. Άρα, η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ∎

4. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(0) = 1$ και

$$f(2x) - f(x) = x\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Λύση. Από τη σχέση $f(2x) - f(x) = x$ συνεπάγεται ότι

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
f(x) \quad &- f(x/2) = x/2\,,\\
f(x/2) \quad &- f(x/2^2) = x/2^2\,,\\
f(x/2^2) \quad &- f(x/2^3) = x/2^3\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f(x/2^{n-1}) &- f(x/2^n) = x/2^n\,.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) &= x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)\\
&= x\frac{1/2 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2}\\
&= x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).
\end{aligned}$$

Επομένως

$$f(x) - \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = x\,.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, τελικά έχουμε

$$f(x) - f(0) = x \Leftrightarrow f(x) - 1 = x \Leftrightarrow f(x) = x + 1\,.$$

Άρα $f(x) = x + 1$ είναι η μοναδική συνάρτηση. ■

5. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Υποθέτουμε ότι $f(a) < 0 < f(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει **μοναδικό** $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(c) = 0$.

Λύση. Από το θεώρημα Bolzano ή ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $c \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(c) = 0$. Για να αποδείξουμε ότι το c είναι μοναδικό, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $c_1, c_2 \in (a,b)$ με

$$a < c_1 < c_2 < b \text{ και } f(c_1) = f(c_2) = 0.$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχουν $d_1 \in (a, c_1)$ και $d_2 \in (c_1, c_2)$ τέτοια ώστε

$$f'(d_1) = \frac{f(c_1) - f(a)}{c_1 - a} = \frac{-f(a)}{c_1 - a} > 0 \quad \text{και} \quad f'(d_2) = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} = 0\,.$$

Είναι λοιπόν $d_1 < d_2$ και $f'(d_1) > f'(d_2)$. Αυτό όμως μας οδηγεί σε άτοπο επειδή από την υπόθεση είναι $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$ και επομένως η f' είναι αύξουσα στο (a,b). ■

6. Έστω η συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty\,.$$

Να αποδειχθεί ότι είτε το όριο $\lim_{x\to b^-} f'(x)$ δεν υπάρχει ή $\lim_{x\to b^-} f'(x) = \infty$.

Υπόδειξη. Αν $\lim_{x\to b^-} f'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f'(x)| < 1 + |\lambda|\,, \quad \forall x \in (b - \delta, b)\,.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(y)| \leq M\,, \quad \forall y \in (b - \delta, b)\,.$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to b^-} f'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f'(x) - \lambda| < \varepsilon$, για κάθε $x \in (b-\delta, b)$. Παίρνοντας $\varepsilon = 1$ έχουμε

$$|f'(x)| = |(f'(x) - \lambda) + \lambda| \leq |f'(x) - \lambda| + |\lambda| < 1 + |\lambda|\,, \quad \text{για κάθε } x \in (b-\delta, b).$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής για κάθε $y \in (b - \delta, b)$

$$f(y) = f(b-\delta) + f'(\xi)\,(y - (b-\delta))\,, \quad \text{για κάποιο } \xi \in (b-\delta, y)$$

και κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} |f(y)| &= \left|f(b-\delta) + f'(\xi)\,(y - (b-\delta))\right| \\ &\leq |f(b-\delta)| + |f'(\xi)|\,|y - (b-\delta)| \\ &< |f(b-\delta)| + (1 + |\lambda|)\,\delta\,. \end{aligned}$$

Επομένως αν $M := |f(b-\delta)| + (1+|\lambda|)\delta > 0$, τότε

$$|f(y)| < M\,, \quad \text{για κάθε } y \in (b-\delta, b)\,.$$

Άτοπο, επειδή από την υπόθεση $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Άρα, είτε το $\lim_{x\to b^-} f'(x)$ δεν υπάρχει ή $\lim_{x\to b^-} f'(x) = \infty$. ■

7. Να αποδειχθεί ότι

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\left|\arctan x\right|\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Λύση. Επειδή $-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} \le 1$, η συνάρτηση $y = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ είναι καλά ορισμένη. Είναι

$$\begin{aligned}
\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) &= \arccos\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) \qquad (x=\tan\theta,\ \theta\in[0,\pi/2) \text{ ή } \theta\in(-\pi/2,0]) \\
&= \arccos\left(\cos 2\theta\right) \\
&= \begin{cases} 2\theta = 2\arctan x & \text{αν } \theta\in[0,\pi/2) \\ \arccos\left(\cos\left(-2\theta\right)\right) = -2\theta = -2\arctan x & \text{αν } \theta\in(-\pi/2,0]\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \begin{cases} 2\arctan x & \text{αν } x \ge 0 \\ -2\arctan x & \text{αν } x \le 0\,. \end{cases}$$

■

8. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi x+1}{2x+1}\right)\,.$$

Λύση. Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\arctan x - \frac{\pi x+1}{2x+1}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0\,,$$

είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi x+1}{2x+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x - (\pi x+1)/(2x+1)}{x^{-1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1/\left(1+x^2\right) - (\pi-2)/(2x+1)^2}{-x^{-2}}\\ &\qquad\qquad\text{(κανόνας L'Hôpital)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\pi-6)\,x^4 - 4x^3 + (\pi-3)\,x^2}{(1+x^2)\,(2x+1)^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\pi-6) - 4/x + (\pi-3)/x^2}{(1/x^2+1)\,(2+1/x)^2} = \frac{\pi-6}{4}\,.\end{aligned}$$

■

9. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$y = f(x) = \int_1^{x^2}\frac{\sqrt{t} - \arctan\sqrt{t}}{\ln(t+2)}\,dt$$

είναι γνήσια μονότονη στο διάστημα $[0,\infty)$. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη της f, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{y\to0}\frac{f^{-1}(y)-1}{y}\,.$$

Λύση. Είναι

$$f'(x) = 2x\frac{x-\arctan x}{\ln(x^2+2)}\,,\quad \text{για κάθε } x\ge 0.$$

Αν $\varphi(x) := x - \arctan x$, είναι

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \ge 0\,,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, για κάθε $x\ge0$ είναι $\varphi(x)\ge\varphi(0)$ και ισοδύναμα $x-\arctan x\ge0$. Άρα, $f'(x)\ge0$ για κάθε $x\ge0$ (είναι $f'(x)=0$ αν και μόνο αν $x=0$). Δηλαδή η συνεχής συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[0,\infty)$.

Ως γνωστόν $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και η f^{-1} είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα. Επειδή

$f(1) = 0$ και η f^{-1} είναι συνεχής, αν το $y \to 0$ τότε το $x \to 1$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{f^{-1}(y) - 1}{y} &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{f(x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{f'(x)} && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(x^2+2\right)}{2x\,(x - \arctan x)} \\
&= \frac{\ln 3}{2\,(1-\pi/4)} = \frac{2\ln 3}{4-\pi}\,.
\end{aligned}$$

■

10. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και τέτοια ώστε

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2},\ f(1) = \frac{\pi}{2} \text{ και } f'(x) \geq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{για κάθε } x \in (-1,1).$$

Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \arcsin x$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

Λύση. Αν $g(x) := f(x) - \arcsin x$, η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0\,, \qquad \text{για κάθε } x \in (-1,1).$$

Επομένως η g είναι αύξουσα στο διάστημα $(-1,1)$. Επειδή η g είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$, η g είναι αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$ με

$$g(-1) = f(-1) - \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{και} \quad g(1) = f(1) - \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0\,.$$

Άρα $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \arcsin x$, για κάθε $x \in [-1,1]$. ■

11. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ότι η f'' είναι φραγμένη στο $(0,\infty)$. Αν το $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$ υπάρχει, να αποδειχθεί ότι $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
<u>*Υπόδειξη*</u>. Για $x, h \in (0,\infty)$ από τον τύπο Taylor είναι

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2\,,$$

για κάποιο ξ μεταξύ x και $x+h$.

Λύση. Έστω $|f''(x)| \leq M$ ($M > 0$) για κάθε $x \in (0,\infty)$. Για $x, h \in (0,\infty)$ από τον τύπο Taylor έχουμε

$$\left|f'(x)\right| = \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(\xi)\,h}{2}\right| \leq \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} + \frac{Mh}{2}\,.$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ παίρνουμε $h < \varepsilon / M$ οπότε

$$\left|f'(x)\right| < \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Επειδή $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$, είναι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

και επομένως υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{για κάθε } x > x_0\,.$$

Κατά συνέπεια για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left|f'(x)\right| < \varepsilon\,, \quad \text{για κάθε } x > x_0\,.$$

Άρα, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. ■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

1. Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Αν

$$\int_x^y f(t)\,dt = 0, \text{για κάθε } x, y \in [a, b] \text{ με } a \leq x < y \leq b,$$

δείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο $[a, b]$.

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in [a, b]$. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε

$$a \leq x_0 < x_0 + \frac{1}{n} \leq b\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0\,.$$

(Αν $x_0 = b$, τότε $a \leq x_0 - \frac{1}{n} < x_0$, για κάθε $n \geq n_0$). Από την υπόθεση και από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα είναι

$$0 = \int_{x_0}^{x_0+1/n} f(t)\,dt = f(\xi_n) \cdot \frac{1}{n}$$

οπότε $f(\xi_n) = 0$ για κάποιο ξ_n, με $x_0 \leq \xi_n \leq x_0 + 1/n$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$ και η f είναι συνεχής, έχουμε

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = 0\,.$$

Άρα, η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο $[a, b]$. □

2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι

(α΄) αν $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι περιττή,

(β΄) αν $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι άρτια.

Υπόδειξη. Να αποδειχθεί ότι (α΄) $\int_x^y (f(-t)+f(t))\;dt = 0$ και (β΄) $\int_x^y (f(-t)-f(t))\;dt = 0$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. (α΄) *1ος τρόπος*. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{x} f(t)\;dt &= \int_{-x}^{0} f(t)\;dt + \int_{0}^{x} f(t)\;dt \\ &= -\int_{x}^{0} f(-u)\;du + \int_{0}^{x} f(t)\;dt \qquad\qquad (\text{αντικατάσταση } t=-u) \\ &= \int_{0}^{x} (f(-t)+f(t))\;dt\,.\end{aligned}$$

Από την υπόθεση έπεται ότι

$$\int_{0}^{x} (f(-t)+f(t))\;dt = 0\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι

$$\int_{x}^{y} (f(-t)+f(t))\;dt = \int_{x}^{0} (f(-t)+f(t))\;dt + \int_{0}^{y} (f(-t)+f(t))\;dt = 0\,.$$

Άρα, από την άσκηση 1 έχουμε ότι $f(-t)+f(t) \equiv 0$. Ισοδύναμα, $f(-t) = -f(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η συνάρτηση f είναι περιττή.

2ος τρόπος. Από την υπόθεση, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\int_{-x}^{0} f(t)\;dt + \int_{0}^{x} f(t)\;dt = 0 \Leftrightarrow -\int_{0}^{-x} f(t)\;dt + \int_{0}^{x} f(t)\;dt = 0\,.$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, παραγωγίζοντας έχουμε

$$f(-x)+f(x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η f είναι περιττή συνάρτηση.

(β΄) *1ος τρόπος*. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt &= \int_{-x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt \\ &= -\int_{x}^{0} f(-u)\,du + \int_{0}^{x} f(t)\,dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t=-u\text{)} \\ &= \int_{0}^{x} f(-t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Από την υπόθεση έπεται ότι

$$\int_{0}^{x} f(-t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt \Leftrightarrow \int_{0}^{x} (f(-t) - f(t))\,dt = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι

$$\int_{x}^{y} (f(-t) - f(t))\,dt = \int_{x}^{0} (f(-t) - f(t))\,dt + \int_{0}^{y} (f(-t) - f(t))\,dt = 0\,.$$

Άρα, από την άσκηση 1 έχουμε ότι $f(-t) - f(t) \equiv 0$. Ισοδύναμα, $f(-t) = f(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η συνάρτηση f είναι άρτια.

2ος τρόπος. Από την υπόθεση, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\int_{-x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt \Leftrightarrow \int_{0}^{x} f(t)\,dt + \int_{0}^{-x} f(t)\,dt = 0\,.$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, παραγωγίζοντας έχουμε

$$f(x) - f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η f είναι άρτια συνάρτηση.

□

3. Αν η συνάρτηση f είναι θετική και συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, $a < b$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{a}^{b} \frac{f(x)}{f(x) + f(a+b-x)}\,dx\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}\,dx &= -\int_b^a \frac{f(a+b-t)}{f(a+b-t)+f(t)}\,dx \quad (\text{αντικατάσταση } t=a+b-x)\\ &= \int_a^b \frac{f(a+b-t)}{f(a+b-t)+f(t)}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{f(x)+f(a+b-x)}{f(x)+f(a+b-x)}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_a^b dx = \frac{b-a}{2}\,.\end{aligned}$$

■

4. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0,1]$ να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n^3+1^3}+\frac{1}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{1}{2n^3}\right)=\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}n^2\left(\frac{1}{n^3+1^3}+\frac{1}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{1}{2n^3}\right) &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(1/n)^3}+\frac{1}{2+(2/n)^3}+\cdots+\frac{1}{1+(n/n)^3}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^3}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),\end{aligned}$$

όπου $f(x)=\frac{1}{1+x^3}$. Επομένως, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n^3+1^3}+\frac{1}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{1}{2n^3}\right)=\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx-\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x-2}{1-x+x^2}\,dx\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx-\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(2x-1)-3}{1-x+x^2}\,dx\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx-\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x-1}{1-x+x^2}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt{3}/2\right)^2+(x-1/2)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{3}\ln(1+x)\Big|_{x=0}^{x=1}-\frac{1}{6}\ln\left(1-x+x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}\\ &= \frac{1}{3}\ln 2+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}\,.\end{aligned}$$

■

5. Δείξτε ότι
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{\pi}{6}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int_0^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\cos^2\theta\,(2\tan^2\theta+1)\sqrt{\tan^2\theta+1}}\,d\theta \\
&\qquad \text{(αντικατάσταση } x=\tan\theta,\ -\pi/2<\theta<\pi/2) \\
&= \int_0^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\cos\theta\,(2\tan^2\theta+1)}\,d\theta \\
&= \int_0^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta+1}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{t^2+1}\,dt \quad \text{(αντικατάσταση } t=\sin\theta,\ -\pi/2\le\theta\le\pi/2) \\
&= \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι
$$t=\sin\left(\tan^{-1}1/\sqrt{2}\right)=\frac{\tan\left(\tan^{-1}1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{\tan^2\left(\tan^{-1}1/\sqrt{2}\right)+1}}=\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{1/2+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Παρατήρηση. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε πρώτα την αντικατάσταση $x=\sinh y \Leftrightarrow y=\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ και στη συνέχεια $z=\tanh y$. ∎

6. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδειχθεί πρώτα ότι
$$\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt=\int_{\sin^2 x}^1\arccos\sqrt{1-u}\,du=\int_{\sin^2 x}^1\arcsin\sqrt{u}\,du$$
και στη συνέχεια ότι
$$\begin{aligned}
\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt &= \int_0^1\arcsin\sqrt{u}\,du \\
&= 2\int_0^1 v\arcsin v\,dv \\
&= 2\int_0^{\pi/2}\theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Λύση. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}\int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt &= -\int_1^{\sin^2 x} \arccos\sqrt{1-u}\, du \qquad \text{(αντικατάσταση } t = 1-u\text{)}\\ &= \int_{\sin^2 x}^1 \arccos\sqrt{1-u}\, du\,.\end{aligned}$$

Για κάθε $u \in [0,1]$ εύκολα αποδεικνύεται ότι $\arccos\sqrt{1-u} = \arcsin\sqrt{u}$. Επομένως,

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt = \int_{\sin^2 x}^1 \arcsin\sqrt{u}\, du\,.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt &= \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\, dt + \int_{\sin^2 x}^1 \arcsin\sqrt{u}\, du\\ &= \int_0^1 \arcsin\sqrt{u}\, du\\ &= 2\int_0^1 v \arcsin v\, dv \qquad \text{(αντικατάσταση } v = \sqrt{u}\text{)}\\ &= 2\int_0^{\pi/2} \theta \sin\theta\cos\theta\, d\theta\\ &\qquad \text{(αντικατάσταση } \theta = \arcsin v \Leftrightarrow v = \sin\theta\text{)}\\ &= \int_0^{\pi/2} \theta \sin 2\theta\, d\theta\\ &= -\frac{\theta}{2}\cos 2\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta\, d\theta\\ &\qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\ &= \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

■

7. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{a\to 0}\int_0^{\pi/2} \cos(a\sin x)\, dx\,.$$

Υπόδειξη.

$$\left|\int_0^{\pi/2} \cos(a\sin x)\, dx - \frac{\pi}{2}\right| = \int_0^{\pi/2} \left[1-\cos(a\sin x)\right]\, dx\,.$$

Λύση. Είναι

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^{\pi/2} \cos(a\sin x)\,dx - \frac{\pi}{2}\right| &= \left|\int_0^{\pi/2} \cos(a\sin x)\,dx - \int_0^{\pi/2} dx\right| \\
&= \left|\int_0^{\pi/2} \left[\cos(a\sin x) - 1\right]\,dx\right| \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[1 - \cos(a\sin x)\right]\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} 2\sin^2\left(\frac{a\sin x}{2}\right)\,dx \\
&\leq \int_0^{\pi/2} 2\left|\frac{a\sin x}{2}\right|^2\,dx \qquad (|\sin t| \leq |t|) \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx \xrightarrow[a\to 0]{} 0\,.
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$\lim_{a\to 0}\int_0^{\pi/2} \cos(a\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

■

8. Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^3}\,dx$$

συγκλίνει και στη συνέχεια να υπολογιστεί.

Λύση. Είναι

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^3}\,dx = \underbrace{\int_0^{1} \frac{\ln x}{(x+1)^3}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^3}\,dx}_{I_2}\,.$$

Αν $f(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^3}$ και $g_1(x) = |\ln x|$, τότε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|f(x)|}{g_1(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x+1)^3} = 1\,.$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 |\ln x|\,dx = -\int_0^1 \ln x\,dx = 1$ συγκλίνει, από γνωστό κριτήριο το I_1 θα συγκλίνει απόλυτα και επομένως θα συγκλίνει.

Επειδή για κάθε $x \geq 1$ είναι

$$\frac{\ln x}{(x+1)^3} < \frac{x}{(x+1)^3} < \frac{1}{(x+1)^2}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το I_2 θα συγκλίνει. Άρα το I συγκλίνει.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{(x+1)^3}\,dx &= -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx && \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\
&= -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx\\
&= -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2(x+1)}\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+1)^3}\,dx &= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2(x+1)}\right)\\
&\quad - \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\ln x}{2\,(x+1)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2(x+1)}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\ln x\left[1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right] - \frac{1}{2}\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^2} + \lim_{x\to 0^+} x\ln x - \frac{1}{2}\\
&= -\frac{1}{2}\,. && \text{(κανόνας L'Hôpital)}
\end{aligned}$$

■

---

9. (*προαιρετική άσκηση*). Αν η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1)\,.$$

Υπόδειξη.

$$n\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \frac{n}{n+1}f(1) + n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx\,.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned}
n\int_0^1 x^n f(x)\,dx &= n\int_0^1 x^n f(1)\,dx + n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx\\
&= nf(1)\int_0^1 x^n\,dx + n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx\\
&= \frac{n}{n+1}f(1) + n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \left| n \int_0^1 x^n f(x)\, dx - \frac{n}{n+1} f(1) \right| &= n \left| \int_0^1 x^n (f(x) - f(1))\, dx \right| \\ &\leq n \int_0^1 x^n |f(x) - f(1)|\, dx\,. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1, υπάρχει $\delta > 0$, $0 < \delta < 1$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [1-\delta, 1]$ είναι $|f(x) - f(1)| < \varepsilon/2$. Τότε,

$$\begin{aligned} n \int_0^1 x^n |f(x) - f(1)|\, dx &= n \int_0^{1-\delta} x^n |f(x) - f(1)|\, dx + n \int_{1-\delta}^1 x^n |f(x) - f(1)|\, dx \\ &\leq n \int_0^{1-\delta} x^n |f(x) - f(1)|\, dx + n \frac{\varepsilon}{2} \int_{1-\delta}^1 x^n\, dx \\ &= n \int_0^{1-\delta} x^n |f(x) - f(1)|\, dx + \frac{n}{n+1} \frac{\varepsilon}{2} \left[1 - (1-\delta)^{n+1}\right] \\ &< n \int_0^{1-\delta} x^n |f(x) - f(1)|\, dx + \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned}$$

Έστω $M = \max\{|f(x) - f(1)| : x \in [0,1]\}$. Τότε,

$$n \int_0^{1-\delta} x^n |f(x) - f(1)|\, dx \leq nM \int_0^{1-\delta} x^n\, dx = \frac{n}{n+1} M (1-\delta)^{n+1}\,.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} M(1-\delta)^{n+1} = 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ είναι

$$n \int_0^{1-\delta} x^n |f(x) - f(1)|\, dx \leq \frac{n}{n+1} M (1-\delta)^{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Επομένως για κάθε $n \geq n_0$ είναι

$$\left| n \int_0^1 x^n f(x)\, dx - \frac{n}{n+1} f(1) \right| < \varepsilon\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} f(1) = f(1)\,.$$

□

1.6 Ακαδημαϊκό έτος 2009–10

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Έστω η εξίσωση του Kepler [Johannes Kepler (1571–1630)]

$$x - \varepsilon \sin x = a\,, \quad \text{όπου } \varepsilon \in (0,1) \text{ και } a \in \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε την ακολουθία (x_n) με

$$x_0 = a \quad \text{και} \quad x_n = a + \varepsilon \sin x_{n-1}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι η (x_n) είναι συστολική ακολουθία και επομένως συγκλίνει, έστω $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Να αποδειχθεί ότι το ξ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης του Kepler.

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - x_n| &= \varepsilon\, |\sin x_n - \sin x_{n-1}| \\
&= 2\varepsilon \left|\sin\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)\right| \left|\cos\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)\right| \\
&\leq 2\varepsilon \left|\sin\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)\right| \\
&\leq 2\varepsilon \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right| = \varepsilon\, |x_n - x_{n-1}|\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.
\end{aligned}$$

Επομένως, η ακολουθία (x_n) είναι συστολική και κατά συνέπεια συγκλίνει, έστω $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Επειδή η $y = \sin x$ είναι συνεχής συνάρτηση, είναι

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a + \varepsilon \lim_{n\to\infty} \sin x_{n-1} = a + \varepsilon \sin\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) \text{ και επομένως } \xi = a + \varepsilon \sin\xi\,,$$

δηλαδή η ξ είναι λύση της εξίσωσης του Kepler. Η ξ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης του Kepler. Αν ξ_1 είναι μια άλλη λύση της εξίσωσης του Kepler, τότε

$$\begin{aligned}
|\xi - \xi_1| &= \varepsilon\, |\sin\xi - \sin\xi_1| \\
&= 2\varepsilon \left|\sin\left(\frac{\xi - \xi_1}{2}\right)\right| \left|\cos\left(\frac{\xi + \xi_1}{2}\right)\right| \\
&\leq 2\varepsilon \left|\sin\left(\frac{\xi - \xi_1}{2}\right)\right| \\
&\leq 2\varepsilon \left|\frac{\xi - \xi_1}{2}\right| \\
&< |\xi - \xi_1|\,, \qquad\qquad (\text{επειδή } 0 < \varepsilon < 1)
\end{aligned}$$

που είναι άτοπο. ∎

2. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \quad \text{όπου } a_n = 2\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(2-\frac{n-1}{n}\right).$$

Υπόδειξη. Να αποδειχθεί ότι

$$a_n \geq 2\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(2-\frac{n-1}{n}\right)\\
&= 2\left(1+1-\frac{1}{n}\right)\left(1+1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+1-\frac{n-1}{n}\right)\\
&= 2\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{n-2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n-(n-1)}{n}\right)\\
&\geq 2\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{2}{n}\left(1+2+\cdots+(n-1)\right)\\
&= \frac{2}{n}\cdot\frac{n\,(n-1)}{2} = n-1\,.
\end{aligned}$$

Επομένως, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0$ και κατά συνέπεια η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. ∎

3. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Λύση. Επειδή

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n-1}{n}\,,$$

είναι

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^{N}[\ln(n+1)-\ln n] - \sum_{n=2}^{N}[\ln n - \ln(n-1)] \\
&= [(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\cdots+(\ln(N+1)-\ln N)] \\
&\quad - [(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln N-\ln(N-1))] \\
&= [\ln(N+1)-\ln 2]-[\ln N-\ln 1] \\
&= \ln\left(\frac{N+1}{N}\right)-\ln 2 \\
&= \ln\left(1+\frac{1}{N}\right)-\ln 2 \xrightarrow[N\to\infty]{} -\ln 2\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2\,.$$

■

4. Να αποδειχθεί ότι

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = (-1)^n \sin\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$$

και να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &= \sin\left[\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)+n\pi\right] \\
&= \sin\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cos n\pi + \cos\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\sin n\pi \\
&= (-1)^n\sin\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) && (\cos n\pi = (-1)^n) \\
&= (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\,.
\end{aligned}$$

Η ακολουθία $x_n = \pi/\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)$ είναι φθίνουσα, συγκλίνει στο 0 και οι όροι της ανήκουν στο διάστημα $(0, \pi/2)$. Επομένως, η $a_n = \sin x_n = \sin\left(\pi/(\sqrt{n^2+1}+n)\right)$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων με $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Άρα, από το κριτήριο Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ συγκλίνει. ■

5. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}\,, \quad a > 0\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Είναι

$$1 \leq \sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n^n} = n\,, \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Λύση.

(i) <u>$0 < a < 1$</u>. Επειδή

$$\frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \leq a^n$$

και ως γνωστόν η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = a/(1-a)$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^n/\sqrt[n]{n!}\right)$ θα συγκλίνει.

(ii) <u>$a = 1$</u>. Επειδή

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{n}$$

και ως γνωστόν η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ αποκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^n/\sqrt[n]{n!}\right)$ θα αποκλίνει.

(iii) <u>$a > 1$</u>. Είναι

$$\frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{a^n}{n}\,.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt[n]{n}} = a > 1\,,$$

από το κριτήριο Cauchy η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n/n)$ αποκλίνει. Επομένως, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^n/\sqrt[n]{n!}\right)$ θα αποκλίνει.

<u>*Σημείωση*</u>. Το ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n/n)$ αποκλίνει προκύπτει και από το γεγονός ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n} = \lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} a^x \ln a = \infty \neq 0\,.$$

Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^n/\sqrt[n]{n!}\right)$ συγκλίνει αν και μόνο αν $0 < a < 1$. ■

6. Να αποδειχθεί ότι

$$(x+1)^{1/x} - x^{1/x} < e\left(e^{1/x^2} - 1\right)\,, \quad x > 0$$

και να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right).$$

Λύση. Για κάθε $x>0$ είναι

$$\begin{aligned}(x+1)^{1/x}-x^{1/x} &= e^{\ln(x+1)/x}-e^{\ln x/x}\\ &= e^{\ln x/x}\left(e^{(\ln(x+1)-\ln x)/x}-1\right)\\ &= e^{\ln x/x}\left(e^{\ln(1+1/x)/x}-1\right)\\ &< e\left(e^{1/x^2}-1\right). \qquad (\ln x\le x-1<x,\quad \ln(1+1/x)\le 1/x)\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}=(n+1)^{1/n}-n^{1/n}<e\left(e^{1/n^2}-1\right).$$

Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\text{(L'Hôpital)}}{=}\lim_{x\to 0}e^x=1,$$

οπότε από το θεώρημα μεταφοράς

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{1/n^2}-1}{1/n^2}=1.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{1/n^2}-1\right)$$

θα συγκλίνει. Άρα, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)$ θα συγκλίνει. ■

7. Αν $a>1$, να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$(i)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^a \qquad\qquad (ii)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\left(n^{1/n}-1\right)^a.$$

Λύση.

(i) Αν $f(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)^a$, τότε

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{a-1}\frac{1-\ln x}{x^2}\le 0,\quad \text{για κάθε } x\ge e.$$

Δηλαδή η f είναι φθίνουσα και θετική για $x \geq e$. Αν $a_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^a$, τότε για κάθε $n \geq 3$ η ακολουθία (a_n) είναι γνήσια φθίνουσα με $a_n > 0$. Από το κριτήριο συμπύκνωσης η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει. Είναι

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \left(\frac{\ln 2^n}{2^n}\right)^a = (\ln 2)^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{2^{na-n}} .$$

Αν $b_n = n^a/2^{na-n}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^a}{2^{a-1}} = \frac{1}{2^{a-1}} < 1$$

και από το κριτήριο ρίζας (κριτήριο Cauchy) η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει. Επομένως και η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n/n)^a$ θα συγκλίνει.

(ii) Είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} e^x = 1 .$$

Επομένως, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^{1/n} - 1\right)^a}{(\ln n/n)^a} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{\ln n/n} - 1}{\ln n/n}\right)^a = 1 .$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^a$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \left(n^{1/n} - 1\right)^a$ θα συγκλίνει.

■

2η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Για ποια τιμή του $x > 1$ η συνάρτηση

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-1}{9}\right) dt$$

παίρνει την ελάχιστη τιμή της;

Λύση. Αν $a > 0$, είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^a \frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-1}{9}\right) dt + \int_a^{x^2} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-1}{9}\right) dt \\ &= -\int_a^x \frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-1}{9}\right) dt + \int_a^{x^2} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-1}{9}\right) dt , \end{aligned}$$

οπότε

$$f'(x) = -\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x-1}{9}\right) + 2x\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{x^2-1}{9}\right) = \frac{\ln[(x-1)(x+1)^2] - \ln 9}{x}\,.$$

Επομένως, $f'(x) = 0$ αν και μόνο αν $\ln[(x-1)(x+1)^2] = \ln 9$ και ισοδύναμα

$$(x-1)(x+1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+3x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 2\,.$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για $x \in (1,2)$ και $f'(x) > 0$ για $x \in (2,\infty)$, η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $x = 2$. ■

2. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)\,.$$

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f, τον άξονα των y και την ευθεία $y = -\pi/2$.

Λύση. Επειδή η $y = \arcsin x$ ορίζεται για $x \in [-1,1]$, θα πρέπει να είναι

$$\begin{aligned} -1 \le \frac{x}{x+1} \le 1 &\Leftrightarrow \left\{\frac{2x+1}{x+1} \ge 0\,,\ \frac{1}{x+1} \ge 0\right\} \\ &\Leftrightarrow \{(2x+1)(x+1) \ge 0\,,\ (x+1) \ge 0\} \Leftrightarrow x \ge -1/2\,, \end{aligned}$$

δηλαδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $D = [-1/2,\,\infty)$. Επειδή

$$\lim_{x\to\infty}\arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\arcsin\left(\frac{1}{1+1/x}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\,,$$

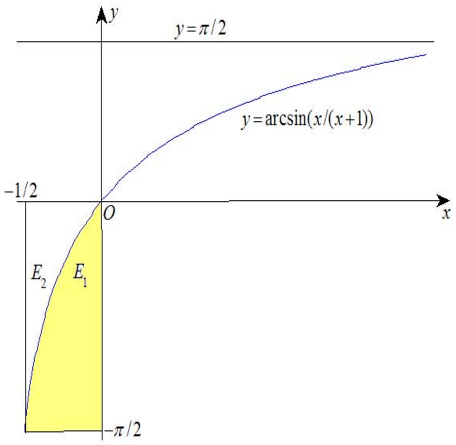
η $y = \pi/2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη. Είναι

$$f'(x) = \frac{(x/(x+1))'}{\sqrt{1-(x/(x+1))^2}} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}} > 0\,, \quad \text{για κάθε } x > -\frac{1}{2}$$

και

$$f''(x) = -\frac{3x+2}{(x+1)^2(2x+1)} < 0\,, \quad \text{για κάθε } x > -\frac{1}{2}\,.$$

Επομένως, η f είναι γνήσια αύξουσα και κοίλη στο $D = [-1/2,\,\infty)$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το εμβαδόν του χωρίου E_2 είναι

$$\begin{aligned}
|E_2| &= -\int_{-1/2}^{0} \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) dx \\
&= -\, x \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)\Big|_{x=-1/2}^{x=0} + \int_{-1/2}^{0} \frac{x}{(x+1)\sqrt{2x+1}}\, dx \quad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= -\frac{1}{2}\arcsin(-1) + \int_0^1 \frac{t^2-1}{t^2+1}\, dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow x = \left(t^2-1\right)/2\text{)} \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_0^1 dt - 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt \\
&= \frac{\pi}{4} + 1 - 2\arctan t\big|_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{\pi}{4} + 1 - 2\arctan 1 \\
&= \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Άρα, το εμβαδόν του χωρίου E_1 είναι

$$|E_1| = \frac{\pi}{4} - |E_2| = \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1\,.$$

■

3. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$ στο διάστημα $[0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1\,, \quad \text{αν } x \in [0,1)$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0 \neq 1 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx\,.$$

Επίσης να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 |f_n(x)|\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{n/(n+1)} f_n(x)\,dx \geq \frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \infty\,,$$

δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \infty$.

<u>Σημείωση</u>. Ισχύει η εξής Πρόταση:

Έστω (f_n), $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, ακολουθία Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b |f_n(x)|\,dx < \infty$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

Λύση. Έστω $x \in (0,1)$. Τότε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{N}\left[nx^{n-1} - (n+1)x^n\right]\\ &= \left[(1-2x) + (2x-3x^2) + \cdots + (Nx^{N-1} - (N+1)x^N)\right]\\ &= 1 - (N+1)x^N\end{aligned}$$

και επειδή

$$\lim_{N\to\infty}(N+1)x^N = \lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{x^{-N}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{x^{-t}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{x^{-t}\ln x} = 0\,,$$

είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n(x) = 1\,.$$

Είναι προφανές ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 1$.

Επειδή

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(nx^{n-1} - (n+1)x^n\right)\,dx = \left(x^n - x^{n+1}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = 0\,,$$

έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n\,(x)\,\,dx = 0 \neq 1 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,(x)\,\,dx\,.$$

Επειδή $f_n(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,\, n/(n+1)]$, τότε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_n(x)|\, dx &\geq \int_0^{n/(n+1)} f_n(x)\, dx \\
&= \int_0^{n/(n+1)} \left(nx^{n-1} - (n+1)x^n\right)\, dx \\
&= \left(x^n - x^{n+1}\right)\Big|_{x=0}^{x=n/(n+1)} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{(1+1/n)^n} \cdot \frac{1}{n+1} \\
&> \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n+1}\,. \qquad \left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n < e\right)
\end{aligned}$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)|\, dx \geq \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty\,,$$

δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)|\, dx = \infty$. ∎

4. Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + n^2 y = 0\,, \quad |x| < 1\,,\ n \in \mathbb{N}\,, \tag{1.8}$$

με την αντικατάσταση $x = \cos t$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της.

Λύση. Για $t \in (0, \pi)$ είναι $x = \cos t \Leftrightarrow t = \arccos x$, οπότε

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

και

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\
&= \left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right) \cdot \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{1}{\sin t}\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.8) έχουμε

$$-\sin t\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right) + \frac{\cos t}{\sin t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + n^2 y = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + n^2 y = 0\,. \tag{1.9}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (1.9) είναι $r^2 + n^2 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \pm n\mathrm{i}$. Επομένως, η γενική λύση της (1.9) είναι

$$y^*(t) = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της (1.8) είναι

$$y(x) = c_1 \cos(n \arccos x) + c_2 \sin(n \arccos x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Σημείωση. Η λύση $T_n(x) := \cos(n \arccos x)$ της διαφορικής εξίσωσης (1.8) είναι το *πολυώνυμο Chebyshev βαθμού* n. Είναι $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ κ.λ.π. ■

5. Να βρεθεί η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in (-1, 1)$, αν

$$f'(x) = \frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}\,, \quad f(0) = 0\,.$$

Λύση. Είναι

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{1}{(1 + t^2)\sqrt{1 - t^2}}\,dt \Leftrightarrow f(x) = \int_0^x \frac{1}{(1 + t^2)\sqrt{1 - t^2}}\,dt\,.$$

Επειδή,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \int \frac{\cos\theta}{\left(1+\sin^2\theta\right)\cos\theta}\,d\theta \\
&\qquad\qquad \text{(αντικατάσταση } t=\sin\theta,\ \theta\in(-\pi/2,\,\pi/2)\text{)} \\
&= \int \frac{1}{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}\,d\theta \\
&= \int \frac{1}{\cos^2\theta\,(1+2\tan^2\theta)}\,d\theta \\
&= \int \frac{1}{1+2u^2}\,du \qquad \text{(αντικατάσταση } u=\tan\theta\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2 + u^2}\,du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}u\right) + c \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan\theta\right) + c \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) + c = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{1-t^2}}\right) + c\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{1-t^2}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\,, \quad x\in(-1,1)\ .$$

■

6. Έστω τα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx \quad \text{και} \quad J = \int \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx\,, \quad x\in(0,\infty)\ .$$

Να υπολογιστούν πρώτα τα ολοκληρώματα $J+I$, $J-I$ και στη συνέχεια τα I και J.

Υπόδειξη.

$$J+I = \int \frac{1+1/x^2}{x^2+1+1/x^2}\,dx \quad \text{και} \quad J-I = \int \frac{1-1/x^2}{x^2+1+1/x^2}\,dx\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} J + I &= \int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx \\ &= \int \frac{1+1/x^2}{x^2+1+1/x^2}\,dx \\ &= \int \frac{(x-1/x)'}{(x-1/x)^2+3}\,dx \\ &= \int \frac{1}{t^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\,dt && \text{(αντικατάσταση } t = x - 1/x\text{)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{x} \right) + c \end{aligned}$$

και παρόμοια

$$\begin{aligned} J - I &= \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx \\ &= \int \frac{1-1/x^2}{x^2+1+1/x^2}\,dx \\ &= \int \frac{(x+1/x)'}{(x+1/x)^2-1}\,dx \\ &= \int \frac{1}{t^2-1}\,dt && \text{(αντικατάσταση } t = x + 1/x\text{)} \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \right) + c\,. \end{aligned}$$

Άρα,

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \right) \right] + c$$

και

$$J = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \right) \right] + c\,.$$

■

7. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0, A] \to \mathbb{R}$, $A > 0$, είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$.

Αν

$$f'(x)^2 \le a^2 + 2b^2 \int_0^x |f(t) f'(t)|\,dt\,, \quad \text{όπου } a \ge 0,\ b > 0,$$

δείξτε ότι

$$|f(x)| \leq \frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right) \quad \text{και} \quad |f'(x)| \leq ae^{bx}\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $F(x) := \int_0^x |f'(t)|\,dt$, να αποδειχθεί ότι $|f(x)| \leq F(x)$ και

$$F'(x) \leq a + bF(x) \Leftrightarrow \left(e^{-bx}F(x)\right)' \leq ae^{-bx}\,.$$

Λύση. Αν $F(x) := \int_0^x |f'(t)|\,dt$, τότε για κάθε $x \in [0, A]$ είναι $F(x) \geq 0$, $F'(x) = |f'(x)|$ και

$$F(x) = \int_0^x |f'(t)|\,dt \geq \left|\int_0^x f'(t)\,dt\right| = |f(x)|\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
F'(x)^2 &\leq a^2 + 2b^2 \int_0^x |f(t)||f'(t)|\,dt \\
&\leq a^2 + 2b^2 \int_0^x F(t)F'(t)\,dt \\
&= a^2 + b^2 \int_0^x \left(F^2(t)\right)'\,dt \\
&= a^2 + b^2F^2(x) \\
&\leq a^2 + b^2F^2(x) + 2abF(x) \\
&= (a + bF(x))^2
\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια

$$F'(x) \leq a + bF(x) \Leftrightarrow \left(e^{-bx}F(x)\right)' \leq ae^{-bx}\,.$$

Τότε,

$$\int_0^x \left(e^{-bt}F(t)\right)'\,dt \leq \int_0^x ae^{-bt}\,dt$$

και επομένως

$$e^{-bx}F(x) \leq \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bx}\right) \Leftrightarrow F(x) \leq \frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\,.$$

Άρα,

$$|f(x)| \leq \frac{a}{b}(e^{bx}-1)\,.$$

Επίσης, από την ανισότητα $F'(x) \leq a + bF(x)$ προκύπτει ότι

$$|f'(x)| \leq a + b\cdot\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right) = ae^{bx}\,.$$

■

3η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, να υπολογιστεί το
$$\lim_{n\to\infty} n^3 \int_n^{2n} \frac{x}{x^5+1}\,dx\,.$$
<u>*Υπόδειξη*</u>. Για κάθε $x \geq 1$,
$$\frac{1}{(x+1)^4} < \frac{x}{x^5+1} < \frac{1}{x^4}\,.$$
Λύση. Επειδή για κάθε $x \geq 1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι
$$n^3\frac{1}{(x+1)^4} < n^3\frac{x}{x^5+1} < n^3\frac{1}{x^4}\,,$$
ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[n, 2n]$ έχουμε
$$\begin{aligned} n^3\int_n^{2n}\frac{1}{(x+1)^4}\,dx &\leq n^3\int_n^{2n}\frac{x}{x^5+1}\,dx \leq n^3\int_n^{2n}\frac{1}{x^4}\,dx \\ \Leftrightarrow -\frac{n^3}{3}\,\frac{1}{(x+1)^3}\bigg|_{x=n}^{x=2n} &\leq n^3\int_n^{2n}\frac{x}{x^5+1}\,dx \leq -\frac{n^3}{3}\,\frac{1}{x^3}\bigg|_{x=n}^{x=2n} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(1+1/n)^3}-\frac{1}{(2+1/n)^3}\right) &\leq n^3\int_n^{2n}\frac{x}{x^5+1}\,dx \leq \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right)\,. \end{aligned}$$
Επομένως, από το κριτήριο κιβωτισμού (κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών) είναι
$$\lim_{n\to\infty} n^3\int_n^{2n}\frac{x}{x^5+1}\,dx = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{24}\,.$$

■

2. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0, 1]$, να υπολογιστεί το όριο
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]\,.$$
Λύση. Είναι
$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right] \\ &\quad=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{4-(1/n)^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-(2/n)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-(n/n)^2}}\right] \\ &\quad=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-(k/n)^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\,, \end{aligned}$$

όπου $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. Επομένως, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann έχουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]\\
&=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}$$

■

3. Αν $f \in C^2([0,1])$, δηλαδή η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, να αποδειχθεί πρώτα ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^2 f''(x)\,dx$$

και στη συνέχεια ότι υπάρχει $\theta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(0) + \frac{1}{2!}f'(0) + \frac{1}{3!}f''(\theta)\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= (x-1)f(x)\big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (x-1)f'(x)\,dx \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\
&= f(0) - \int_0^1 (x-1)f'(x)\,dx\\
&= f(0) - \frac{1}{2}\,(x-1)^2 f'(x)\big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^2 f''(x)\,dx\\
&\qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\
&= f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^2 f''(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Επειδή η f'' είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και η συνάρτηση $g(x) := (x-1)^2$ είναι μη αρνητική και συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, από το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα(παραπέμπουμε στο [27]) υπάρχει $\theta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^1 f''(x)\,(x-1)^2\,dx = f''(\theta)\int_0^1 (x-1)^2\,dx = f''(\theta)\,\frac{1}{3}\,(x-1)^3\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}f''(\theta)\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^2 f''(x)\,dx\\
&= f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}f''(\theta)\\
&= f(0) + \frac{1}{2!}f'(0) + \frac{1}{3!}f''(\theta)\,.
\end{aligned}$$

■

4. (α΄) Να υπολογιστούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$(i) \quad \int_0^1 |\ln x| \; dx \quad \text{και} \quad (ii) \quad \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx\,.$$

(β΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} \sin x \ln x \, dx\,.$$

Λύση.

(α΄) (i) Είναι

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\ln x| \; dx = -\int_0^1 \ln x\, dx &= -\ln 1 + \lim_{x\to 0^+} x\ln x + \int_0^1 dx \\ &\qquad\qquad\qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} + 1 \\ &= -\lim_{x\to 0^+} x + 1 \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= 1\,,\end{aligned}$$

δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 |\ln x|\, dx$ συγκλίνει και ισούται με 1.

(ii) Είναι

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx &= -\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx \qquad \left(\lim_{x\to\infty} \tfrac{\ln x}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{x} = 0\right) \\ &= -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1\,,\end{aligned}$$

δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left(\ln x/x^2\right)\, dx$ συγκλίνει και ισούται με 1.

(β΄) Είναι

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\sin x \ln x\, dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x}\sin x \ln x\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x}\sin x\ln x\, dx}_{I_2}\,,$$

όπου τα I_1 και I_2 είναι γενικευμένα ολοκληρώματα.

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin x \ln x/x|}{|\ln x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} = \lim_{x\to\infty} \cos x = 1$$

και το ολοκλήρωμα $\int_0^1 |\ln x|\,dx$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και το I_1 θα συγκλίνει.

Για κάθε $R \geq 1$ είναι

$$\int_1^R \sin x \frac{\ln x}{x}\,dx = -\cos R \frac{\ln R}{R} + \int_1^R \cos x \frac{1-\ln x}{x^2}\,dx\,. \quad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}$$

Όμως

$$\left|\cos R \frac{\ln R}{R}\right| \leq \frac{\ln R}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,, \quad \text{οπότε } \lim_{R\to\infty} \cos R \frac{\ln R}{R} = 0.$$

Επομένως,

$$I_2 = \int_1^\infty \cos x \frac{1-\ln x}{x^2}\,dx\,.$$

Επειδή για κάθε $x \geq 1$ είναι

$$\left|\cos x \frac{1-\ln x}{x^2}\right| \leq \frac{1+|\ln x|}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$$

και ως γνωστόν τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$, $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ συγκλίνουν, από το κριτήριο σύγκρισης το I_2 θα συγκλίνει απόλυτα και επομένως θα συγκλίνει. Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} \sin x \ln x\,dx$$

συγκλίνει.

■

5. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης καθώς επίσης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^{2n}}{(2n)!}(x-2)^{2n}\,.$$

Υπόδειξη. Ισχύει ο τύπος του Stirling(παραπέμπουμε στο [27]):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}} = 1\,, \quad \text{δηλαδή} \quad n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}\,.$$

Λύση. Αν $c_n = n^{2n}\,(x-2)^{2n}\,/\,(2n)!$, τότε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n}}\,(x-2)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)\,(2n+2)} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} (x-2)^2 = \frac{e^2}{4}\,(x-2)^2\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \frac{e^2}{4}(x-2)^2 < 1 \Leftrightarrow |x-2| < \frac{2}{e}\,.$$

Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = \frac{2}{e}$. Δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για

$$|x-2| < \frac{2}{e} \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{e} < x < 2 + \frac{2}{e}\,.$$

Για $x = 2 \pm \frac{2}{e} \Leftrightarrow |x-2| = \frac{2}{e}$ παίρνουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{2}{e}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^{2n}}{(2n)!e^{2n}}\,.$$

Επειδή

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^{2n}/(2n)!e^{2n}}{1/\sqrt{2n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}\,e^{-2n}}{(2n)!}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}}{(2n)!}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{(τύπος του Stirling)}\end{aligned}$$

και ως γνωστόν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}} = \infty\,, \qquad \text{(αποκλίνει)}$$

από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^{2n}}{(2n)!e^{2n}} = \infty\,. \qquad \text{(αποκλίνει)}$$

Άρα, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = \left(2 - \frac{2}{e},\, 2 + \frac{2}{e}\right)$. ■

6. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}\,.$$

Εφαρμογή. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}$.

Λύση. Αν $a_n = 1/n\,(n+1)$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n\,(n+1)}} = 1\,.$$

Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ είναι $R=1$.

Αν $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, $|x|<1$, τότε $xf\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $|x|<1$, οπότε

$$(xf\left(x\right))'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots=-\ln\left(1-x\right)\,,\quad |x|<1\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
xf\left(x\right)&=-\int_0^x\ln\left(1-t\right)\,dt\\
&=-\,t\ln\left(1-t\right)\big|_{t=0}^{t=x}-\int_0^x\frac{t}{1-t}\,dt \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\
&=-x\ln\left(1-x\right)+\int_0^x dt-\int_0^x\frac{1}{1-t}\,dt\\
&=-x\ln\left(1-x\right)+x+\ln\left(1-x\right)\\
&=x+\left(1-x\right)\ln\left(1-x\right)\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1+\frac{1-x}{x}\ln\left(1-x\right) & \text{αν } |x|<1,\ x\neq 0\\ 0 & \text{αν } x=0\,.\end{cases}$$

Εφαρμογή. Επειδή από το κριτήριο του Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}$ συγκλίνει, είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\lim_{x\to-1^+}\left(1+\frac{1-x}{x}\ln\left(1-x\right)\right)=1-2\ln 2\,.$$

■

1.7 Ακαδημαϊκό έτος 2008–9

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Έστω η ακολουθία (a_n), με

$$a_{n+1} = \frac{a_n^4 + 1}{3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία (a_n), αν *(i)* $a_1 = 1$ και *(ii)* $a_1 = 2$.

Λύση.

(i) Έστω $a_1 = 1$. Η (a_n) είναι ακολουθία θετικών όρων και επομένως είναι κάτω φραγμένη, το 0 είναι ένα κάτω φράγμα. Θα αποδείξουμε ότι η (a_n) είναι γνήσια φθίνουσα. Πράγματι, είναι $a_1 = 1 > \frac{1^4+1}{3} = a_2$ και αν υποθέσουμε ότι $a_{n-1} > a_n$, τότε

$$a_n = \frac{a_{n-1}^4 + 1}{3} > \frac{a_n^4 + 1}{3} = a_{n+1} .$$

Η ακολουθία (a_n) είναι γνήσια φθίνουσα και κάτω φραγμένη και επομένως θα συγκλίνει.

(ii) Έστω $a_1 = 2$. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία θετικών όρων (a_n) είναι γνήσια αύξουσα. Πράγματι, είναι $a_1 = 2 < \frac{2^4+1}{3} = a_2$ και αν υποθέσουμε ότι $a_{n-1} < a_n$, τότε

$$a_n = \frac{a_{n-1}^4 + 1}{3} < \frac{a_n^4 + 1}{3} = a_{n+1} .$$

Αποδεικνύουμε τώρα ότι $a_n \geq 2n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ότι η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Είναι $a_1 = 2$ και αν υποθέσουμε ότι $a_n \geq 2n$, τότε

$$a_{n+1} = \frac{a_n^4 + 1}{3} \geq \frac{(2n)^4 + 1}{3} > 2(n+1) .$$

Πράγματι,

$$\frac{(2n)^4 + 1}{3} > 2(n+1) \Leftrightarrow 16n^4 > 6n + 5$$

και η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επειδή η γνήσια αύξουσα ακολουθία (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, το όριο $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

■

2. Έστω $|q| < 1$ και $|a_k| \leq M$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν

$$b_n = a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n \,,$$

να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (b_n) είναι Cauchy και επομένως συγκλίνει.

Λύση. *1ος τρόπος*. Αν $k \in \mathbb{N}$, είναι

$$\begin{aligned} |b_{n+k} - b_n| &= \left| a_{n+1} q^{n+1} + a_{n+2} q^{n+2} + \cdots + a_{n+k} q^{n+k} \right| \\ &\leq |a_{n+1}||q|^{n+1} + |a_{n+2}||q|^{n+2} + \cdots + |a_{n+k}||q|^{n+k} \\ &\leq M|q|^{n+1}\left(1 + |q| + \cdots + |q|^{k-1}\right) \\ &= M|q|^{n+1}\frac{1-|q|^k}{1-|q|} \leq M\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}\,. \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} M\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} = 0$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι $|b_{n+k} - b_n| < \varepsilon$. Δηλαδή η (b_n) είναι ακολουθία Cauchy και επομένως θα συγκλίνει.

2ος τρόπος. Το b_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^k \,.$$

Επειδή

$$0 \leq |a_k q^k| \leq M|q|^k$$

και ως γνωστόν η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} M|q|^k = M\sum_{k=1}^{\infty}|q|^k = M\frac{|q|}{1-|q|} \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k q^k|$ θα συγκλίνει. Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^k$ συγκλίνει απόλυτα και κατά συνέπεια θα συγκλίνει. Άρα και η ακολουθία (b_n), που είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς, θα συγκλίνει. Επειδή η ακολουθία (b_n) συγκλίνει, είναι ακολουθία Cauchy. ∎

3. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n - \sqrt{n}}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n-\sqrt{n}}=\frac{1}{(-1)^n\sqrt{n}-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n-1}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}+\frac{1}{n-1}\,.$$

Αν $a_n=\sqrt{n}/\,(n-1)$, $n\geq 2$, η ακολουθία (a_n) είναι γνήσια φθίνουσα, με $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Επομένως, από το κριτήριο του Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

συγκλίνει. Επειδή ως γνωστόν

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}=\infty\,, \qquad \text{(η σειρά αποκλίνει)}$$

τελικά έχουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n-\sqrt{n}}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}=\infty\,. \qquad \text{(η σειρά αποκλίνει)}$$

■

4. Αν $t\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η εναλλάσσουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}\,(1+t^2/n)^n}$$

συγκλίνει. Συγκλίνει η σειρά απόλυτα;

Υπόδειξη. Αποδεικνύεται, όπως ακριβώς και η άσκηση 1 στη "2η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια", ακ. έτος 2007–08", ότι $(1+x/n)^n\nearrow e^x$, για $x>0$. Δηλαδή, για $x>0$ η ακολουθία $b_n=(1+x/n)^n$ είναι γνήσια αύξουσα, με $\lim_{n\to\infty}b_n=e^x$.

Λύση. Επειδή για $t\in\mathbb{R}$ η ακολουθία $b_n=\left(1+t^2/n\right)^n$ είναι γνήσια αύξουσα, η ακολουθία

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}\,(1+t^2/n)^n}$$

είναι γνήσια φθίνουσα, με $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Επομένως, από το κριτήριο του Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{\sqrt{n}\,(1+t^2/n)^n}$$

συγκλίνει. Θα εξετάσουμε τώρα ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,(1+t^2/n)^n}\,.$$

Επειδή $\left(1+t^2/n\right)^n < e^{t^2}$, είναι

$$\frac{1}{\sqrt{n}\,(1+t^2/n)^n} > \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{e^{t^2}} = e^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Ως γνωστόν

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}} = \infty \qquad \text{(η σειρά αποκλίνει)}$$

και επομένως από το κριτήριο σύγκρισης

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,(1+t^2/n)^n} = \infty\,. \qquad \text{(η σειρά αποκλίνει)}$$

Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}(1+t^2/n)^n}$ δεν συγκλίνει απόλυτα. ■

5. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n-2}\right)^{n^2}\,.$$

Λύση. Αν $a_n = \left(\left(n^2-5n+1\right)/\left(n^2-4n-2\right)\right)^{n^2}$, τότε

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left|\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n-2}\right|^n = \exp\left(n\ln\left|\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n-2}\right|\right)\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\ln\left|\frac{x^2-5x+1}{x^2-4x-2}\right| &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left|\left(x^2-5x+1\right)/\left(x^2-4x-2\right)\right|}{1/x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\left(x^2-5x+1\right)/\left(x^2-4x-2\right)\right)'}{(-1/x^2)\,(x^2-5x+1)\,/\,(x^2-4x-2)} \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}\\
&= \lim_{x\to\infty} -x^2\frac{x^2-6x+14}{(x^2-4x-2)\,(x^2-5x+1)} = -1
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left|\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n-2}\right| = -1\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η εκθετική συνάρτηση $y=\exp x = e^x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \exp\left(\lim_{n\to\infty} n\ln\left|\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n-2}\right|\right) = \exp(-1) = \frac{1}{e} > 1\,.$$

Άρα, από το κριτήριο της ρίζας η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n-2}\right)^{n^2}$$

αποκλίνει. ■

6. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n\ln n}.$$

Λύση. Ο γενικός όρος της σειράς είναι

$$a_n=(1-1/n)^{2n\ln n}=e^{2n\ln n\cdot\ln(1-1/n)}>0\,,\quad \text{για κάθε } n\geq 2\,.$$

Επειδή ως γνωστόν $\ln(1+x)<x$, για κάθε $x>-1$, $x\neq 0$, για κάθε $n\geq 2$ είναι

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<-\frac{1}{n}$$

και κατά συνέπεια

$$a_n=e^{2n\ln n\cdot\ln(1-1/n)}<e^{-2\ln n}=\frac{1}{e^{\ln n^2}}=\frac{1}{n^2}\,.$$

Όμως η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1/n^2\right)$ συγκλίνει και επομένως από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n\ln n}$$

θα συγκλίνει.

Παρατήρηση. Το κριτήριο της ρίζας δεν δίνει απάντηση για τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς. Επειδή

$$\lim_{x\to\infty}\ln x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=0\,,$$

είναι

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{2\ln n\cdot\ln(1-1/n)}=1\,.$$

■

7. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln(n+x^2)}}$$

αποκλίνει.

Υπόδειξη. Αν $x\in\mathbb{R}$, υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x^2<n$, για κάθε $n\geq N$.

Λύση. Έστω $x\in\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $N\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $x^2<n$, για κάθε $n\geq N$. Επομένως, επειδή η συνάρτηση $y=\ln t$, $t>0$, είναι γνήσια αύξουσα, είναι

$$\frac{1}{n\sqrt{\ln(n+x^2)}}>\frac{1}{n\sqrt{\ln 2n}}\,,\quad \text{για κάθε } n\geq N\,.$$

Θα εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά θετικών όρων

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln 2n}}\,.$$

Επειδή η $a_n = 1/n\sqrt{\ln 2n}$, $n \geq N$, είναι γνήσια φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων, από το κριτήριο συμπύκνωσης η σειρά θα συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=N}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει. Όμως,

$$\sum_{n=N}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=N}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n\sqrt{\ln 2^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\ln 2}} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\ln 2}} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{1/2}} = \infty\,.$$

Επομένως $\sum_{n=N}^{\infty} \left(1/n\sqrt{\ln 2n}\right) = \infty$, δηλαδή η σειρά αποκλίνει. Άρα, από το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n+x^2)}} = \infty\,.$$

Τότε όμως θα είναι και

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n+x^2)}} = \infty\,,$$

δηλαδή η σειρά αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ∎

2η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$y = f(x) = \int_0^{(x+1)/2} e^{-t^2}\,dt$$

είναι γνήσια μονότονη στο $\mathbb{R}$. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη της f, να υπολογιστεί το

$$\lim_{y\to 0} \frac{1+f^{-1}(y)}{y}\,.$$

Λύση. Είναι $f'(x) = ((x+1)/2)'\, e^{-(x+1)^2/4} = (1/2)\, e^{-(x+1)^2/4} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Επομένως, η συνεχής συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και κατά συνέπεια $1-1$. Ως γνωστόν $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ και η f^{-1} είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα. Επειδή $f(-1) = 0$ και η f^{-1} είναι συνεχής, αν το $y \to 0$ τότε το $x \to -1$. Άρα

$$\lim_{y\to 0} \frac{1+f^{-1}(y)}{y} = \lim_{x\to -1} \frac{1+x}{f(x)} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to -1} \frac{1}{f'(x)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{(1/2)\, e^{-(x+1)^2/4}} = 2\,.$$

∎

2. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f\,(x) = \arctan \frac{|x|+3}{x-3}\,, \quad x \neq 3\,.$$

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την f, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 3$.

Λύση. Είναι

$$f\,(x) = \begin{cases} \arctan \frac{-x+3}{x-3} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} & \text{αν } x \leq 0\,, \\ \arctan \frac{x+3}{x-3} & \text{αν } x > 0\,. \end{cases}$$

Επειδή $\lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x-3} = -\infty$ και $\lim_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x-3} = +\infty$, είναι

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{\pi}{2}\,.$$

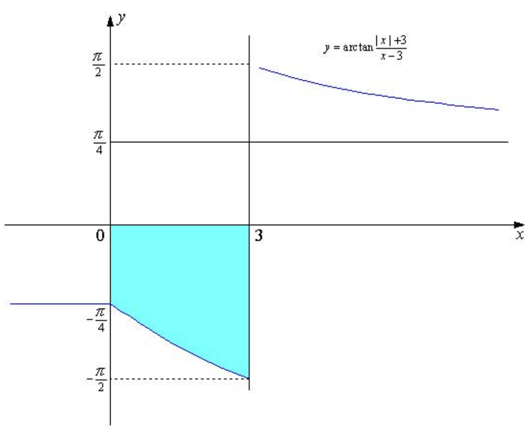
Επειδή $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, η $y = \frac{\pi}{4}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη. Είναι

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0\,, \\ -\frac{3}{x^2+9} & \text{αν } x > 0,\, x \neq 3 \end{cases}$$

και

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0\,, \\ \frac{6x}{(x^2+9)^2} & \text{αν } x > 0,\, x \neq 3\,. \end{cases}$$

Επομένως, η f είναι γνήσια φθίνουσα και κυρτή στα διαστήματα $[0, 3)$ και $(3, +\infty)$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το εμβαδόν του χωρίου είναι

$$\begin{aligned}
A &= -\int_0^3 \arctan\frac{x+3}{x-3}\,dx \\
&= -\,x\arctan\frac{x+3}{x-3}\bigg|_{x=0}^{x=3} + \int_0^3 x\left(\arctan\frac{x+3}{x-3}\right)' dx \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= -\lim_{x\to 3^-} x\arctan\frac{x+3}{x-3} - 3\int_0^3 \frac{x}{x^2+9}\,dx \\
&= -3\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right)\big|_{x=0}^{x=3} \\
&= \frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}(\ln 18 - \ln 9) = \frac{3}{2}(\pi - \ln 2) \approx 3.6727\,.
\end{aligned}$$

■

3. Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{4}{(1-x^2)^2}y = 0\,, \quad |x|<1\,, \tag{1.10}$$

με την αντικατάσταση

$$t = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της.

Λύση. Είναι $t=\tanh^{-1}x \Leftrightarrow x=\tanh t$ και $\left(\tanh^{-1}x\right)' = \frac{1}{1-x^2}$. Επομένως,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

και

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{2x}{(1-x^2)^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{2x}{(1-x^2)^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(1-x^2)^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(1-x^2)^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{2x}{(1-x^2)^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{4}{(1-x^2)^2}y = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 4y = 0\,. \tag{1.11}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (1.11) είναι: $r^2 - 4 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \pm 2$. Επομένως, η γενική λύση της (1.11) είναι

$$y^*(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.10) είναι

$$y(x) = c_1 \frac{1-x}{1+x} + c_2 \frac{1+x}{1-x}\,, \quad |x| < 1\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{1 - 2\sin^2 x}\,dx\,, \qquad x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{4}\,, \, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Λύση. Επειδή ως γνωστόν

$$\int \frac{1}{\cos t}\,dt = \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \tan t\right| + c = \ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| + c\,,$$

είναι

$$\begin{aligned}
I = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos 2x}{\cos 2x}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos 2x}\,dx + \frac{1}{2}\int dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos t}\,dt + \frac{x}{2} + c \qquad (\text{αντικατάσταση } t = 2x) \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| + \frac{x}{2} + c \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right| + \frac{x}{2} + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right| + \frac{x}{2} + c\,.
\end{aligned}$$

■

5. Να βρεθεί η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in (-6, 2)$, αν

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{12 - x^2 - 4x}}\,, \quad f(-2) = -3\,.$$

Λύση. Είναι

$$f(x) - f(-2) = \int_{-2}^{x} \frac{1}{\sqrt{12 - t^2 - 4t}}\,dt \Leftrightarrow f(x) = \int_{-2}^{x} \frac{1}{\sqrt{12 - t^2 - 4t}}\,dt - 3\,.$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
\int \frac{t}{\sqrt{12-t^2-4t}}\,dt &= \int \frac{t}{\sqrt{16-(t+2)^2}}\,dt \\
&= \int \frac{u-2}{\sqrt{16-u^2}}\,du \qquad \text{(αντικατάσταση } u=t+2\text{)} \\
&= \int \frac{u}{\sqrt{16-u^2}}\,du - 2\int \frac{1}{\sqrt{4^2-u^2}}\,du \\
&= -\sqrt{16-u^2} - 2\arcsin\left(\frac{u}{4}\right) + c \\
&= -\sqrt{12-t^2-4t} - 2\arcsin\left(\frac{t+2}{4}\right) + c\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\left[\sqrt{12-t^2-4t} + 2\arcsin\left(\frac{t+2}{4}\right)\right]\Bigg|_{t=-2}^{t=x} - 3 \\
&= -\sqrt{12-x^2-4x} - 2\arcsin\left(\frac{x+2}{4}\right) + 1\,.
\end{aligned}
$$

■

6. Αν

$$
a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,,
$$

δείξτε ότι

$$
a_n + a_{n-2} = \frac{1}{n-1}\,, \quad n \geq 2\,.
$$

Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$
a_0 = \frac{\pi}{4}\,, \quad a_{2n} = (-1)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} - \frac{\pi}{4}\right)\,, \quad n \geq 1
$$

και

$$
a_1 = \frac{1}{2}\ln 2\,, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} - \ln 2\right)\,, \quad n \geq 1\,.
$$

Λύση. Είναι

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^{n-2} x}{\cos^2 x}\,dx - \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2} x\,dx \\
&= \frac{1}{n-1}\,\tan^{n-1} x\Big|_{x=0}^{x=\pi/4} - a_{n-2} \\
&= \frac{1}{n-1} - a_{n-2}
\end{aligned}
$$

και επομένως $a_n + a_{n-2} = 1/(n-1)$, για κάθε $n \geq 2$.

Επειδή $a_{2n+2} = 1/(2n+1) - a_{2n}$ και $a_{2n+3} = 1/2(n+1) - a_{2n+1}$, χρησιμοποιώντας επαγωγή εύκολα αποδεικνύονται οι τύποι για τα a_{2n} και a_{2n+1} αντίστοιχα. ■

7. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε

$$f(x) + f''(x) \geq 0\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι

$$f(x) + f(x+\pi) \geq 0\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi \left[f(x+t) + f''(x+t)\right] \sin t \, dt\,.$$

Λύση. Είναι

$$\int_0^\pi f''(x+t) \sin t \, dt = f'(x+t) \sin t\Big|_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi f'(x+t) \cos t \, dt$$

(παραγοντική ολοκλήρωση)

$$= -f(x+t) \cos t\Big|_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi f(x+t) \sin t \, dt$$

(παραγοντική ολοκλήρωση)

$$= f(x+\pi) + f(x) - \int_0^\pi f(x+t) \sin t \, dt$$

και επομένως

$$\int_0^\pi \left[f(x+t) + f''(x+t)\right] \sin t \, dt = f(x) + f(x+\pi)\ .$$

Επειδή για κάθε $t \in [0,\pi]$ είναι $\sin t \geq 0$ και από την υπόθεση $f(x+t) + f''(x+t) \geq 0$, για κάθε $x, t \in \mathbb{R}$, έπεται ότι

$$\int_0^\pi \left[f(x+t) + f''(x+t)\right] \sin t \, dt \geq 0\,.$$

Άρα,

$$f(x) + f(x+\pi) \geq 0\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

■

8. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι θετική και μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα) στο $\mathbb{R}$. Έστω

$$F(x) = \int_2^x f(t)\, dt\,.$$

Αν

$$f(x) = o(F(x)) \quad (x \to \infty)\,, \quad \text{δηλαδή} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\int_2^x f(t)\, dt} = 0\,,$$

να αποδειχθεί ότι

$$\sqrt{f(x)} = o\left(\int_2^x \sqrt{f(t)}\, dt\right) \quad (x \to \infty)\,, \quad \text{δηλαδή} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{f(x)}}{\int_2^x \sqrt{f(t)}\, dt} = 0\,.$$

Λύση. (i) Έστω η f είναι φθίνουσα. Τότε

$$\sqrt{f(x)}\,(x-2) \le \int_2^x \sqrt{f(t)}\, dt \Leftrightarrow 0 < \frac{\sqrt{f(x)}}{\int_2^x \sqrt{f(t)}\, dt} \le \frac{1}{x-2}$$

και επομένως

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{f(x)}}{\int_2^x \sqrt{f(t)}\, dt} = 0\,.$$

(ii) Έστω η f είναι αύξουσα. Τότε για $2 \le t \le x$ είναι

$$\sqrt{f(t)}\sqrt{f(t)} \le \sqrt{f(x)}\sqrt{f(t)}$$

και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[2, x]$ παίρνουμε

$$\int_2^x f(t)\, dt \le \sqrt{f(x)} \int_2^x \sqrt{f(t)}\, dt \Leftrightarrow 0 < \frac{\sqrt{f(x)}}{\int_2^x \sqrt{f(t)}\, dt} \le \frac{f(x)}{\int_2^x f(t)\, dt}\,.$$

Όμως από την υπόθεση είναι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\int_2^x f(t)\, dt} = 0\,,$$

οπότε και

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{f(x)}}{\int_2^x \sqrt{f(t)}\, dt} = 0\,.$$

Παρατήρηση. Η υπόθεση

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\int_2^x f(t)\, dt} = 0$$

είναι αναγκαία μόνο στην περίπτωση που η f είναι αύξουσα. ■

3η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. (α΄) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2\,, \quad \text{με } \xi \text{ μεταξύ } x_0 \text{ και } x,$$

για κατάλληλη συνάρτηση f και κατάλληλα σημεία x_0 και x, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)\,, \quad \alpha > 0,\, n = 2, 3, \ldots\,.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας το (α΄), να αποδειχθεί ότι για $\alpha > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ συγκλίνει.

Λύση.

(α΄) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1/x^\alpha$, $x \neq 0$, με $\alpha > 0$. Επειδή $f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}$ και $f''(x) = \alpha(\alpha+1)\,x^{-\alpha-2}$, από τον τύπο του Taylor με $x = n-1$ και $x_0 = n$, $n = 2, 3, \ldots$, έχουμε

$$\frac{1}{(n-1)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} + \alpha\frac{1}{n^{\alpha+1}} + \alpha(\alpha+1)\frac{1}{2\xi^{\alpha+2}}\,, \quad \text{για κάποιο } \xi \in (n-1, n).$$

Επομένως,

$$\frac{1}{(n-1)^\alpha} > \frac{1}{n^\alpha} + \alpha\frac{1}{n^{\alpha+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)\,.$$

(β΄) Για $\alpha > 0$ και $N \geq 2$ είναι

$$\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1 - \frac{1}{N^\alpha}\,,$$

οπότε

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N^\alpha}\right) = 1\,.$$

Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1/(n-1)^\alpha - 1/n^\alpha\right)$ συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα στο (α΄), από το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι και η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1/n^{1+\alpha}\right)$ θα συγκλίνει. Άρα, για $\alpha > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^{1+\alpha}\right)$ συγκλίνει.

■

2. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0,1]$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{\sqrt{k^2+n^2}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\right] .$$

Λύση. Είναι

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{\sqrt{k^2+n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k/n)^2}{\sqrt{(k/n)^2+1}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) ,$$

όπου $f(x) = x^2/\sqrt{x^2+1}$. Επομένως, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{\sqrt{k^2+n^2}} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\, dx .$$

Αν $I = \int \left(x^2/\sqrt{x^2+1}\right) dx$, τότε

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\left(x^2+1\right)-1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \\
&= \int \sqrt{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \\
&= \int \sqrt{x^2+1}\, dx - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\, dx - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= x\sqrt{x^2+1} - I - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) .
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) .$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{\sqrt{k^2+n^2}} &= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] .
\end{aligned}$$

■

3. Να υπολογιστεί το

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^3 \frac{e^{t^2/x}}{t}\, dt .$$

Υπόδειξη. Θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα στην παρακάτω μορφή(παραπέμπουμε στο [27]):

Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, με $g(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$, τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(t)\,dt\,.$$

Επειδή οι συναρτήσεις $f(t) = e^{t^2/x}$ και $g(t) = 1/t$ είναι θετικές και συνεχείς στο διάστημα $[1,3]$, από το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα είναι

$$\int_1^3 \frac{e^{t^2/x}}{t}\,dt = e^{\xi^2/x}\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = e^{\xi^2/x}(\ln 3 - \ln 1) = e^{\xi^2/x}\ln 3\,,$$

για κάποιο ξ, με $1 \leq \xi \leq 3$. Επομένως,

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^3 \frac{e^{t^2/x}}{t}\,dt = \lim_{x\to\infty} e^{\xi^2/x}\ln 3 = \ln 3\,.$$

■

4. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$(i)\quad \int_0^\infty \frac{\arctan x}{x}\,dx \quad \text{και} \quad (ii)\quad \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx\,.$$

Λύση.

(i) Είναι

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x}\,dx}_{I_2}\,,$$

όπου το I_1 είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα ($\lim_{x\to 0}(\arctan x/x) = 1$). Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2. Επειδή

$$\frac{\arctan x}{x} \geq \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{x}\,, \quad \text{για κάθε } x \geq 1$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ αποκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το I_2 θα αποκλίνει. Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x}\,dx$ αποκλίνει.

(ii) Είναι
$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx}_{I_2}\,.$$

Επειδή
$$0 < \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} < \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}}\,, \quad \text{για κάθε } x>1$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^2 \left(1/\sqrt{x-1}\right)\,dx = 2$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το I_1 θα συγκλίνει.

Επειδή
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/x\sqrt{x^2-1}}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}} = 1$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^\infty \left(1/x^2\right)\,dx$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και το I_2 θα συγκλίνει.

Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left(1/x\sqrt{x^2-1}\right)\,dx$ συγκλίνει.

■

5. (α΄) Με παραγοντική ολοκλήρωση ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$
συγκλίνει.

(β΄) Χρησιμοιώντας το γεγονός ότι
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,,$$
να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα
$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx\,.$$

Λύση.

(α΄) Είναι
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,dx}_{I_2}\,,$$

όπου το I_1 είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα ($\lim_{x\to 0}(\sin x/x) = 1$). Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x}\,dx = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_{x=1}^{R} - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\,dx = -\frac{\cos R}{R} + \cos 1 - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\,dx\,.$$

Όμως,

$$\left|\frac{\cos R}{R}\right| \le \frac{1}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,, \quad \text{οπότε} \quad \lim_{R\to\infty}\frac{\cos R}{R} = 0\,.$$

Επομένως,

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{I_3}\,.$$

Αρκεί να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_3. Επειδή

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left(1/x^2\right)\,dx$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left|\cos x/x^2\right|\,dx$ θα συγκλίνει. Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_3 συγκλίνει. Άρα, το I_2 συγκλίνει και κατά συνέπεια το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty (\sin x/x)\,dx$ θα συγκλίνει.

(β΄) Εύκολα διαπιστώνεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \left(\sin^2 x/x^2\right)\,dx$ συγκλίνει. Επειδή

$$\begin{aligned}\int_r^R \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx &= -\left.\frac{\sin^2 x}{x}\right|_{x=r}^{x=R} + \int_r^R \frac{\sin 2x}{x}\,dx && \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\ &= -\left.\frac{\sin^2 x}{x}\right|_{x=r}^{x=R} + \int_{2r}^{2R} \frac{\sin t}{t}\,dx\,, && \text{(αντικατάσταση } t = 2x\text{)}\end{aligned}$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx &= \lim_{\substack{r\to 0^+\\ R\to\infty}} \int_r^R \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx\\ &= -\lim_{R\to\infty}\frac{\sin^2 R}{R} + \lim_{r\to 0^+}\frac{\sin^2 r}{r} + \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt\\ &= \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

■

6. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης καθώς επίσης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2+1} x^n .$$

Λύση. Αν $a_n = \frac{n \ln n}{n^2+1}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 1$$

και επομένως η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

(i) Για $x = 1$ παίρνουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2+1} .$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n / \left(n^2+1\right)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \ln n = \infty$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ αποκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2+1} x^n .$$

θα αποκλίνει.

(ii) Για $x = -1$ παίρνουμε την εναλλάσσουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \ln n}{n^2+1} .$$

Αν $a_n = n \ln n / \left(n^2+1\right)$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x^2+1} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + 1}{2x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0 .$$

Έστω $f(x) := x \ln x / \left(x^2+1\right)$, $x > 0$. Επειδή

$$f'(x) = \frac{1 + x^2 + \left(1 - x^2\right) \ln x}{\left(1+x^2\right)^2} < 0 , \quad \text{για κάθε } x \geq 4 ,$$

η ακολουθία (a_n) είναι γνήσια φθίνουσα για κάθε $n \geq 4$. Επομένως, από το κριτήριο του Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει.

Άρα, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = [-1, 1)$. ■

7. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα σε σειρά Maclaurin της συνάρτησης $y = \ln(1+x)$, $|x| < 1$, να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+n-2}\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+n-2} &= \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}\,.\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Leibniz οι παραπάνω εναλλάσσουσες σειρές συγκλίνουν. Ως γνωστόν,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Επομένως,

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-1} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$$

και

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \lim_{x\to 1^-} \left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = \ln 2 - \frac{5}{6}\,.$$

Άρα,

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}\left(\ln 2 + \ln 2 - \frac{5}{6}\right) = \frac{12\ln 2 - 5}{18}\,.$$

■

---

8. (*προαιρετική άσκηση*). Έστω οι ακολουθίες

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin 2nx \cot x \, dx \quad \text{και} \quad v_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{x} \, dx\,.$$

(α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$u_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

(β΄) Με παραγοντική ολοκλήρωση ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0$$

και κατά συνέπεια

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

1.8 Ακαδημαϊκό έτος 2007–8

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. (α΄) Αν $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$$

και

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\,.$$

(β΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία (x_n) με

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\,.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη.

Λύση.

(α΄) Είναι

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Επομένως

$$\begin{array}{rcl}
1 & > & 2\sqrt{2} - 2\,, \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & > & 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\,, \\
\frac{1}{\sqrt{3}} & > & 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3}\,, \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\frac{1}{\sqrt{n}} & > & 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}\,.
\end{array}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\,.$$

(β') Επειδή

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = 0\,, \end{aligned}$$

είναι $x_{n+1} < x_n$. Δηλαδή η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα. Από την (α') έχουμε

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} > 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 2 > -2\,,$$

δηλαδή η ακολουθία (x_n) είναι κάτω φραγμένη. Άρα, η ακολουθία (x_n) θα συγκλίνει επειδή είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη.

■

2. (α') Αν $x > -1$, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x\,.$$

(β') Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, όπου (a_n) είναι ακολουθία θετικών όρων με $a_n \neq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{a_n - 1} = 1\,.$$

Λύση.

(α') Αν $f(x) = \ln(1+x) - x/(1+x)$, $x > -1$, τότε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}\,.$$

Είναι $f'(x) \leq 0$, για κάθε $x \in (-1, 0]$ και $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$. Επομένως,

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{(1+x)} \geq f(0) = 0\,.$$

Αν $g(x) = \ln(1+x) - x$, $x > -1$, τότε $g'(x) = 1/(1+x) - 1 = -x/(1+x)$. Είναι $g'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (-1, 0]$ και $g'(x) \leq 0$, για κάθε $x \geq 0$. Επομένως, $g(x) = \ln(1+x) - x \leq g(0) = 0$.

(β΄) *1ος τρόπος*. Αν $x = a_n - 1$, από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε

$$\frac{a_n - 1}{1 + (a_n - 1)} \leq \ln\left(1 + (a_n - 1)\right) \leq a_n - 1 \Leftrightarrow \frac{a_n - 1}{a_n} \leq \ln a_n \leq a_n - 1\,.$$

Διαιρώντας με το $a_n - 1$ παίρνουμε

$$\frac{1}{a_n} \leq \frac{\ln a_n}{a_n - 1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} - 1 \leq \frac{\ln a_n}{a_n - 1} - 1 \leq 0\,, \quad \text{αν } a_n - 1 > 0$$

και

$$1 \leq \frac{\ln a_n}{a_n - 1} \leq \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\ln a_n}{a_n - 1} - 1 \leq \frac{1}{a_n} - 1\,, \quad \text{αν } a_n - 1 < 0\,.$$

Επομένως,

$$0 \leq \left|\frac{\ln a_n}{a_n - 1} - 1\right| \leq \left|\frac{1}{a_n} - 1\right|\,.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty}(1/a_n) = 1$, από την παραπάνω ανισότητα και το κριτήριο κιβωτισμού (ισοσυγκλινουσών ακολουθιών) προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty} \ln a_n/\left(a_n - 1\right) = 1$.

2ος τρόπος. Αν $f(x) = \ln x/(x-1)$, είναι

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to1}\frac{1}{x} = 1\,.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, όπου (a_n) είναι ακολουθία θετικών όρων με $a_n \neq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το θεώρημα μεταφοράς

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1 \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{a_n - 1} = 1\,.$$

■

3. (α΄) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, \pi/2)$, είναι γνήσια αύξουσα.

(β΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\tan\frac{1}{n}\,.$$

Λύση.

(α΄) Αν $x \in (0, \pi/2)$, τότε

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x} - \frac{\tan x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - \sin x\cos x}{2x^{3/2}\cos^2 x} = \frac{2x - \frac{1}{2}\sin 2x}{2x^{3/2}\cos^2 x} = \frac{4x - \sin 2x}{4x^{3/2}\cos^2 x}\,.$$

Όμως για κάθε $t > 0$ είναι $\sin t < t$ οπότε $\sin t < 2t$. Επομένως, για κάθε $x > 0$ είναι $4x - \sin 2x > 0$. Άρα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, \pi/2)$, είναι γνήσια αύξουσα.

(β΄) Αν $a_n = \sqrt{n}\tan(1/n)$, για κάθε $n \geq 1$ είναι $a_n > 0$. Από την (α΄) προκύπτει ότι η ακολουθία (a_n) είναι γνήσια φθίνουσα. Επίσης

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\tan\frac{1}{n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{\sqrt{x}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\cos^2 x} = 0\,.$$

Άρα, από το κριτήριο του Leibnitz η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\tan\frac{1}{n}$ συγκλίνει.

■

4. Έστω η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}\,, \quad a > 0\,.$$

(α΄) Να αποδειχθεί ότι η σειρά συγκλίνει για $0 < a < 1/e$ και αποκλίνει για $a > 1/e$.

(β΄) Αν $a = 1/e$, να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!e^n}\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $a_n = \frac{n^n}{n!e^n}$, να αποδειχθεί (βλέπε άσκηση 1, "2η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια", ακ. έτος 2007–08) ότι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1/(n+1)}{1/n}\,.$$

Χρησιμοποιείστε το πόρισμα του κριτηρίου σύγκρισης για σειρές.

Λύση.

(α΄) Αν $c_n = \frac{(an)^n}{n!}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a\,(n+1))^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(an)^n} = \lim_{n\to\infty} a\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ae\,.$$

Από το κριτήριο του λόγου η σειρά συγκλίνει για $ae < 1 \Leftrightarrow a < 1/e$ και αποκλίνει για $ae > 1 \Leftrightarrow a > 1/e$.

(β') Αν $a_n = \frac{n^n}{n!e^n}$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}} \cdot \frac{n!e^n}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)^n}{en^n} \\ &= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &> \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} && \left(\text{επειδή } \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} > e\right) \\ &= \frac{1/(n+1)}{1/n}. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \text{για κάθε}\, n \in \mathbb{N},$$

όπου $b_n = 1/n$. Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ αποκλίνει, από το πόρισμα του κριτηρίου σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(n^n/n!e^n)$ θα αποκλίνει.

■

5. Αν $\alpha_n = \frac{2^n+n^3}{3^n+n^2}$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ και στη συνέχεια να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+n^3}{3^n+n^2}.$$

Υπόδειξη. Αν $a_n = n^r x^n$, $r \in \mathbb{R}$ και $|x| < 1$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$(βλέπε "Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια", ακ. έτος 2006–7, **Θ**1.(α')).

Λύση. Επειδή $\lim_{n\to\infty}(2/3)^n = \lim_{n\to\infty} n^3(1/2)^n = \lim_{n\to\infty} n^2(1/3)^n = 0$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n^3}{3^n+n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1+\frac{n^3}{2^n}}{1+\frac{n^2}{3^n}} = 0.$$

Αν $\beta_n = (2/3)^n$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{n^3}{2^n}}{1+\frac{n^2}{3^n}} = 1.$$

Επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(2/3)^n = 3$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+n^3}{3^n+n^2}$ θα συγκλίνει. ■

6. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, με $a_k \geq 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, συγκλίνει. Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$ και $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

(α΄) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $e^x \geq 1 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

$$a_n e^{-R_n} \leq e^{-R_{n+1}} - e^{-R_n}\,.$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-R_n}$ συγκλίνει και ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-R_n} \leq 1 - e^{-a} \leq 1\,.$$

Λύση.

(α΄) Είναι $R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \left(a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right) - a_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k - a_n = R_n - a_n$, οπότε

$$e^{-R_{n+1}} - e^{-R_n} = e^{-R_n + a_n} - e^{-R_n} = e^{-R_n}\left(e^{a_n} - 1\right) \geq a_n e^{-R_n}\,.$$

(β΄) Επειδή η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, είναι $\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$ και επομένως

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(e^{-R_{n+1}} - e^{-R_n}\right) &= \left(e^{-R_2} - e^{-R_1}\right) + \left(e^{-R_3} - e^{-R_2}\right) + \cdots + \left(e^{-R_{N+1}} - e^{-R_N}\right) \\ &= e^{-R_{N+1}} - e^{-R_1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1 - e^{-R_1} = 1 - e^{-\sum_{k=1}^{\infty} a_k} = 1 - e^{-a}\,.\end{aligned}$$

Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-R_{n+1}} - e^{-R_n}\right)$ συγκλίνει και είναι $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-R_{n+1}} - e^{-R_n}\right) = 1 - e^{-a}$. Από την (α΄) και το κριτήριο σύγκρισης συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-R_n}$ συγκλίνει και ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-R_n} \leq 1 - e^{-a} \leq 1\,.$$

■

7. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα, να αποδειχθεί ότι και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

συγκλίνει. Ισχύει το αποτέλεσμα στην περίπτωση που η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, χωρίς να συγκλίνει απόλυτα;

Λύση. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, είναι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Τότε, για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n| < 1$, για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως,

$$0 \leq a_n^2 < |a_n|\,, \quad \text{για κάθε}\, n \geq n_0\,.$$

Όμως από την υπόθεση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει και κατά συνέπεια η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Επομένως, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2$ θα συγκλίνει. Άρα και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ θα συγκλίνει.

Γενικά το αποτέλεσμα δεν ισχύει στην περίπτωση που η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, χωρίς να συγκλίνει απόλυτα. Πράγματι, από το κριτήριο του Leibniz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} / \sqrt{n}$ συγκλίνει. Όμως, όπως είναι γνωστό, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} / \sqrt{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ αποκλίνει.

■

8. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με θετικούς όρους αποκλίνει, να αποδειχθεί ότι και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

αποκλίνει.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Να διακρίνετε τις εξής περιπτώσεις: (α') Η ακολουθία (a_n) είναι άνω φραγμένη, (β') η ακολουθία (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Σ' αυτή την περίπτωση υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n), τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$.

Λύση. <u>*1η περίπτωση*</u>. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (a_n) είναι άνω φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $a_n \le M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\frac{a_n}{1+a_n} \ge \frac{a_n}{1+M} > 0\,, \quad \text{για κάθε}\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1} a_n$ αποκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1+a_n)$ θα αποκλίνει.

<u>*2η περίπτωση*</u>. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n), τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$. Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{k_n}}{1+a_{k_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{k_n}}+1} = 1\,.$$

Δηλαδή, υπάρχει υπακολουθία της ακολουθίας $(a_n/(1+a_n))$ η οποία δεν συγκλίνει στο μηδέν (συγκλίνει στο $1 \neq 0$). Κατά συνέπεια η ακολουθία $(a_n/(1+a_n))$ δεν μπορεί να συγκλίνει στο μηδέν. Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1+a_n)$ αποκλίνει. ■

9. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με θετικούς όρους συγκλίνει, να αποδειχθεί ότι και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a^{a_n} - 1)\,, \qquad a > 1\,,$$

συγκλίνει.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την άσκηση 2(β').

Λύση. Η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Επομένως $\lim_{n\to\infty} a^{a_n} = 1$. Επειδή $a > 1$ και $a_n > 0$, είναι $a^{a_n} > 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $b_n = a_n \ln a$ και $c_n = a^{a_n} - 1$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n \ln a}{a^{a_n} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a^{a_n}}{a^{a_n} - 1} = 1\,. \qquad \text{(από την άσκηση 2(β'))}$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \ln a \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a^{a_n} - 1)$, $a > 1$, θα συγκλίνει. ■

2η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{και} \quad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}, \quad x > 0\,.$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνήσια αύξουσα, η g είναι γνήσια φθίνουσα και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e\,.$$

Εφαρμογή. Η ακολουθία $a_n = (1 + 1/n)^n$ είναι γνήσια αύξουσα ενώ η ακολουθία $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ είναι γνήσια φθίνουσα. Είναι $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e$ και επομένως

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Λύση. Ως γνωστόν (βλέπε άσκηση 2(α'), "1η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια", ακ. έτος 2007–08),

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1 + t) < t\,, \quad \text{για κάθε } t > 0\,.$$

Επομένως, για κάθε $x > 0$ είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)\right]' \\ &= \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right] > 0 \end{aligned}$$

και παρόμοια

$$g'(x) = \left[\exp\left((x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right]' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] < 0\,.$$

Άρα, η f είναι γνήσια αύξουσα και η g είναι γνήσια φθίνουσα. Επειδή η εκθετική συνάρτηση $y = \exp x = e^x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t\to 0^+}(1+t)^{1/t} \\
&= \lim_{t\to 0^+}\exp\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{1+t}\right) \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= e\,.
\end{aligned}$$

και

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

■

2. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $y = f(x) = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, $|x| \le 1$, είναι γνήσια μονότονη. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη της f, να υπολογιστεί το

$$\lim_{y\to -1}\frac{f^{-1}(y)}{1+y}\,.$$

Λύση. Είναι

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} > 0\,, \quad \text{για κάθε}\, x\in(-1,1)\,.$$

Επομένως, η συνεχής συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $[-1,1]$ και κατά συνέπεια είναι $1-1$. Ως γνωστόν $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ και η f^{-1} είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα. Επειδή $f(0) = -1$ και η f^{-1} είναι συνεχής, αν το $y \to -1$ τότε το $x \to 0$. Άρα

$$\lim_{y\to -1}\frac{f^{-1}(y)}{y+1} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)+1} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} = 1\,.$$

■

3. Να αποδειχθεί ότι

$$0.5 < \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}\,dx \le \frac{\pi}{6} \approx 0.5236\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Για κάθε $x \in [0,1/2]$, $\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-x^{2n}} \le 1$.

Λύση. Για κάθε $x \in [0,1/2]$ ισχύουν οι ανισότητες $\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-x^{2n}} \le 1$. Επειδή

$$1 \le \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \in [0,1/2]\ ,$$

ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[0,1/2]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} dx < \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}\,dx \le \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}\,dx \le \arcsin x|_{x=0}^{x=1/2} \\
&\Leftrightarrow 0.5 < \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}\,dx \le \arcsin(1/2) \\
&\Leftrightarrow 0.5 < \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}\,dx \le \pi/6 \approx 0.5236\,.
\end{aligned}$$

■

4. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχώς παραγωγίσιμες και τέτοιες ώστε

$$f(x)^2 = 121 + \int_0^x \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\,dt\,, \quad \text{για κάθε}\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.12}$$

Λύση. Παραγωγίζοντας την (1.12) έχουμε

$$2f(x)\,f'(x) = f(x)^2 + f'(x)^2 \Leftrightarrow \left(f'(x) - f(x)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f(x)\ .$$

Η γενική λύση της $y' = y$ είναι $y = ce^x$, δηλαδή $f(x) = ce^x$. Επειδή $f(0)^2 = 121 \Leftrightarrow f(0) = \pm 11$, είναι $c = \pm 11$. Άρα, οι συνεχείς συναρτήσεις f που ικανοποιούν την (1.12) είναι

$$f(x) = \pm 11 e^x\,.$$

■

5. Έστω $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$\int_x^{x^2} f(t)\,dt = \int_1^x f(t)\,dt\,. \tag{1.13}$$

Παραγωγίζοντας την (1.13) να αποδειχθεί ότι

$$f(x) = \frac{f\left(x^{1/2^n}\right)}{x^{1/2+1/2^2+\cdots+1/2^n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

και στη συνέχεια να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις f που ικανοποιούν την (1.13).

Λύση. Γράφουμε την (1.13) στην ισοδύναμη μορφή

$$\int_0^{x^2} f(t)\ dt - \int_0^x f(t)\ dt = \int_1^x f(t)\ dt$$

και παραγωγίζοντας έχουμε

$$2xf\left(x^2\right) - f(x) = f(x) \Leftrightarrow f\left(x^2\right) = \frac{f(x)}{x}.$$

Επομένως,

$$f(x) = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{f(\sqrt[4]{x})}{\sqrt[4]{x}},$$

δηλαδή

$$f(x) = \frac{f(\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x}\sqrt[4]{x}} = \frac{f\left(x^{1/2^2}\right)}{x^{1/2+1/2^2}}.$$

Επαγωγικά έχουμε

$$f(x) = \frac{f\left(x^{1/2^n}\right)}{x^{1/2+1/2^2+\cdots+1/2^n}} = \frac{f\left(x^{1/2^n}\right)}{x^{1-1/2^n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x^{1/2^n}\right)}{x^{1-1/2^n}} = \frac{f\left(\lim_{n\to\infty} x^{1/2^n}\right)}{x} = \frac{f(1)}{x}.$$

Άρα, όλες οι συναρτήσεις f είναι της μορφής

$$f(x) = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

■

6. Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(x^2 - 1\right) y'' + xy' + y = 0, \quad x > 1, \tag{1.14}$$

με την αντικατάσταση $x = \cosh t$, $t > 0$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της.

Λύση. Ως γνωστόν $x = \cosh t\,,\, t > 0 \Leftrightarrow t = \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\,,\, x > 1$ και $(\cosh t)' = \sinh t$, $(\sinh t)' = \cosh t$. Επομένως,

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\sinh t}$$

και

$$\begin{aligned} y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\sinh t}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{1}{\sinh t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sinh t}\right)\right]\frac{1}{\sinh t} \\ &= \left[\frac{1}{\sinh t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\cosh t}{\sinh^2 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]\frac{1}{\sinh t} = \frac{1}{\sinh^2 t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\cosh t}{\sinh^3 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Επειδή $x^2 - 1 = \cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t$, αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση (1.14) έχουμε

$$\sinh^2 t\left(\frac{1}{\sinh^2 t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\cosh t}{\sinh^3 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\cosh t}{\sinh t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0\,.$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0\,. \tag{1.15}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (1.15) είναι: $r^2+1=0$ με ρίζες $r_{1,2} = \pm i$. Επομένως, η γενική λύση της (1.15) είναι

$$y^*(t) = c_1\cos t + c_2\sin t\,,\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.14) είναι

$$y(x) = c_1\cos\left(\cosh^{-1} x\right) + c_2\sin\left(\cosh^{-1} x\right)\,,\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

και ισοδύναμα

$$y(x) = c_1\cos\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right] + c_2\sin\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right]\,,\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx\,,\qquad 0 < x < 4\,.$$

Λύση. Είναι

$$
\begin{aligned}
I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x^2-4x+4)}}\,dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\,dx \\
&= \int \frac{(2t+2)^2}{2\sqrt{1-t^2}} 2\,dt = 4\int \frac{(t+1)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,.
\end{aligned}
$$

(αντικατάσταση $x-2=2t \Leftrightarrow t=\frac{x-2}{2}$)

Αν θέσουμε $t=\sin\theta$, $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$, τότε $\theta=\arcsin t$ και $\sqrt{1-t^2}=\cos\theta$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
I &= 4\int \frac{(\sin\theta+1)^2}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta \\
&= 4\int \sin^2\theta\,d\theta + 8\int \sin\theta\,d\theta + 4\int \,d\theta \\
&= 2\int (1-\cos 2\theta)\ d\theta + 8\int \sin\theta\,d\theta + 4\int \,d\theta \\
&= 2\theta - \sin 2\theta - 8\cos\theta + 4\theta + c \\
&= 6\theta - 8\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta + c \\
&= 6\arcsin t - 8\sqrt{1-t^2} - 2t\sqrt{1-t^2} + c \\
&= 6\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) - 4\sqrt{4x-x^2} - \frac{x-2}{2}\sqrt{4x-x^2} + c\,.
\end{aligned}
$$

■

8. Να βρεθεί η συνάρτηση $y=f(x)$, $x\in(-\pi/2,\pi/2)$, αν

$$
f'(x) = \frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\,, \quad f(0)=1\,,
$$

όπου $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Λύση. Είναι

$$
f(x)-f(0) = \int_0^x \frac{1}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt \Leftrightarrow f(x) = \int_0^x \frac{1}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt + 1\,.
$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt &= \int \frac{1}{\cos^2 t\,(a^2\tan^2 t + b^2)}\,dt \\
&= \int \frac{1}{a^2u^2+b^2}\,du \qquad \text{(αντικατάσταση } u=\tan t,\ t\in(-\pi/2,\pi/2)\text{)} \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{u^2+(b/a)^2}\,du \\
&= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{au}{b}\right)+c \\
&= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a\tan t}{b}\right)+c\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
f(x) = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a\tan x}{b}\right)+1\,.
$$

■

9. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο $T > 0$, δηλαδή $f(x+T) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α') Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$
\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt\,.
$$

(β') Αν $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$
\int_{xT}^{(x+n)T} f(t)\,dt = n\int_0^T f(t)\,dt\,.
$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_{\pi\varphi/2}^{\pi(n+\varphi/2)} |\cos\theta|\,d\theta$, όπου $\varphi \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$.

Λύση.

(α') Παραπέμπουμε στο [27].

(β') Από το (α') έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_{xT}^{(x+n)T} f(t)\,dt &= \int_{xT}^{(x+1)T} f(t)\,dt + \int_{(x+1)T}^{(x+2)T} f(t)\,dt + \cdots + \int_{(x+n-1)T}^{(x+n)T} f(t)\,dt \\
&= \underbrace{\int_0^T f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \cdots + \int_0^T f(t)\,dt}_{n} = n\int_0^T f(t)\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Εφαρμογή. Επειδή $|\cos(\pi + x)| = |\cos x|$, η $y = |\cos x|$ είναι περιοδική με περίοδο π. Επομένως

$$I = n \int_0^{\pi} |\cos\theta|\, d\theta = n \left[\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\, d\theta \right] = 2n\,.$$

■

Άσκηση 10.(*προαιρετική*). Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \sqrt{\tan\theta}\, d\theta\,, \quad \theta \in (n\pi,\, (n+1/2)\,\pi)\ , n \in \mathbb{Z}\,.$$

3η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$. Έστω η ακολουθία (S_n) με

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)\ , \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad n > \frac{1}{a}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{f'(0)}{2}$.

Υπόδειξη. Εφαρμογή του τύπου Maclaurin.

Απόδειξη. Από τον τύπο Maclaurin έχουμε $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2!}f''(\theta x)$, για κάποιο $\theta \in (0,1)$. Επειδή $n > 1/a$, είναι $0 < k/n^2 < a$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Για $x = k/n^2$ είναι

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f(0) + \frac{k}{n^2}f'(0) + \frac{k^2}{2n^4}f''(\theta_{k,n}) = \frac{k}{n^2}f'(0) + \frac{k^2}{2n^4}f''(\theta_{k,n}), \text{ για κάποιο } \theta_{k,n} \in \left(0,\, \frac{k}{n^2}\right)\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n^2}f'(0)\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 f''(\theta_{k,n}) \\ &= \frac{1}{n^2}f'(0)\frac{(1+n)n}{2} + \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 f''(\theta_{k,n}) \\ &= \frac{n+1}{2n}f'(0) + \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 f''(\theta_{k,n})\,. \end{aligned}$$

Αν $M = \max_{0\le x\le a} |f''(x)|$, τότε

$$\left|S_n - \frac{n+1}{2n} f'(0)\right| \le \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 |f''(\theta_{k,n})| \le \frac{M}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \le \frac{M}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} n^2 = \frac{M}{2n^4} n^3 = \frac{M}{2n}\,,$$

δηλαδή

$$\left|S_n - \frac{n+1}{2n} f'(0)\right| \le \frac{M}{2n}\,, \quad \text{για κάθε}\, n \in \mathbb{N}\,, \quad n > \frac{1}{a}\,.$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} f'(0) = \frac{f'(0)}{2}\,.$$

□

2. Έστω η ακολουθία

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{1/3}\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^{1/n}\,.$$

(α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx\,.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $f(x) = \ln(1+x)/x$ σε δυναμοσειρά, καθώς επίσης και το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{και επομένως ότι} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\pi^2/12}\,.$$

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned}
\ln a_n &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \frac{n}{3}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right) + \cdots + \frac{n}{n}\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(1+k/n)}{k/n}
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx\,.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1\,,$$

το $\int_0^1 (\ln(1+x)/x)\,dx$ είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα.

(β΄) Ως γνωστόν $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n/n$, $|x|<1$ και επομένως,

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} & \text{αν } |x|<1,\ x \neq 0\ , \\ 1 & \text{αν } x = 0\ . \end{cases}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \ln a_n &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}\, dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}\ . \end{aligned}$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2N-1)^2} - \frac{1}{(2N)^2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2N-1)^2} + \frac{1}{(2N)^2}\right) \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2N)^2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{12}\ , \end{aligned}$$

είναι

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{και επομένως} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\pi^2/12}\ .$$

■

3. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{u\to 0} \int_u^{2u} \frac{\cos x}{x}\, dx\ .$$

Λύση. Είναι

$$\int_u^{2u} \frac{\cos x}{x}\, dx = \int_1^2 \frac{\cos(tu)}{t}\, dt\ . \qquad (\text{αντικατάσταση } x = tu)$$

1ος τρόπος. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\int_1^2 \frac{\cos(tu)}{t}\,dt - \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt\right| &= \left|\int_1^2 \frac{\cos(tu)-1}{t}\,dt\right| \\ &= \left|\int_1^2 \frac{-2\sin^2\left(\frac{tu}{2}\right)}{t}\,dt\right| \\ &= 2\int_1^2 \frac{\sin^2\left(\frac{tu}{2}\right)}{t}\,dt \\ &\le 2\int_1^2 \frac{\left(\frac{tu}{2}\right)^2}{t}\,dt \\ &= \frac{u^2}{2}\int_1^2 t\,dt = \frac{3u^2}{4} \xrightarrow[u\to 0]{} 0\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{u\to 0}\int_1^2 \frac{\cos(tu)}{t}\,dt = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \ln 2\,.$$

Άρα,

$$\lim_{u\to 0}\int_u^{2u} \frac{\cos x}{x}\,dx = \ln 2\,.$$

2ος τρόπος. Από το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα(παραπέμπουμε στο [27]) είναι

$$\int_u^{2u} \frac{\cos x}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{\cos(tu)}{t}\,dt = \cos(\xi u)\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \cos(\xi u)\cdot \ln 2\,,$$

για κάποιο ξ, με $1 \le \xi \le 2$. Επομένως,

$$\lim_{u\to 0}\int_u^{2u} \frac{\cos x}{x}\,dx = \lim_{u\to 0}\cos(\xi u)\cdot \ln 2 = \cos(0)\cdot\ln 2 = \ln 2\,.$$

3ος τρόπος. Έστω $u > 0$. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ είναι συνεχής και η $g(x) = 1/x$ είναι θετική και συνεχής στο διάστημα $[u, 2u]$, από το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα είναι

$$\int_u^{2u} \frac{\cos x}{x}\,dx = \cos(\xi(u))\int_u^{2u} \frac{1}{x}\,dx = \cos(\xi(u))\,(\ln 2u - \ln u) = \cos(\xi(u))\cdot\ln 2\,, \qquad (1.16)$$

για κάποιο $\xi(u)$, με $u \le \xi(u) \le 2u$. Επειδή η $f(x) = \cos x$ είναι συνεχής και $\lim_{u\to 0^+}\xi(u) = 0$, θα είναι $\lim_{u\to 0^+}\cos(\xi(u)) = \cos(0) = 1$. Άρα, από την (1.16) έχουμε

$$\lim_{u\to 0^+}\int_u^{2u} \frac{\cos t}{t}\,dt = \ln 2\,.$$

Αν $u < 0$, τότε και πάλι

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0^-}\int_u^{2u}\frac{\cos x}{x}\,dx &= \lim_{u\to 0^-}\int_{-u}^{-2u}\frac{\cos t}{t}\,dt && (\text{αντικατάσταση } x=-t)\\
&= \lim_{v\to 0^+}\int_v^{2v}\frac{\cos t}{t}\,dt && (v=-u>0)\\
&= \ln 2\,.
\end{aligned}$$

■

4. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^e \frac{dx}{(1-\ln x)\sqrt{x\,(e-x)}}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\int_0^e \frac{dx}{(1-\ln x)\sqrt{x\,(e-x)}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(1-\ln x)\sqrt{x\,(e-x)}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^e \frac{dx}{(1-\ln x)\sqrt{x\,(e-x)}}}_{I_2}$$

και επομένως αρκεί να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα I_1 και I_2.

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1/\,(1-\ln x)\sqrt{x\,(e-x)}}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{(1-\ln x)\sqrt{x\,(e-x)}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(1-\ln x)\sqrt{e-x}} = 0$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 (1/\sqrt{x})\,dx$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και το I_1 θα συγκλίνει.

Επειδή

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to e^-}\frac{1/\,(1-\ln x)\sqrt{x\,(e-x)}}{1/\,(e-x)^{3/2}} &= \lim_{x\to e^-}\frac{e-x}{(1-\ln x)\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}\lim_{x\to e^-}\frac{e-x}{1-\ln x}\\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}\lim_{x\to e^-}\frac{-1}{-1/x} && (\text{κανόνας L'Hôpital})\\
&= \sqrt{e}
\end{aligned}$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{(e-x)^{3/2}}\,dx$ αποκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και το I_2 θα αποκλίνει.

Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^e \frac{dx}{(1-\ln x)\sqrt{x\,(e-x)}}\,.$$

αποκλίνει. ■

5. Να βρεθούν οι τιμές του $n \in \mathbb{N}$ για τις οποίες το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n}\,dx$$

συγκλίνει και στη συνέχεια να υπολογιστεί.

Υπόδειξη. Αντικατάσταση $u = \sinh^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Λύση. Είναι

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n}\,dx}_{I_2}\,,$$

όπου το I_1 είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2. Επειδή για κάθε $x \geq 1$ είναι

$$x < x + \sqrt{x^2+1} \leq x + \sqrt{x^2+x^2} = \left(1+\sqrt{2}\right)x\,,$$

έχουμε ότι

$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^n}\cdot\frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n} < \frac{1}{x^n}\,, \quad x \geq 1\,.$$

Όμως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty (1/x^n)\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $n \geq 2$. Επομένως, από την προηγούμενη ανισότητα και το κριτήριο σύγκρισης το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2 θα συγκλίνει αν και μόνο αν $n \geq 2$. Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_n θα συγκλίνει αν και μόνο αν $n \geq 2$.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση

$$u = \sinh^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Leftrightarrow x = \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}\,.$$

Είναι $dx/du = \cosh u = \left(e^u + e^{-u}\right)/2$ και επομένως για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^\infty \frac{1}{e^{nu}} \cdot \frac{e^u + e^{-u}}{2}\, du &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{(1-n)u} + e^{-(1+n)u}\right) du \\ &= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{e^{(1-n)u}}{1-n} - \frac{e^{-(1+n)u}}{1+n}\right)\Bigg|_{u=0}^{u=R} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{1+n}\right) = \frac{n}{n^2-1}\,. \end{aligned}$$

■

6. Να βρεθούν οι ακτίνες σύγκλισης καθώς επίσης και τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$(i) \quad \sum_{n=1}^\infty n^{\sqrt{n}} x^n \quad \text{και} \quad (ii) \quad \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{2^n \ln n} x^{5n}\,.$$

Λύση.

(i) Αν $a_n = n^{\sqrt{n}}$, τότε

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^{\sqrt{n}}} = n^{\sqrt{n}/n} = n^{1/\sqrt{n}} = e^{\ln n/\sqrt{n}}\,.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{1/2}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} 2\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{x^{-1/2}} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/2}} = 0\,,$$

είναι

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n/\sqrt{n}} = e^0 = 1$$

και επομένως η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

Αν $x = \pm 1$, τότε έχουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty (\pm 1)^n\, n^{\sqrt{n}}\,.$$

Όμως

$$\lim_{n\to\infty}\left|(\pm 1)^n\, n^{\sqrt{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} n^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{n}\,\ln n} = \infty$$

και κατά συνέπεια η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει για $x = \pm 1$. Άρα, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = (-1, 1)$.

(ii) Αν $c_n = x^{5n}/2^n \ln n$, τότε

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{x^{5n}}{2^n \ln n}\right|} = \frac{|x|^5}{2\sqrt[n]{\ln n}}$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0\,,$$

είναι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = e^0 = 1\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \frac{|x|^5}{2} < 1 \Leftrightarrow |x| < 2^{1/5}\,.$$

Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 2^{1/5}$.

Για $x = 2^{1/5}$ παίρνουμε τη σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n \ln n} \left(2^{1/5}\right)^{5n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}\,.$$

Όμως $\ln n < n$ και ισοδύναμα $1/\ln n > 1/n$, για κάθε $n \geq 2$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλινει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ θα αποκλίνει.

Αν $x = -2^{1/5}$, τότε

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n \ln n} \left(-2^{1/5}\right)^{5n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{5n} \frac{1}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}\,.$$

Επειδή η ακολουθία $a_n = 1/\ln n$ είναι γνήσια φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, από το κριτήριο του Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει. Άρα, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = \left[-2^{1/5},\, 2^{1/5}\right)$.

■

7. Να βρεθούν τα αθροίσματα των σειρών

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-2/3}}{(n+3)!}\,, \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad (ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\,3^n}\,.$$

Λύση.

(i) Για κάθε $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-2/3}}{(n+3)!} &= x^{-2/3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)!} \\
&= x^{-2/3-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} \\
&= x^{-11/3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \right) \\
&= x^{-11/3} \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) .
\end{aligned}$$

(ii) Ως γνωστόν $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2n+1} / \, (2n+1)$, $|x| < 1$ και κατά συνέπεια

$$\arctan \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^n}{2n+1} \,, \quad 0 \leq x < 1 \,.$$

Επομένως, για $x = 1/3$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{1}{(2n+1)\, 3^n} \\
\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{1}{(2n+1)\, 3^n} &= \sqrt{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \,.
\end{aligned}$$

■

1.9 Ακαδημαϊκό έτος 2006–7

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Υποθέτουμε ότι οι όροι της ακολουθίας (a_n) είναι θετικοί και αποτελούν αριθμητική πρόοδο, δηλαδή

$a_{n+1} - a_n = \omega \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\omega}} & \text{αν } \omega > 0, \\ +\infty & \text{αν } \omega = 0\ . \end{cases}$$

Λύση. (i) Έστω $\underline{\omega > 0}$. Επειδή

$$\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k} = \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{\omega}$$

και

$$a_{n+1} = a_n + \omega = a_{n-1} + 2\omega = \cdots = a_1 + n\omega\,,$$

είναι

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{\omega} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{\omega} + \cdots + \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{\omega} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}}{\omega} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{a_1+n\omega}-\sqrt{a_1}}{\omega} \right) \\ &= \frac{1}{\omega} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{a_1}{n}+\omega} - \sqrt{\frac{a_1}{n}} \right) = \frac{\sqrt{\omega}}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\,. \end{aligned}$$

(ii) $\underline{\text{Αν } \omega = 0}$, τότε $a_n = a_1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή πρόκειται για μια σταθερή ακολουθία και επομένως

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_1}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{a_1}} = +\infty\,. \end{aligned}$$

■

2. (α') Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία (a_n), με

$$a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{(n+1)^2}\,.$$

(β') Αν

$$b_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\,,$$

να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{2} \leq b_n \leq \frac{n\,(n+1)}{2\,(n^2+1)}$$

και να υπολογιστεί το $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Υπόδειξη. (α') Να θεωρήσετε τη διαφορά $a_{2n} - a_n$.

Λύση.

(α') Είναι

$$\begin{aligned}
a_{2n} - a_n &= \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n+1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{2n}{(2n+1)^2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{n+1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{2n-1}{(2n)^2} + \frac{2n}{(2n+1)^2} \\
&\geq \frac{2n}{(2n+1)^2} + \cdots + \frac{2n}{(2n+1)^2} + \frac{2n}{(2n+1)^2} \\
&= n\frac{2n}{(2n+1)^2} \\
&\geq \frac{2n^2}{(3n)^2} = \frac{2}{9}\,.
\end{aligned}$$

Επομένως, η (a_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy και κατά συνέπεια δεν συγκλίνει.

(β') Από τις ανισότητες

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} &\leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \\
&\leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1}\,,
\end{aligned}$$

συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
&\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} \leq b_n \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1} \\
&\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq b_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq b_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}\,.
\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} n\,(n+1)\,/2\left(n^2+1\right) = 1/2$, από το κριτήριο κιβωτισμού(ισοσυγκλινουσών ακολουθιών) έχουμε ότι και $\lim_{n\to\infty} b_n = 1/2$.

■

3. Να υπολογιστεί το $\underline{\lim}\, a_n$ και το $\overline{\lim}\, a_n$ της ακολουθίας

$$a_n = \left(1 + 3^{2n(-1)^n}\right)^{1/n} .$$

Λύση. Είναι

$$a_{2n} = \left(1 + 9^{2n}\right)^{1/2n}$$

και

$$a_{2n+1} = \left(1 + 9^{-(2n+1)}\right)^{1/(2n+1)} = \frac{1}{9}\left(1 + 9^{2n+1}\right)^{1/(2n+1)} .$$

Επειδή

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+9^x\right)}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{9^x \ln 9}{1+9^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 9}{9^{-x}+1} = \ln 9\,,$$

είναι $\lim_{x\to\infty} \left(1+9^x\right)^{1/x} = 9$. Κατά συνέπεια, $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 9$ και $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 1$. Άρα,

$$\underline{\lim}\, a_n = 1 \quad \text{και} \quad \overline{\lim}\, a_n = 9\,.$$

■

4. Να υπολογιστεί το $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right)$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in [0,1), \\ 0 & \text{αν } x = 1\,. \end{cases}$$

Λύση. Αν $x = 1$, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$. Έστω $|x| < 1$. Τότε, από τη γεωμετρική σειρά έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}\,.$$

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x} = \frac{x-x^2}{1-x} = x\,.$$

Σημείωση. Αν $|x| < 1$, μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(x^n - x^{n+1}\right) = \left(x - x^2\right) + \left(x^2 - x^3\right) + \cdots + \left(x^N - x^{N+1}\right) = x - x^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} x\,.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right) = \lim_{x\to 1^-} x = 1\,.$$

■

5. (α΄) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$, $a > 0$.

   (β΄) Να βρεθούν οι τιμές του $\beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)^{\beta}\,, \qquad a > 1\,,$$

   συγκλίνει.

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n} - 1}{1/n} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} a^x \ln a = \ln a\,.$$

(β΄) Για $a > 1$ είναι $\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)^{\beta} > 0$. Επειδή από την (α΄) είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)^{\beta}}{1/n^{\beta}} = \lim_{n\to\infty} \left[n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right]^{\beta} = (\ln a)^{\beta} > 0$$

και ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\beta}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\beta > 1$, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)^{\beta}$, $a > 1$, θα συγκλίνει αν και μόνο αν $\beta > 1$.

■

6. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n} - 1\right]\,.$$

Υπόδειξη. (ii) Είναι

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n\,(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n\,.$$

Λύση.

(i) Αν $a_n = n!/2^{n^2}$, είναι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{(n+1)^2-n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2^{2x+1}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^{2x+1} 2 \ln 2} = 0 < 1\,.\end{aligned}$$

Επομένως, από το κριτήριο του λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (n!/2^{n^2})$ συγκλίνει.

(ii) Είναι

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n\,(n-1)}{2} \left(\frac{1}{n^2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{n}$$

και κατά συνέπεια

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1 \geq \frac{1}{n}\,, \quad \text{για κάθε}\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Επειδή η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) = +\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης θα είναι και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right] = +\infty\,, \quad \text{δηλαδή η σειρά αποκλίνει}\,.$$

■

7. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n^{1/n} - 1\right)$.

Λύση.

(i) Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $1/\sqrt{n} \in (0, \pi/2)$ και η $y = \sin x$ είναι γνήσια αύξουσα και θετική συνάρτηση στο διάστημα $(0, \pi/2)$, η $a_n = \sin(1/\sqrt{n})$ είναι γνήσια φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων. Επίσης, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin(1/\sqrt{n}) = 0$. Άρα, από το κριτήριο του Leibnitz η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(1/\sqrt{n})$ συγκλίνει.

(ii) Αν $a_n = n^{1/n} - 1$, για κάθε $n > 1$ είναι $a_n > 0$. Για να αποδείξουμε ότι η ακολουθία (a_n) είναι φθίνουσα, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^{1/x} - 1$. Επειδή

$$f'(x) = \left(e^{\ln x/x} - 1\right)' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' e^{\ln x/x} = \frac{1 - \ln x}{x^2} x^{1/x},$$

για κάθε $x > e$ είναι $f'(x) < 0$. Δηλαδή, για $x > e$ η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα. Επομένως, για κάθε $n \geq 3$ η (a_n) είναι γνήσια φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων, τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = 1 - 1 = 0\,.$$

Άρα, από το κριτήριο του Leibnitz η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{1/n} - 1)$ συγκλίνει.

■

8. Να εξεταστεί αν οι σειρές της άσκησης 7 συγκλίνουν απόλυτα. Δηλαδή, να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/n} - 1\right)$.

Υπόδειξη. Για τη (ii): Αν χρησιμοποιηθεί η ανισότητα $x - 1 \geq \ln x$, $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = 1$, τότε

$$n^{1/n} - 1 \geq \ln n^{1/n} = \frac{\ln n}{n}\,.$$

Λύση.

(i) Η $a_n = \sin(1/\sqrt{n})$ είναι ακολουθία θετικών όρων. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

και ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2} = +\infty$, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/\sqrt{n}) = +\infty$, δηλαδή η σειρά αποκλίνει.

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$n^{1/n} - 1 \geq \ln n^{1/n} = \frac{\ln n}{n} \geq 0\,.$$

Όμως, όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = +\infty$ (αποκλίνει). Επομένως, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/n} - 1\right) = +\infty$ (αποκλίνει).

Αποδεικνύουμε τώρα ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = +\infty$:

<u>1ος τρόπος</u>. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$$

και ως γνωστόν η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης θα είναι και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = +\infty$.

<u>2ος τρόπος</u>. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x/x$, $x > 0$. Επειδή

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}\,,$$

για κάθε $x > e$ είναι $f'(x) < 0$. Δηλαδή, για $x > e$ η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα. Επομένως, για κάθε $n \geq 3$ η $a_n = \ln n/n$ είναι γνήσια φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων και από το κριτήριο συμπύκνωσης οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ είτε και οι δύο συγκλίνουν ή και οι δύο αποκλίνουν. Επειδή

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{\ln 2^n}{2^n} = \ln 2 \sum_{n=0}^{\infty} n = +\infty\,,$$

θα είναι και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = +\infty$, δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ αποκλίνει.

■

2η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$y = f(x) = x - 1 + \int_0^{x/2} \cos t^2 \, dt$$

είναι γνήσια μονότονη στο $\mathbb{R}$. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη της f, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{y\to -1} \frac{f^{-1}(y)}{y+1}\;.$$

Λύση. Είναι $f'(x) = 1 + (x/2)' \cdot \cos(x/2)^2 = 1 + (1/2) \cdot \cos\left(x^2/4\right) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Επομένως, η συνεχής συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και κατά συνέπεια $1-1$. Ως γνωστόν $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ και η f^{-1} είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα. Επειδή $f(0) = -1$ και η f^{-1} είναι συνεχής, αν το $y \to -1$ τότε το $x \to 0$. Άρα

$$\lim_{y\to -1} \frac{f^{-1}(y)}{y+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{f(x)+1} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{f'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+(1/2)\cdot\cos\left(x^2/4\right)} = \frac{2}{3}\,.$$

■

2. Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(x^2-1\right)y'' + xy' - y = 0\,, \qquad x > 1\,, \tag{1.17}$$

με την αντικατάσταση $t = \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της.

Λύση. Είναι $t = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh t$. Έχουμε

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

και

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{x}{\left(x^2-1\right)^{3/2}} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{x^2-1} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{x}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση προκύπτει ότι

$$\left(x^2-1\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{x^2-1} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{x}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}\right) + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - y = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - y = 0\,. \tag{1.18}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (1.18) είναι: $r^2-1=0$ με ρίζες $r_1 = -1$ και $r_2 = 1$. Επομένως, η γενική λύση της (1.18) είναι

$$y^*(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.17) είναι

$$y\left(x\right)=c_1\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}+c_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\,,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

■

3. Υποθέτουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε

$$f\left(x\right)+\int_0^x e^{x-t}f\left(t\right)\,dt=e^{-x}\,, \tag{1.19}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η $y=f\left(x\right)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$y''+y'=0\,,\quad y(0)=1\,,\ y'(0)=-2\,.$$

Λύνοντας τη διαφορική εξίσωση να βρεθεί η $y=f\left(x\right)$.

Λύση. Είναι

$$f\left(x\right)=e^{-x}-\int_0^x e^{x-t}f\left(t\right)\,dt=e^{-x}-e^x\int_0^x e^{-t}f\left(t\right)\,dt\,,$$

οπότε

$$f'\left(x\right)=-e^{-x}-e^x\int_0^x e^{-t}f\left(t\right)\,dt-e^xe^{-x}f\left(x\right)=-e^{-x}-e^x\int_0^x e^{-t}f\left(t\right)\,dt-f\left(x\right)$$

και

$$\begin{aligned}
f''\left(x\right)&=e^{-x}-e^x\int_0^x e^{-t}f\left(t\right)\,dt-e^xe^{-x}f\left(x\right)-f'\left(x\right)\\
&=e^{-x}-e^x\int_0^x e^{-t}f\left(t\right)\,dt-f\left(x\right)-f'\left(x\right)\\
&=e^{-x}-\left[f\left(x\right)+\int_0^x e^{x-t}f\left(t\right)\,dt\right]-f'\left(x\right)\\
&=e^{-x}-e^{-x}-f'\left(x\right) && \text{(λόγω της (1.19))}\\
&=-f'\left(x\right)\,,
\end{aligned}$$

δηλαδή $f''\left(x\right)+f'\left(x\right)=0$. Επομένως η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, με $f\left(0\right)=1$ και $f'\left(0\right)=-2$. Δηλαδή, η $y=f\left(x\right)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$y''+y'=0\,,\quad y(0)=1\,,\ y'(0)=-2\,.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της $y'' + y' = 0$ είναι: $r^2 + r = 0$ με ρίζες $r_1 = -1$ και $r_2 = 0$. Επομένως, η γενική λύση της $y'' + y' = 0$ είναι

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Η συνθήκη $y(0) = 1$ συνεπάγεται ότι $c_1 + c_2 = 1$, ενώ η $y'(0) = -2$ συνεπάγεται ότι $c_1 = 2$. Δηλαδή, είναι $c_1 = 2$ και $c_2 = -1$. Άρα,

$$y = f(x) = 2e^{-x} - 1\,.$$

■

4. Αν

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\,dx\,, \qquad a \neq 0\,,\, n \in \mathbb{N}^*\,,$$

να αποδειχθεί ο αναγωγικός τύπος

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n\,.$$

Να υπολογιστεί το I_2 και το I_3.

Λύση. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\,dx &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \left((x^2 + a^2)^{-n} \right)' dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\,dx - 2na^2 \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}}\,dx\,,
\end{aligned}$$

οπότε

$$(2n-1) I_n = -\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2na^2 I_{n+1} \;\text{ και ισοδύναμα }\; I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n\,.$$

Επειδή

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c\,,$$

από τον αναγωγικό τύπο έχουμε

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + c$$

και

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}I_2 = \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a} + c\,.$$

■

5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1}{x+x^a}\,dx\,, \qquad x>0\,,\ a\in\mathbb{R}\,.$$

Εφαρμογή. Να υπολογιστεί το όριο $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{1}{x+x^{\sqrt{2}}}\,dx$.

Λύση. Αν $a=1$, είναι

$$I = \int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln x + c\,.$$

Έστω $a\neq 1$. Τότε,

$$\begin{aligned} I = \int \frac{1}{x+x^a}\,dx = \int \frac{x^{-a}}{x^{1-a}+1}\,dx \\ &= \frac{1}{1-a}\int \frac{1}{u}\,du && (\text{αντικατάσταση } u = x^{1-a}+1) \\ &= \frac{1}{1-a}\ln u + c \\ &= \frac{1}{1-a}\ln\left(x^{1-a}+1\right) + c\,. \end{aligned}$$

Άρα,

$$I = \int \frac{1}{x+x^a}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-a}\ln\left(x^{1-a}+1\right)+c & \text{αν } a\neq 1, \\ \frac{1}{2}\ln x + c & \text{αν } a=1\,. \end{cases}$$

Εφαρμογή. Για $a=\sqrt{2}$ έχουμε

$$\int_1^R \frac{1}{x+x^{\sqrt{2}}}\,dx = \frac{1}{1-\sqrt{2}}\ln\left(x^{1-\sqrt{2}}+1\right)\Big|_{x=1}^{x=R} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}\left[\ln\left(R^{1-\sqrt{2}}+1\right) - \ln 2\right]\,.$$

Επειδή

$$\lim_{R\to+\infty}\ln\left(R^{1-\sqrt{2}}+1\right) = \lim_{R\to+\infty}\ln\left(1/R^{\sqrt{2}-1}+1\right) = \ln 1 = 0\,,$$

είναι

$$\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{1}{x+x^{\sqrt{2}}}\,dx = \frac{-\ln 2}{1-\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}+1\right)\ln 2\,.$$

■

6. (α') Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1}{3+5\sin x}\, dx\,.$$

(β') Να βρεθεί η συνάρτηση $y = f\,(x)$, $x \geq \sqrt[3]{2}$, αν

$$f'\,(x) = \frac{\sqrt{x^3-2}}{x}\,, \quad f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 1\,.$$

Λύση.

(α') Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t = \tan\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$, οπότε $x = 2\arctan t$, έχουμε

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{και} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt\,.$$

Επομένως,

$$I = \int \frac{1}{3+10t/\left(1+t^2\right)}\frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2}{3t^2+10t+3}\, dt = \int \frac{2}{(3t+1)\,(t+3)}\, dt\,.$$

Επειδή

$$\frac{2}{(3t+1)(t+3)} = \frac{A}{3t+1} + \frac{B}{t+3} = \frac{A(t+3)+B(3t+1)}{(3t+1)(t+3)} = \frac{(A+3B)t+(3A+B)}{(3t+1)(t+3)}\,,$$

είναι $\{A+3B=0\,, \quad 3A+B=2\}$. Η λύση του συστήματος είναι $\{A=3/4\,, B=-1/4\}$. Άρα,

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{4}\int \frac{1}{3t+1}\, dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+3}\, dt \\ &= \frac{1}{4}\ln|3t+1| - \frac{1}{4}\ln|t+3| + c \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3t+1}{t+3}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)+3}\right| + c\,. \end{aligned}$$

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^3-2}}{x}\,dx &= \int \frac{t}{\left(t^2+2\right)^{1/3}} \cdot \frac{2t}{3\left(t^2+2\right)^{2/3}}\,dt \\
&\qquad \text{(αντικατάσταση } t=\sqrt{x^3-2} \Leftrightarrow x=\left(t^2+2\right)^{1/3}\text{)} \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{t^2}{t^2+2}\,dt = \frac{2}{3}\int \frac{\left(t^2+2\right)-1}{t^2+2}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\int dt - \frac{2}{3}\int \frac{1}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\,dt \\
&= \frac{2}{3}t - \frac{2}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + c \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{x^3-2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\sqrt{\frac{x^3-2}{2}} + c\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3-2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\sqrt{\frac{x^3-2}{2}} + c\,, \quad \text{με } f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 1\,.$$

Άρα, $c = 1$ και

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3-2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\sqrt{\frac{x^3-2}{2}} + 1\,.$$

■

7. Αν η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 f(x)\,x^2\,dx = \frac{1}{3}f(\xi)\,, \tag{1.20}$$

για κάποιο $\xi \in [0,1]$.

Εφαρμογή. Αν $f(x) = \arctan x$, να βρεθεί η τιμή του $\xi \in [0,1]$.

Υπόδειξη. Αν η f παίρνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της στα σημεία x_0 και y_0 αντίστοιχα του $[0,1]$, να αποδειχθεί ότι

$$f(x_0) \leq 3\int_0^1 f(x)\,x^2\,dx \leq f(y_0)\,.$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι η f παίρνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της στα σημεία x_0 και y_0 αντίστοιχα του $[0,1]$. Τότε $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$, για κάθε $x \in [0,1]$ και επομένως

$$\int_0^1 f(x_0)\,x^2\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,x^2\,dx \leq \int_0^1 f(y_0)\,x^2\,dx\,.$$

Επειδή $\int_0^1 f(x_0)x^2\,dx = f(x_0)\int_0^1 x^2\,dx = \frac{f(x_0)}{3}$ και παρόμοια $\int_0^1 f(y_0)x^2\,dx = \frac{f(y_0)}{3}$, από τις προηγούμενες ανισότητες προκύπτει ότι

$$f(x_0) \le 3\int_0^1 f(x)x^2\,dx \le f(y_0)\,.$$

Επομένως, από το θεώρημα του Bolzano ή ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = 3\int_0^1 f(x)x^2\,dx \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \int_0^1 f(x)x^2\,dx = \frac{1}{3}f(\xi)\,.$$

Εφαρμογή. Αν $f(x) = \arctan x$, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \arctan x\,dx &= \frac{1}{3}\,x^3\arctan x\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3\,(\arctan x)'\,dx \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\left(x^2 - \ln\left(1+x^2\right)\right)\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\left(1-\ln 2\right)\,.
\end{aligned}$$

Επομένως, από την (1.20) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\arctan\xi = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}(1-\ln 2) \\
&\Leftrightarrow \arctan\xi = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(1-\ln 2) \\
&\Leftrightarrow \xi = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(1-\ln 2)\right) \approx 0,7321\,.
\end{aligned}$$

■

8. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$ και συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f, να αποδειχθεί ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx = bf(b) - af(a)\,. \tag{1.21}$$

Εφαρμογή. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx = \int_0^1 \sqrt[p]{1-x^q}\,dx\,, \qquad p,q>0\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx &= \int_a^b yf'(y)\,dy && \text{(αντικατάσταση } y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)\text{)}\\ &= yf(y)\big|_{y=a}^{y=b} - \int_a^b f(y)\,dy && \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\ &= bf(b) - af(a) - \int_a^b f(y)\,dy\end{aligned}$$

και ισοδύναμα

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx = bf(b) - af(a)\,.$$

*Εφαρμογή*. Αν $y = f(x) = \sqrt[q]{1-x^p}$, για κάθε $x \in (0,1)$ είναι

$$f'(x) = \left[(1-x^p)^{1/q}\right]' = -\frac{p}{q}x^{p-1}(1-x^p)^{1/q-1} < 0\,,$$

δηλαδή η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$ με πεδίο τιμών το $[0,1]$. Επειδή

$$y = \sqrt[q]{1-x^p} \Leftrightarrow y^q = 1-x^p \Leftrightarrow x^p = 1-y^q \Leftrightarrow x = \sqrt[p]{1-y^q}\,,$$

η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x) = \sqrt[p]{1-x^q}$, $x \in [0,1]$. Είναι $f(0) = 1$ και $f(1) = 0$, οπότε από την (1.21) έχουμε

$$\int_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx + \int_1^0 \sqrt[p]{1-x^q}\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx = \int_0^1 \sqrt[p]{1-x^q}\,dx\,.$$

■

3η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και ότι $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$, για $k = 1,2,\ldots,n-1$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $c \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$|f^{(n)}(c)| \geq n!2^{n-1}|f(1) - f(0)|\,.$$

Υπόδειξη. Αν $x_0 \in [0,1]$, από τον τύπο του Taylor είναι

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(x_0) + f'(x_0)\left(\frac{1}{2} - x_0\right) + \frac{f''(x_0)}{2!}\left(\frac{1}{2} - x_0\right)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\left(\frac{1}{2} - x_0\right)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\left(\frac{1}{2} - x_0\right)^n,$$

για κάποιο ξ μεταξύ x_0 και $1/2$. Χρησιμοποιείστε τον τύπο του Taylor για $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Taylor για $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$, χρησιμοποιώντας την υπόθεση $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$, για $k = 1, 2, \ldots, n-1$, έχουμε αντίστοιχα

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \tag{1.22}$$

για κάποιο ξ_1, με $0 < \xi_1 < 1/2$ και

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + \frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \tag{1.23}$$

για κάποιο ξ_2, με $1/2 < \xi_2 < 1$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1.22) και (1.23) έχουμε

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{n!2^n}\left[f^{(n)}(\xi_1) - (-1)^n f^{(n)}(\xi_2)\right].$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
|f(1) - f(0)| &= \frac{1}{n!2^n}\left|f^{(n)}(\xi_1) - (-1)^n f^{(n)}(\xi_2)\right| \\
&\leq \frac{1}{n!2^n}\left[\left|f^{(n)}(\xi_1)\right| + \left|f^{(n)}(\xi_2)\right|\right] \\
&\leq \frac{2}{n!2^n}\left|f^{(n)}(c)\right|. \qquad \left(\left|f^{(n)}(c)\right| = \max\left\{\left|f^{(n)}(\xi_1)\right|, \left|f^{(n)}(\xi_2)\right|\right\}\right)
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\left|f^{(n)}(c)\right| \geq n!2^{n-1}\left|f(1) - f(0)\right|.$$

Σημείωση. Αν η f είναι σταθερή συνάρτηση, τότε θα είναι

$$\left|f^{(n)}(c)\right| = 0 = n!2^{n-1}\left|f(1) - f(0)\right|, \quad \text{για κάθε } c \in [0,1].$$

□

2. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0,1]$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+kn^2}}=\frac{\pi}{2}-1\,.$$

Λύση. Είναι

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+kn^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{n-k}{n+k}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1-k/n}{1+k/n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

όπου $f(x)=\sqrt{(1-x)/(1+x)}$. Επομένως, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+kn^2}}=\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\,.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θέτουμε

$$t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,,\quad \text{οπότε } x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad \text{και } dx=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+kn^2}}&=\int_1^0 t\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt\\&=4\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt\\&=-2\int_0^1 t\left[\left(1+t^2\right)^{-1}\right]'\,dt\\&=-2\,\frac{t}{1+t^2}\bigg|_{t=0}^{t=1}+2\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\&=-1+2\arctan t\big|_{t=0}^{t=1}=\frac{\pi}{2}-1\,.\end{aligned}$$

■

3. Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^{1/\sqrt{n}}f(x)e^{-nx}\,dx=f(0)\,.$$

Απόδειξη. Επειδή $e^{-nx} > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα(παραπέμπουμε στο [27]) είναι

$$n \int_0^{1/\sqrt{n}} f(x)e^{-nx}\,dx = nf(\xi_n) \int_0^{1/\sqrt{n}} e^{-nx}\,dx = -f(\xi_n)\,e^{-nx}\Big|_{x=0}^{x=1/\sqrt{n}} = \left(1 - e^{-\sqrt{n}}\right) f(\xi_n)\,, \tag{1.24}$$

για κάποιο ξ_n, με $0 \leq \xi_n \leq 1/\sqrt{n}$. Επειδή η f είναι συνεχής και $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$, θα είναι $\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(0)$. Άρα, από την (1.24) έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{1/\sqrt{n}} f(x)e^{-nx}\,dx = f(0)\,.$$

□

4. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,dx$$

συγκλίνει για $a > 0$.

Εφαρμογή. Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^p \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$$

συγκλίνει για $p > -2$.

Λύση. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x^a}\,dx = -\left.\frac{\cos x}{x^a}\right|_{x=1}^R - a\int_1^R \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx = -\frac{\cos R}{R^a} + \cos 1 - a\int_1^R \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx\,.$$

Αν $a > 0$, τότε

$$\left|\frac{\cos R}{R^a}\right| \leq \frac{1}{R^a} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \quad \text{και επομένως} \quad \lim_{R\to\infty} \frac{\cos R}{R^a} = 0\,.$$

Είναι λοιπόν

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^R \frac{\sin x}{x^a}\,dx = \cos 1 - a\underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{a+1}}\,dx}_{I_1}\,.$$

Αρκεί να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1. Επειδή

$$\left|\frac{\cos x}{x^{a+1}}\right| \leq \frac{1}{x^{a+1}}$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^{a+1}}\,dx$ συγκλίνει για $a > 0$, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^{a+1}}\right|\,dx$ θα συγκλίνει. Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1 συγκλίνει. Άρα, για $a > 0$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,dx$ συγκλίνει.

Εφαρμογή. Με την αντικατάσταση $x = 1/t$, οπότε $dx = -\left(1/t^2\right)dt$, παίρνουμε

$$\int_\varepsilon^1 x^p \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = -\int_{1/\varepsilon}^1 \frac{\sin t}{t^{p+2}}\,dt = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\sin t}{t^{p+2}}\,dt\,, \quad \varepsilon > 0\,.$$

Επομένως,

$$\int_0^1 x^p \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^p \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_1^{1/\varepsilon} \frac{\sin t}{t^{p+2}}\,dt = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{p+2}}\,dt\,.$$

Όμως, αποδείξαμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{p+2}}\,dt \text{ συγκλίνει αν } p+2>0 \Leftrightarrow p > -2\,.$$

Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^p \sin(1/x)\,dx$ συγκλίνει για $p > -2$. ■

5. (α΄) Αν $a^2 - 4b < 0$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+ax+b} = \frac{2\pi}{\sqrt{4b-a^2}}\,.$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

Υπόδειξη. Είναι $x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$ και

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\,.$$

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+ax+b} &= \int \frac{dx}{(x+a/2)^2 + (4b-a^2)/4} \\ &= \int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{4b-a^2}/2\right)^2} \qquad \text{(αντικατάσταση } t = x+a/2\text{)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{4b-a^2}}\right) + c\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+ax+b} &= \lim_{\substack{r\to-\infty\\R\to+\infty}}\int_r^R\frac{dx}{x^2+ax+b}\\ &= \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\left[\lim_{R\to+\infty}\arctan\left(\frac{2R}{\sqrt{4b-a^2}}\right)-\lim_{r\to-\infty}\arctan\left(\frac{2r}{\sqrt{4b-a^2}}\right)\right]\\ &= \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{2\pi}{\sqrt{4b-a^2}}\,.\end{aligned}$$

(β΄) Επειδή

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^4+1}\,dx &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx-\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx\\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx\\ &\quad-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx\\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\\ &\quad+\frac{1}{4}\left[\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx+\int\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx\right],\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας και το (α΄) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx &= \lim_{\substack{r\to-\infty\\R\to+\infty}}\int_r^R\frac{1}{x^4+1}\,dx\\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\lim_{R\to\infty}\ln\left(\frac{R^2+\sqrt{2}R+1}{R^2-\sqrt{2}R+1}\right)-\lim_{r\to-\infty}\ln\left(\frac{r^2+\sqrt{2}r+1}{r^2-\sqrt{2}r+1}\right)\right]\\ &\quad+\frac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{2\pi}{\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}}+\frac{2\pi}{\sqrt{4-(-\sqrt{2})^2}}\right]=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

■

6. (α΄) Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης R' της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}a_nx^n\,.$$

(β΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης καθώς επίσης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-1)^n \, .$$

Λύση.

(α΄) Από την υπόθεση είναι $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1/R$. Αν $c_n = n^n a_n/n!$, τότε

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^{n+1} a_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n a_n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{R} \, . \end{aligned}$$

Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (n^n a_n/n!)\, x^n$ είναι $R' = R/e$.

(β΄) Αν $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} \, .$$

Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$ είναι $R=4$. Δηλαδή, η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x-1| < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 5$. Θα εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση τη δυναμοσειρά για $x=-3$ και για $x=5$.

(i) Για $x=5$ παίρνουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n \, ,$$

με γενικό όρο $c_n = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$. Επειδή

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{[(n+1)!]^2 4^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} > 1 \, ,$$

η ακολουθία θετικών όρων (c_n) είναι αύξουσα και επομένως $\lim_{n\to\infty} c_n \neq 0$. Άρα, η σειρά αποκλίνει.

(ii) Για $x=-3$ παίρνουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n \, ,$$

με γενικό όρο $c_n = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$. Όπως και προηγουμένως,

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} > 1 \, .$$

Δηλαδή η ακολουθία $(|c_n|)$ είναι αύξουσα και επομένως $\lim_{n\to\infty} c_n \neq 0$. Άρα, η σειρά αποκλίνει.

Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$ είναι $I = (-3, 5)$.

■

7. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $y = e^{-x^2}$ σε δυναμοσειρά, να αποδειχθεί ότι

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!(2k+1)}\,.$$

Αν $I \approx \sum_{k=0}^{4}(-1)^k/k!(2k+1) = 1 - 1/3 + 1/10 - 1/42 + 1/216 \approx 0,7475$, να αποδειχθεί ότι το σφάλμα της προσέγγισης είναι μικρότερο του 10^{-3}.

Λύση. Επειδή ως γνωστόν $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, θα είναι $e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}\,dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\cdot \left.\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|_{x=0}^{x=1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\,(2k+1)}\,.\end{aligned}$$

Αν $a_k = \frac{1}{k!(2k+1)}$ και πάρουμε το $I \approx S_4 = \sum_{k=0}^{4}(-1)^k \frac{1}{k!(2k+1)}$, είναι γνωστό από το κριτήριο του Leibniz για εναλλάσσουσες σειρές ότι

$$|I - S_4| \leq a_5 = \frac{1}{5!\cdot 11} = \frac{1}{1320} < 10^{-3}\,.$$

Με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων είναι $I = 0,74$. ■

8. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης καθώς επίσης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$1 - \frac{x^3}{4} + \frac{x^7}{8} - \frac{x^{11}}{12} + \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{4n-1}}{4n} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{4n-1}}{4n}\,.$$

Υπόδειξη. Αν

$$f(x) = 1 - \frac{x^3}{4} + \frac{x^7}{8} - \frac{x^{11}}{12} + \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{4n-1}}{4n} + \cdots\,, \quad |x| < 1\,,$$

τότε

$$(xf(x))' - 1 = -x^3 + x^7 - x^{11} + \cdots + (-1)^n\,x^{4n-1} + \cdots\,, \quad |x| < 1\,.$$

Λύση. Αν $c_n = (-1)^n\, x^{4n-1}/4n$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{4\,(n+1)}\,x^4 = x^4\,, \quad \text{οπότε } x^4 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1\,.$$

Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

Θα υπολογίσουμε τώρα το άθροισμα της δυναμοσειράς. Αν $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n}$, $|x| < 1$, είναι $f(0) = 1$.

<u>*1ος τρόπος*</u>. Για $|x| < 1$ είναι $xf(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{4n}$. Επομένως,

$$(xf(x))' - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{4n-1} = -x^3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{4(n-1)} = -x^3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Επειδή ως γνωστόν $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$, $|t| < 1$ (γεωμετρική σειρά), για $t = x^4$ είναι

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Άρα,

$$(xf(x))' - 1 = -\frac{x^3}{1+x^4} \quad \text{και ισοδύναμα} \quad (xf(x))' = 1 - \frac{x^3}{1+x^4}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Ολοκληρώνοντας, για $|x| < 1$ παίρνουμε

$$xf(x) = \int dx - \int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = x - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + c\,.$$

Αν $x = 0$, τότε $0 = -\ln 1/4 + c \Leftrightarrow c = 0$. Επομένως, $xf(x) = x - \frac{1}{4}\ln(1+x^4)$. Άρα,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4x}\ln(1+x^4) & \text{αν } |x| < 1,\ x \neq 0\,, \\ 0 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

<u>*2ος τρόπος*</u>. Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα της συνάρτησης $y = \ln(1+t)$, $|t| < 1$, σε δυναμοσειρά. Ως γνωστόν, για $|t| < 1$ είναι $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n/n$. Αν θέσουμε $t = x^4$, τότε

$$\ln(1+x^4) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{4n}}{n} \Leftrightarrow -\ln(1+x^4) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{n}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Επομένως,

$$-\frac{1}{4x}\ln(1+x^4) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n}\,, \quad |x| < 1\,,\ x \neq 0\,.$$

Άρα,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n}=1-\frac{1}{4x}\ln(1+x^4)\,,\quad \text{για } |x|<1\,,\ x\neq 0\,.$$

■

1.10 Ακαδημαϊκό έτος 2004–5

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Έστω

$$a_n = \frac{\varepsilon_0}{1} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{2} + \cdots + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}{2^n},$$

όπου $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$. Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (a_n) είναι Cauchy και επομένως συγκλίνει. Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, να αποδειχθεί ότι $a \in [-2, 2]$.

Απόδειξη. *1ος τρόπος.* Αν $k \in \mathbb{N}$, είναι

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &= \left|\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n+k}}{2^{n+k}}\right| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - 1/2^k}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} 1/2^n = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$. Δηλαδή η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy και επομένως θα συγκλίνει. Τέλος, επειδή

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq a_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

και $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$, αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, τότε $a \in [-2, 2]$.

2ος τρόπος. Το a_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k}{2^k}. \tag{1.25}$$

Επειδή $\left|\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k/2^k\right| \leq 1/2^k$ και η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k}{2^k}\right|$ θα συγκλίνει. Δηλαδή η σειρά (1.25) συγκλίνει απόλυτα και κατά συνέπεια θα συγκλίνει. Άρα και η ακολουθία (a_n), που είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς, θα συγκλίνει. Επειδή η (a_n) συγκλίνει, είναι ακολουθία Cauchy.

$\square$

2. (α΄) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi/2)^n}{n!}$ συγκλίνει και ότι αν $a_n := \frac{1}{n!}\int_0^1 (\arcsin x)^n \, \mathrm{d}x$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(β΄) Αν $b_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n} \, \mathrm{d}x$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Απόδειξη. (α΄) Αν $\beta_n = \frac{(\pi/2)^n}{n!}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\pi/2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(\pi/2)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi/2}{n+1} = 0$$

και από το κριτήριο του λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi/2)^n}{n!}$ συγκλίνει. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\pi/2)^n}{n!} = 0\,.$$

Επειδή ως γνωστόν $0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in [0,1]$, θα είναι

$$0 \leq a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (\arcsin x)^n \, \mathrm{d}x \leq \frac{(\pi/2)^n}{n!}\int_0^1 \mathrm{d}x = \frac{(\pi/2)^n}{n!}\,.$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \frac{(\pi/2)^n}{n!} = 0$, οπότε και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Επειδή $0 \leq \frac{\sin x}{(x+n} \leq \frac{1}{x+n}$, για κάθε $x \in [0,\pi]$, είναι

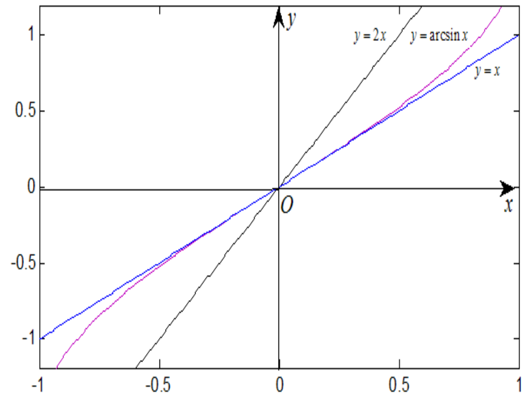
$$0 \leq b_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n} \, \mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{x+n} \, \mathrm{d}x = \ln(x+n)|_{x=0}^{x=\pi} = \ln(\pi+n) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{\pi}{n}\right)\,.$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \ln(1+\pi/n) = 0$, οπότε και $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. □

3. (α΄) Να αποδειχθεί ότι $x \leq \arcsin x \leq 2x$, για κάθε $x \in [0,1]$.

(β΄) Έστω $a_n = \int_0^{1/n} (\arcsin x)^a \, \mathrm{d}x$, $a > -1$. Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $a > 0$.

Απόδειξη. (α΄) Γεωμετρικά, η απόδειξη της διπλής ανισότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνουμε τώρα μία αναλυτική απόδειξη : Αν $f(x) = \arcsin x - x$, τότε $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \geq 0$, για κάθε $x \in [0,1)$. Επομένως $f(x) \geq f(0) = 0$, για κάθε $x \in [0,1)$ και ισοδύναμα $\arcsin x \geq x$, $\forall x \in [0,1]$. Αν $g(x) = 2x - \arcsin x$, τότε $g'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ αν και μόνο αν $x = \pm\sqrt{3}/2$. Επειδή $g(0) = 0$, $g(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3} - \pi/3$ και $g(1) = 2 - \pi/2$, η g παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $x = 0$. Είναι $g(x) \geq g(0) = 0$, για κάθε $x \in [0,1]$ και ισοδύναμα $\arcsin x \leq 2x$, για κάθε $x \in [0,1]$.

(β΄) Λόγω της (α΄) είναι

$$\int_0^{1/n} x^a \,\mathrm{d}x \leq a_n = \int_0^{1/n} (\arcsin x)^a \,\mathrm{d}x \leq \int_0^{1/n} (2x)^a \,\mathrm{d}x$$

και επομένως

$$\frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{n^{a+1}} \leq a_n \leq \frac{2^a}{a+1} \cdot \frac{1}{n^{a+1}} .$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης για σειρές θετικών όρων, από την προηγούμενη ανισότητα προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+1}}$ συγκλίνει. Ως γνωστόν η τελευταία σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $a + 1 > 1 \Leftrightarrow a > 0$. Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $a > 0$.

□

4. Έστω η ακολουθία (a_n), με $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(β΄) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$.

Απόδειξη. (α΄) Είναι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}\,.$$

Τότε ως γνωστόν θα είναι και $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}/n=1/\mathrm{e}$.

(β΄) Είναι

$$\sqrt[n]{n!}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\infty=\infty\,.$$

□

5. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}\quad\text{και}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}\,.$$

Λύση. (i) Αν $a_n=1/\sqrt[n]{n!}$, από την προηγούμενη άσκηση είναι $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η ακολουθία (a_n) είναι γνήσια φθίνουσα. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
a_n>a_{n+1}&\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}>\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\Leftrightarrow\sqrt[n+1]{(n+1)!}>\sqrt[n]{n!}\Leftrightarrow\ln\sqrt[n+1]{(n+1)!}>\ln\sqrt[n]{n!}\\
&\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}\left(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln(n+1)\right)>\frac{1}{n}\left(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n\right)\\
&\Leftrightarrow\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n+\ln(n+1)}{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}>\frac{n+1}{n}\\
&\Leftrightarrow 1+\frac{\ln(n+1)}{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}>1+\frac{1}{n}\\
&\Leftrightarrow n\ln(n+1)>\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n
\end{aligned}$$

και η τελευταία ανισότητα προφανώς ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επομένως, από το κριτήριο του Leibniz η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ συγκλίνει.

(ii) Αν $f(x)=\frac{1}{x-\ln x}$, $x>0$, τότε για κάθε $x\geq 1$ είναι $f'(x)=\frac{1/x-1}{(x-\ln x)^2}\leq 0$. Επομένως η ακολουθία $b_n=\frac{1}{n-\ln n}$ είναι φθίνουσα. Επειδή $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)}=0\,.$$

Άρα, από το κριτήριο του Leibniz η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ συγκλίνει. ■

6. (α΄) Να αποδειχθεί ότι σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ συγκλίνει.

   (β΄) Αν $a_n = \ln(\cos(1/n)) \ln(\sin(1/n))$, να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

   <u>*Υπόδειξη*</u>. Να συγκριθεί η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Λύση.

(α΄) Αν $b_n = \frac{\ln n}{n^2}$ και $c_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, τότε $\frac{b_n}{c_n} = \frac{\ln n}{n^{1/2}}$. Είναι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/2x^{1/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^{1/2}} = 0\,,$$

οπότε $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 0$. Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης για σειρές με θετικούς όρους και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ θα συγκλίνει.

(β΄) Αν $b_n = \frac{\ln n}{n^2}$, τότε για κάθε $n \geq 2$ είναι

$$\frac{|a_n|}{b_n} = \frac{|\ln(\cos(1/n))|}{1/n^2} \cdot \frac{|\ln(\sin(1/n))|}{\ln n} = \frac{-\ln(\cos(1/n))}{1/n^2} \cdot \frac{-\ln(\sin(1/n))}{\ln n}\,.$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{-\ln(\cos(1/x))}{1/x^2} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{-\ln(\cos t)}{t^2} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t/\cos t}{2t} && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{-\ln(\sin(1/x))}{\ln x} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{-\ln(\sin t)}{\ln(1/t)} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(\sin t)}{\ln t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{\cos t/\sin t}{1/t} && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sin t} \cdot \cos t = 1\,,
\end{aligned}$$

είναι $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = 1/2$. Επειδή από το (α΄) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης για σειρές με θετικούς όρους και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ θα συγκλίνει. Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα και επομένως θα συγκλίνει.

■

2η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Αν η $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε

$$\left| x \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \right| \leq Mx|\ln x|, \text{ για κάθε } x \in (0,1]\,.$$

Λύση. Αν $M = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$, τότε για κάθε $x \in (0,1]$

$$\begin{aligned}
\left| x \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \right| &\leq x \int_x^1 \frac{|f(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \\
&\leq x \int_x^1 \frac{M}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= Mx\,\ln t|_{t=x}^{t=1} = Mx\,(\ln 1 - \ln x) = -Mx\ln x = Mx\,|\ln x|\,.
\end{aligned}$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0^+} -x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{1/x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} x = 0,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+} \left| x \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \right| = 0 \text{ και κατά συνέπεια } \lim_{x\to 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

■

2. (α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t\,, \quad \forall t \geq 0\,.$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. $\int_x^{2x} \left(\sin t/t^2\right)\,\mathrm{d}t - \ln 2 = \int_x^{2x} \left[(\sin t - t)/t^2\right]\,\mathrm{d}t$, για κάθε $x > 0$.

Απόδειξη. (α΄) Αν $\varphi(t) = \sin t - t$, τότε $\varphi'(t) = \cos t - 1 \le 0$. Επομένως $\varphi(t) \le \varphi(0) = 0$, $\forall t \ge 0$ και ισοδύναμα $\sin t \le t$, $\forall t \ge 0$. Αν $f(t) = t - t^3/6 - \sin t$, τότε $f'(t) = 1 - t^2/2 - \cos t$ και $f''(t) = -t + \sin t = \varphi(t) \le 0$, $\forall t \ge 0$. Κατά συνέπεια $f'(t) = 1 - t^2/2 - \cos t \le f'(0) = 0$, $\forall t \ge 0$. Άρα, $f(t) \le f(0) = 0$, $\forall t \ge 0$ και ισοδύναμα $t - t^3/6 \le \sin t$, $\forall t \ge 0$.

(β΄) Για κάθε $x > 0$ είναι

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \ln 2 &= \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t - (\ln 2x - \ln x)\\ &= \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \frac{\sin t - t}{t^2}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Όμως από την (α΄) $\left|(\sin t - t)/t^2\right| \le t/6$, για κάθε $t > 0$. Επομένως,

$$\left|\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \ln 2\right| = \left|\int_x^{2x} \frac{\sin t - t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_x^{2x} \left|\frac{\sin t - t}{t^2}\right|\mathrm{d}t \le \int_x^{2x} \frac{t}{6}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{4} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0\,.$$

Άρα, $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \left(\sin t/t^2\right)\,\mathrm{d}t = \ln 2$.

□

3. (α΄) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

$$I_n = \int_0^{\pi} \left(\alpha t^2 + \beta t\right) \cos(nt)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{2\alpha\pi + \beta}{n^2} - \frac{\beta}{n^2}\,.$$

(β΄) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία $I_n = 1/n^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση.

(α΄) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\pi} \left(\alpha t^2 + \beta t\right) \left(\frac{\sin(nt)}{n}\right)' \mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{n}\left(\alpha t^2 + \beta t\right)\sin(nt)\Big|_{t=0}^{t=\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} (2\alpha t + \beta)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} (2\alpha t + \beta)\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)' \mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{n^2}(2\alpha t + \beta)\cos(nt)\Big|_{t=0}^{t=\pi} - \frac{2\alpha}{n^2}\int_0^{\pi} \cos(nt)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{n^2}\left[(2\alpha\pi + \beta)\cos n\pi - \beta\right] - \frac{2\alpha}{n^3}\sin(nt)\Big|_{t=0}^{t=\pi} = (-1)^n \frac{2\alpha\pi + \beta}{n^2} - \frac{\beta}{n^2}\,.\end{aligned}$$

(β΄) Από την (α΄)

$$I_n = \begin{cases} \frac{2\alpha\pi}{4k^2} & \text{αν } n = 2k\ , \\ -\frac{2\alpha\pi+2\beta}{(2k+1)^2} & \text{αν } n = 2k+1\ . \end{cases}$$

Επειδή $I_n = 1/n^2$, αν $n = 2k$ έχουμε $2\alpha\pi/4k^2 = 1/4k^2$, οπότε $\alpha = 1/2\pi$. Αν $n = 2k+1$, τότε $-\left(2\alpha\pi + 2\beta\right)/\left(2k+1\right)^2 = 1/\left(2k+1\right)^2$. Επομένως, $\beta = -\alpha\pi - 1/2 = -1$.

■

4. Να βρεθεί η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \geq 1$, αν

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{x^2}\,, \quad f(1) = -\pi/2\,.$$

Λύση. Είναι

$$f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{και επομένως} \quad f(x) = -\frac{\pi}{2} + \int_1^x \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 1/t$, οπότε $\mathrm{d}u = \left(-1/t^2\right)\mathrm{d}t$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\pi}{2} + \int_{1/x}^1 \sqrt{\frac{1/u-1}{1/u+1}}\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi}{2} + \int_{1/x}^1 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi}{2} + \int_{1/x}^1 \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\pi}{2} + \int_{1/x}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u - \int_{1/x}^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi}{2} + \arcsin u\big|_{u=1/x}^{u=1} + \sqrt{1-u^2}\Big|_{u=1/x}^{u=1} \\ &= -\frac{\pi}{2} + \arcsin 1 - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,. \end{aligned}$$

■

5. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{1}{1+y^2}\,y' = \ln\left(1+x^2\right)\ .$$

Λύση. Είναι

$$\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \ln\left(1+x^2\right)\ \mathrm{d}x\,, \text{ οπότε } \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int \ln\left(1+x^2\right)\ \mathrm{d}x\,.$$

Επομένως,

$$\arctan y = \int \ln\left(1+x^2\right)\ \mathrm{d}x\,.$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
\arctan y &= x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int \frac{\left(1+x^2\right)-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int \mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2\arctan x + C\,, \quad C\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = \tan\left(x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2\arctan x + C\right)\,, \quad C\in\mathbb{R}\,.$$

■

6. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, με $f(0)=1$, τέτοια ώστε

$$f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \forall x\in\mathbb{R}\,.$$

Λύση. Παραγωγίζοντας έχουμε τη διαφορική εξίσωση $f''(x)=f'(x)$ και ισοδύναμα $f''(x)-f'(x)=0$ με χαρακτηριστική εξίσωση : $r^2-r=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $r_1=0$ και $r_2=1$ και επομένως η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$f(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^x\,, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

Όμως $f(0)=1$, οπότε $c_1+c_2=1$. Είναι

$$f'(0) = c_2 = 1 + \int_0^1 \left(c_1+c_2\mathrm{e}^t\right)\,\mathrm{d}t = 1 + \left(c_1 t + c_2\mathrm{e}^t\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = 1 + c_1 + c_2\mathrm{e} - c_2$$

και επομένως $c_1+c_2(\mathrm{e}-2)=-1$. Είναι $c_1=(1-\mathrm{e})/(3-\mathrm{e})$ και $c_2=2/(3-\mathrm{e})$. Άρα

$$f(x) = \frac{1-\mathrm{e}}{3-\mathrm{e}} + \frac{2}{3-\mathrm{e}}\mathrm{e}^x = \frac{2\mathrm{e}^x+1-\mathrm{e}}{3-\mathrm{e}}\,.$$

■

7. Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\left(1+x^2\right)y'' + xy' - 4y = 0 \tag{1.26}$$

με την αντικατάσταση $t = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της.

Λύση. Είναι $t = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh t$. Έχουμε

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

και

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση (1.26) προκύπτει ότι

$$\left(1+x^2\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\right) + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 4y = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 4y = 0\,. \tag{1.27}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (1.27) είναι: $r^2 - 4 = 0$ με ρίζες $r_1 = -2$ και $r_2 = 2$. Επομένως, η γενική λύση της (1.27) είναι

$$y^*(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2\mathrm{e}^{2t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.26) είναι

$$y(x) = c_1\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{-2} + c_2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{2}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

8. Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση:

$$x^2y'' + 4xy' - \left(x^2 - 2\right)y = 0 \tag{1.28}$$

με την αντικατάσταση $u = x^2y$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της σ' ένα διάστημα I που δεν περιέχει το μηδέν.

Λύση. Είναι

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2xy + x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{και} \quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = 2y + 4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\,.$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση (1.28) έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} - u = 0\,. \tag{1.29}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (1.29) είναι: $r^2 - 1 = 0$ με ρίζες $r_1 = -1$ και $r_2 = 1$. Επομένως, η γενική λύση της (1.29) είναι

$$u\left(x\right) = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.28) σ' ένα διάστημα I που δεν περιέχει το μηδέν είναι

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{x}\right)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

3η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0, 1]$, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2 - 2kn + k^2}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2 - 2kn + k^2} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\left(2 - 2\left(k/n\right) + \left(k/n\right)^2\right)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{2 - 2\left(k/n\right) + \left(k/n\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\,,\end{aligned}$$

όπου $f\left(x\right)=\dfrac{x}{2-2x+x^2}$. Επομένως, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2-2kn+k^2} &= \int_0^1\frac{x}{2-2x+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1\frac{x}{\left(x-1\right)^2+1}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-1}^0\frac{t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad\qquad (\text{αντικατάσταση } t=x-1)\\
&= \int_{-1}^0\frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^0\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_{t=-1}^{t=0}+\arctan t|_{t=-1}^{t=0}\\
&= -\frac{1}{2}\ln 2-\arctan\left(-1\right)=\frac{\pi-\ln 4}{4}\,.
\end{aligned}$$

■

2. (α΄) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty\sqrt{x}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2}\frac{x^\alpha}{\left(\sin x\right)^\beta}\,\mathrm{d}x\,,\quad \alpha,\beta>0$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $0<\beta<\alpha+1$.

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\int_0^\infty\sqrt{x}\sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int_0^1\sqrt{x}\sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int_1^\infty\sqrt{x}\sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x}_{I_2}\,,$$

όπου το $I_1=\int_0^1\sqrt{x}\sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x$ είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_1^R \sqrt{x}\sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x &= \int_1^R \frac{1}{\sqrt{x}}\left(-\frac{\cos\left(x^2\right)}{2}\right)'\,\mathrm{d}x \\ &= -\left.\frac{\cos\left(x^2\right)}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1}^{x=R} + \frac{1}{2}\int_1^R \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad\qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= -\frac{\cos\left(R^2\right)}{2\sqrt{R}} + \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^R \frac{\cos\left(x^2\right)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Όμως

$$\left|\frac{\cos\left(R^2\right)}{\sqrt{R}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \text{ συνεπάγεται } \lim_{R\to\infty}\frac{\cos\left(R^2\right)}{\sqrt{R}} = 0\,,$$

και επομένως

$$\int_1^\infty \sqrt{x}\sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{\cos\left(x^2\right)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Επειδή

$$\left|\frac{\cos\left(x^2\right)}{x^{3/2}}\right| \le \frac{1}{x^{3/2}} \text{ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα } \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 2 \text{ συγκλίνει}\,,$$

από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left|\cos\left(x^2\right)/x^{3/2}\right|\,\mathrm{d}x$ θα συγκλίνει. Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left(\cos\left(x^2\right)/x^{3/2}\right)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει και κατά συνέπεια το I_2 συγκλίνει. Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \sqrt{x}\sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει.

(β') Αν $f(x) = x^\alpha/(\sin x)^\beta$ και $g(x) = 1/x^{\beta-\alpha}$, είναι $f(x), g(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, \pi/2]$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^\beta = \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\right)^\beta \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} 1^\beta = 1\,.$$

Όμως, ως γνωστόν, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} 1/x^{\beta-\alpha}\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\beta - \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < \beta < \alpha + 1$. Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} x^\alpha/(\sin x)^\beta\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει αν και μόνο αν $0 < \beta < \alpha + 1$.

■

3. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \ge \sqrt{\mathrm{e}}$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο γενικευμένου ολοκληρώματος για σειρές, να αποδειχθεί ότι η σειρά

$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\ln n/n^2\right)$ συγκλίνει και ότι

$$\frac{1+\ln 2}{2} < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2} < \frac{\ln\sqrt{2}+1+\ln 2}{2}\,.$$

Λύση. Είναι $f'(x) = (1-2\ln x)/x^3 \leq 0$ αν και μόνο αν $2\ln x \geq 1 \Leftrightarrow \ln x^2 \geq \ln \mathrm{e} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{\mathrm{e}}$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα και θετική για κάθε $x \geq 2$. Από το κριτήριο γενικευμένου ολοκληρώματος για σειρές, η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\ln n/n^2\right)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{\infty}\left(\ln x/x^2\right)\mathrm{d}x$ συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}\int_2^R \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_2^R\left(\frac{-1}{x}\right)'\ln x\,\mathrm{d}x\\ &= -\left.\frac{\ln x}{x}\right|_{x=2}^{x=R} + \int_2^R \frac{1}{x}\left(\ln x\right)'\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\ln R}{R}+\frac{\ln 2}{2}+\int_2^R\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\ln R}{R}+\frac{\ln 2}{2}-\left.\frac{1}{x}\right|_{x=2}^{x=R} = -\frac{\ln R}{R}-\frac{1}{R}+\frac{1+\ln 2}{2}\,.\end{aligned}$$

Όμως

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\ln R}{R} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R} = 0\,,$$

οπότε

$$\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_2^R\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1+\ln 2}{2}\,.$$

Δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει και άρα η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ θα συγκλίνει. Επειδή ως γνωστόν

$$\sum_{n=2}^{\infty}f(n)-f(2) \leq \int_2^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=2}^{\infty}f(n)\,,$$

έχουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}-\frac{\ln 2}{4} \leq \int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2} \Longleftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}-\frac{\ln 2}{4} \leq \frac{1+\ln 2}{2} \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$$

και ισοδύναμα

$$\frac{1+\ln 2}{2} < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2} < \frac{\ln\sqrt{2}+1+\ln 2}{2}\,.$$

■

4. (α΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης καθώς επίσης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n+n}\, x^n \,.$$

(β΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+1/n)^{(-1)^n n^2}\, x^n \,.$$

Λύση.

(α΄) Αν $a_n = n^2/\left(3^n+n\right)$, τότε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{3^n+n}{3^{n+1}+n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{3^n+n}{3\left(3^n+n\right)-2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{3-(2n-1)\,/\,(3^n+n)} = \frac{1}{3}\,,
\end{aligned}$$

επειδή $\lim_{n\to\infty}(2n-1)\,/\,(3^n+n) = 0$. Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 3$. Αν $x = \pm 3$, τότε έχουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n+n}\,(\pm 3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{n^2 3^n}{3^n+n}\,.$$

Όμως

$$\lim_{n\to\infty} \left|(\pm 1)^n \frac{n^2 3^n}{3^n+n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n/3^n} = \infty$$

και κατά συνέπεια η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει για $x = \pm 3$. Άρα, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = (-3, 3)$.

(β΄) Αν $a_n = (1+1/n)^{(-1)^n n^2}$, τότε

$$a_n = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{2k}\right)^{4k^2} & \text{αν } n = 2k, \\ \left(1+\frac{1}{2k-1}\right)^{-(2k-1)^2} & \text{αν } n = 2k-1\,. \end{cases}$$

Επειδή ως γνωστόν $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, είναι

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k} = \mathrm{e}$$

και

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right)^{-(2k-1)} = \mathrm{e}^{-1}\,.$$

Κατά συνέπεια, $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = \max\left\{\mathrm{e},\, \mathrm{e}^{-1}\right\} = \mathrm{e}$. Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1/\mathrm{e} = \mathrm{e}^{-1}$.

■

5. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $y = \arctan x$ σε δυναμοσειρά, να αποδειχθεί ότι

$$I = \int_0^1 x^2 \arctan\left(x^4\right)\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\,(8n+7)}\,.$$

Αν $I \approx \sum_{n=0}^{2} (-1)^n \,/\, (2n+1)\,(8n+7)$, να αποδειχθεί ότι το σφάλμα της προσέγγισης είναι μικρότερο του $0,005$.

Λύση. Επειδή ως γνωστόν $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^{2n+1} / \,(2n+1)$, $|x| < 1$, είναι

$$x^2 \arctan\left(x^4\right) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x^4\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+6}}{2n+1}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Επομένως, για $|x| < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^2 \arctan\left(t^4\right)\, \mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{8n+6}}{2n+1}\, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^x t^{8n+6}\, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left.\frac{t^{8n+7}}{8n+7}\right|_{t=0}^{t=x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+7}}{(2n+1)\,(8n+7)}\,.
\end{aligned}$$

Επειδή η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \,/\, (2n+1)\,(8n+7)$ συγκλίνει, είναι

$$I = \int_0^1 t^2 \arctan\left(t^4\right)\, \mathrm{d}t = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+7}}{(2n+1)\,(8n+7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\,(8n+7)}\,.$$

Αν $I \approx S_2 = \sum_{n=0}^{2} (-1)^n \,/\, (2n+1)\,(8n+7)$, από το κριτήριο του Leibniz για εναλλάσσουσες σειρές είναι:

$$|I - S_2| \le a_3 = \frac{1}{7 \cdot 31} = \frac{1}{217} < \frac{1}{200} = 0,005\,.$$

■

6. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης καθώς επίσης και το άθροισμα της δυναμοσειράς
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)\,(2n+1)}\,.$$

Λύση. Αν $c_n = x^{2n+2}/\,(n+1)\,(2n+1)$, είναι
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,(2n+1)}{(n+2)\,(2n+3)}\,x^2 = x^2\,, \quad \text{οπότε } x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1\,.$$
Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=1$.

Θα υπολογίσουμε τώρα το άθροισμα της δυναμοσειράς. Αν
$$f\,(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)\,(2n+1)},\ |x|<1, \text{ είναι } f\,(0)=0\,.$$

<u>*1ος τρόπος*</u>. Ως γνωστόν, για $|x|<1$ είναι $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ και $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. Επομένως, $\ln(1+x)-\ln(1-x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Όμως
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)\frac{x^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,$$
δηλαδή $f'(x) = \ln(1+x)-\ln(1-x)$, για κάθε $|x|<1$. Άρα, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε
$$\begin{aligned}
f\,(x) &= \int_0^x \ln\,(1+t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x \ln\,(1-t)\ \mathrm{d}t\\
&= t\ln\,(1+t)|_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t - t\ln\,(1-t)|_{t=0}^{t=x} + \int_0^x t\frac{-1}{1-t}\,\mathrm{d}t\\
&= x\ln\,(1+x) - \int_0^x \frac{(1+t)-1}{1+t}\,\mathrm{d}t - x\ln\,(1-x) + \int_0^x \frac{(1-t)-1}{1-t}\,\mathrm{d}t\\
&= x\ln\,(1+x) - \int_0^x \mathrm{d}t + \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - x\ln\,(1-x) + \int_0^x \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t\\
&= x\ln\,(1+x) + \ln\,(1+x) - x\ln\,(1-x) + \ln\,(1-x) = x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\left(1-x^2\right)\,.
\end{aligned}$$

<u>*2ος τρόπος*</u>.

Για $|x|<1$ είναι $f'\,(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}/\,(2n+1)$ και $f''\,(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} = 2/\left(1-x^2\right)$. Επειδή $f'\,(0)=0$, είναι
$$f'\,(x) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t = \ln\,(1+x) - \ln\,(1-x)\,.$$
Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως και προηγουμένως. ■

1.11 Ακαδημαϊκό έτος 2003–4

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Έστω η ακολουθία (u_n), με

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

(i) $\sqrt{n} \leq u_n < 2\sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$.

(iii) $\lim_{n\to\infty}(u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

Απόδειξη. (i) Είναι $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\sqrt{1} = 1 = u_1 < 2\sqrt{1}$, οι ανισότητες ισχύουν για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν για $n = k$, δηλαδή $\sqrt{k} \leq u_k < 2\sqrt{k}$. Τότε,

$$\sqrt{k+1} < \sqrt{k+1+u_k} = u_{k+1} < \sqrt{k+1+2\sqrt{k}} = \sqrt{\left(\sqrt{k}+1\right)^2} = \sqrt{k}+1$$

και $\sqrt{k} + 1 < \sqrt{k+1} + \sqrt{k+1} = 2\sqrt{k+1}$. Επομένως

$$\sqrt{k+1} < u_{k+1} < 2\sqrt{k+1}\,,$$

δηλαδή οι ανισότητες ισχύουν για $n = k + 1$.

(ii) Επειδή $\sqrt{n} \leq u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} < \sqrt{n + 2\sqrt{n-1}}$, έχουμε

$$1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{\frac{n+2\sqrt{n-1}}{n}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{n-1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\,.$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$.

(iii) Είναι

$$u_n - \sqrt{n} = \frac{u_n^2 - n}{u_n + \sqrt{n}} = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{u_{n-1}/\sqrt{n-1}}{u_n/\sqrt{n}+1}\,.$$

Επειδή από τη (ii) έχουμε $\lim_{n\to\infty} u_n/\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} u_{n-1}/\sqrt{n-1} = 1$, θα είναι $\lim_{n\to\infty}(u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

□

2. Έστω οι ακολουθίες (A_n) και (B_n), με

$$A_n = \int_0^c x^n \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{και} \quad B_n = \int_c^1 x^n \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x\,,$$

όπου $c \in (0,1)$. Να αποδειχθεί ότι

$$0 < A_n \le \frac{\ln(1+c^2)}{n+1} \cdot c^{n+1}\ , \quad B_n \ge \frac{\ln(1+c^2)}{n+1}(1-c^{n+1})$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί το $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$.

Λύση. Επειδή $\ln(1+x^2) \le \ln(1+c^2)$, για κάθε $x \in [0,c]$ και $\ln(1+x^2) \ge \ln(1+c^2)$, για κάθε $x \in [c,1]$, έχουμε

$$0 < A_n \le \ln(1+c^2) \cdot \int_0^c x^n\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(1+c^2)}{n+1} \cdot c^{n+1}$$

και

$$B_n \ge \ln(1+c^2) \cdot \int_c^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(1+c^2)}{n+1}(1-c^{n+1})\,.$$

Επομένως, $0 < A_n/B_n \le c^{n+1}/(1-c^{n+1})$. Επειδή το $c \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} c^{n+1} = 0$ και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty} c^{n+1}/(1-c^{n+1}) = 0$. Άρα, $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = 0$. ∎

3. Έστω οι ακολουθίες $S_n = 1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n$ και $\sigma_n = (1+1/a_1)(1+1/a_2)\cdots(1+1/a_n)$, όπου (a_n) είναι ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν η (S_n) συγκλίνει, να αποδειχθεί ότι και η ακολουθία $(\ln\sigma_n)$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ανισότητα $\ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$, να αποδειχθεί ότι η $(\ln\sigma_n)$ είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη. Επειδή η (S_n) συγκλίνει, η (S_n) είναι ακολουθία Cauchy. Τότε, $\forall\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\forall n \ge n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι

$$|S_{n+k} - S_n| = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \cdots + \frac{1}{a_{n+k}} < \varepsilon\,.$$

Επομένως, $\forall n \ge n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι

$$\begin{aligned} |\ln\sigma_{n+k} - \ln\sigma_n| &= \ln\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{a_{n+2}}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{a_{n+k}}\right) \\ &< \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \cdots + \frac{1}{a_{n+k}} < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Άρα, η $(\ln \sigma_n)$ είναι ακολουθία Cauchy και επομένως συγκλίνει.

Σημείωση. Επειδή $\sigma_n = \mathrm{e}^{\ln \sigma_n}$ και η ακολουθία $(\ln \sigma_n)$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η ακολουθία (σ_n) . □

4. (α΄) Έστω η ακολουθία (a_n), τέτοια ώστε

$$a_{n+1} = 6\frac{1+a_n}{7+a_n}\,, \quad a_1 > 0\,.$$

Να αποδειχθεί ότι η (a_n) είναι συστολική και να υπολογιστεί το όριό της.

(β΄) Να βρεθεί το ανώτερο και κατώτερο όριο της ακολουθίας

$$b_n = \frac{\ln n - (1+\cos n\pi)\, n}{\ln 2n}\,.$$

Λύση.

(α΄) Είναι $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Η (a_n) είναι συστολική επειδή για κάθε $n \geq 2$ είναι

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= 6\left|\frac{1+a_n}{7+a_n} - \frac{1+a_{n-1}}{7+a_{n-1}}\right| \\ &= 6\frac{|(1+a_n)(7+a_{n-1}) - (1+a_{n-1})(7+a_n)|}{(7+a_n)(7+a_{n-1})} \\ &= 36\frac{|a_n - a_{n-1}|}{(7+a_n)(7+a_{n-1})} < \frac{36}{49}\,|a_n - a_{n-1}|\ , \end{aligned}$$

με $0 < 36/49 < 1$. Επομένως η (a_n) είναι συστολική ακολουθία και κατά συνέπεια συγκλίνει, έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda \geq 0$. Επειδή και $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lambda$, από τη σχέση $a_{n+1} = 6\,(1+a_n)\,/\,(7+a_n)$ προκύπτει ότι $\lambda = 6\,(1+\lambda)\,/\,(7+\lambda)$. Ισοδύναμα, $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = 2$. Επειδή $\lambda \geq 0$, είναι $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

(β΄) Είναι

$$b_{2k} = \frac{\ln 2k - (1+\cos 2k\pi)\, 2k}{\ln 4k} = \frac{\ln 2k - 4k}{\ln 4k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln 2k/2k - 2}{\ln 4k/4k}$$

και

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= \frac{\ln(2k+1) - (1+\cos(2k\pi+\pi))(2k+1)}{\ln 2\,(2k+1)} \\ &= \frac{\ln(2k+1)}{\ln 2 + \ln(2k+1)} = \frac{1}{\ln 2/\ln(2k+1) + 1}\,. \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} \ln n/n = 0$, θα είναι και $\lim_{k\to\infty} \ln 2k/2k = \lim_{k\to\infty} \ln 4k/4k = 0$. Επομένως, $\lim_{k\to\infty} b_{2k} = -\infty$ και $\lim_{k\to\infty} b_{2k+1} = 1$. Άρα,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{και} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1\,.$$

■

5. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές

(α') $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\ln\left(\mathrm{e}^n - 1\right)}$

(β') $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-\ln n}$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. (α') Να συγκριθεί η σειρά με τη $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$. (β') Να συγκριθεί η σειρά με τη $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Λύση.

(α') Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \infty$. Πράγματι, επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, θα είναι και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \infty$. Αν $a_n = \frac{\ln n}{\ln(\mathrm{e}^n - 1)}$ και $b_n = \frac{\ln n}{n}$, τότε για κάθε $n \geq 2$ είναι $a_n, b_n > 0$ και

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n/\ln(\mathrm{e}^n - 1)}{\ln n/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(\mathrm{e}^n - 1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(\mathrm{e}^x - 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x} = 1\,. \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}
\end{aligned}$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \infty$, θα είναι και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\ln(\mathrm{e}^n - 1)} = \infty$. Δηλαδή, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\ln(\mathrm{e}^n - 1)}$ αποκλίνει.

(β') Αν $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$ και $b_n = 1/n^2$, τότε για κάθε $n \geq 2$ είναι $a_n, b_n > 0$ και

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} n^2\,(\ln n)^{-\ln n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln n^2} \cdot \mathrm{e}^{-\ln n \cdot \ln(\ln n)} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln n^2 - \ln n \cdot \ln(\ln n)} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln n \cdot [2 - \ln(\ln n)]} = 0\,.
\end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot [2 - \ln(\ln n)] = -\infty$. Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1/n^2\right)$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-\ln n}$ θα συγκλίνει.

■

6. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right).$$

Υπόδειξη. Να αποδειχθεί ότι $a_n = \sin\left(\pi n^2/(n+1)\right) = (-1)^{n-1} \sin(\pi/(n+1))$.

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} a_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) &= \sin\left(\pi \frac{n^2 - 1 + 1}{n+1}\right) \\ &= \sin\left(\pi\left(n - 1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi(n-1) + \frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{(n-1)} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Επειδή η ακολουθία $b_n = \sin(\pi/(n+1))$, $n \in \mathbb{N}$, είναι θετική και φθίνουσα με $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, από το κριτήριο Leibniz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi n^2/(n+1)\right)$ συγκλίνει. ■

7. Αν $S_N = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ είναι το N-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right),$$

να αποδειχθεί ότι $\lim_{N\to\infty} S_{2N} = \lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = 0$. Δηλαδή ότι

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{n=2}^{2N} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2N-2}\right) \\ &\quad + \ln\left(1 - \frac{1}{2N-1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2N}\right) \\ &= \left[\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right] + \cdots + \left[\ln\left(\frac{2N-1}{2N-2}\right) + \ln\left(\frac{2N-2}{2N-1}\right)\right] + \ln\left(\frac{2N+1}{2N}\right) \\ &= \ln 1 + \cdots + \ln 1 + \ln\left(\frac{2N+1}{2N}\right) = \ln\left(\frac{2N+1}{2N}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} S_{2N+1} &= \sum_{n=2}^{2N+1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2N}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{2N+1}\right) \\ &= \left[\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]+\cdots+\left[\ln\left(\frac{2N+1}{2N}\right)+\ln\left(\frac{2N}{2N+1}\right)\right] \\ &= \ln 1+\cdots+\ln 1 = 0\,. \end{aligned}$$

Επομένως, $\lim_{N\to\infty} S_{2N} = \lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = 0$. Άρα, $\lim_{N\to\infty} S_N = 0$ και ισοδύναμα

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0\,.$$

■

8. Έστω η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

όπου η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(α′) Αν $N \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x + (-1)^N \int_0^1 x^{N+1}\frac{f(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x\,.$$

(β′) Αν $M = \max\limits_{0\le x\le 1} |f(x)|$, να αποδειχθεί ότι

$$\left|(-1)^N \int_0^1 x^{N+1}\frac{f(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{N+2}\,.$$

(γ′) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει και ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Εφαρμογή. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Απόδειξη. (α΄) Είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\left(1-x+x^2-\cdots+(-x)^N\right)f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\frac{f(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x+(-1)^N\int_0^1 x^{N+1}\frac{f(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

(β΄) Έχουμε

$$\begin{aligned}\left|(-1)^N\int_0^1 x^{N+1}\frac{f(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| &\le \int_0^1 x^{N+1}\frac{|f(x)|}{1+x}\,\mathrm{d}x\\ &\le M\int_0^1 x^{N+1}\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\\ &\le M\int_0^1 x^{N+1}\,\mathrm{d}x=\frac{M}{N+2}\,.\end{aligned}$$

(γ΄) Από τη (β΄) έπεται ότι $\lim_{N\to\infty}(-1)^N\int_0^1 x^{N+1}\frac{f(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x=0$. Επομένως, από την (α΄) έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Εφαρμογή. Αν $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$, από τη (γ΄) έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x|_{x=0}^{x=1}=\arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}\,.$$

□

2η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$y=f(x):=1+\int_0^{x/2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

είναι γνήσια μονότονη στο $\mathbb{R}$. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη της f, να υπολογιστεί το

$$\lim_{y\to 1}\frac{f^{-1}(y)}{y-1}\,.$$

Λύση. Είναι $f'(x) = (x/2)' \cdot \mathrm{e}^{-(x/2)^2} = (1/2) \cdot \mathrm{e}^{-x^2/4} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Επομένως η συνεχής συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και κατά συνέπεια $1-1$. Επειδή $f(0) = 1$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ και η f^{-1} είναι συνεχής, το $y \to 1$ συνεπάγεται ότι $x \to 0$. Άρα

$$\lim_{y\to 1} \frac{f^{-1}(y)}{y-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{f(x)-1} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{f'(x)} = \lim_{x\to 0} 2\mathrm{e}^{x^2/4} = 2\,.$$

■

2. Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} I = \int \frac{x^2}{\sqrt{(x-1)^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(t+1)^2}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \qquad (\text{αντικατάσταση } t = x-1 \Leftrightarrow x = t+1) \\ &= \int \frac{\left(t^2+1\right)+2t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\int \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t}_{I_2}\,. \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα I_1 υπολογίζεται με παραγοντική ολοκλήρωση (ή με την αντικατάσταση $t = \tan x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$):

$$\begin{aligned} I_1 = \int \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t &= t\sqrt{t^2+1} - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = t\sqrt{t^2+1} - \int \frac{\left(t^2+1\right)-1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= t\sqrt{t^2+1} - \int \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = t\sqrt{t^2+1} - I_1 + \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) \end{aligned}$$

και ισοδύναμα

$$I_1 = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + C\,.$$

Επειδή

$$I_2 = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{t^2+1} + C$$

και $t = x-1$, τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + 2\sqrt{t^2+1} + C \\ &= \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right) + 2\sqrt{x^2-2x+2} + C\,. \end{aligned}$$

■

3. Να λυθεί η εξίσωση

$$\int_0^x \frac{t^3}{(4t^2+9)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\,, \quad x > 0\,.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^3}{(4t^2+9)^{3/2}}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{(27/8)\tan^3\theta}{9^{3/2}\,(\tan^2\theta+1)^{3/2}} \cdot \frac{3/2}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&\qquad \text{(αντικατάσταση } t = \tfrac{3}{2}\tan\theta,\ \theta \in (-\pi/2,\,\pi/2)) \\
&= \frac{3}{16}\int \frac{\tan^3\theta\,(\cos^2\theta)^{3/2}}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{16}\int \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{16}\int \frac{(1-\cos^2\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{16}\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta - \frac{3}{16}\int \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{16}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta\right) + C \\
&= \frac{3}{16}\left(\sqrt{1+\tan^2\theta} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right) + C \\
&= \frac{3}{16}\left(\sqrt{1+(2t/3)^2} + \frac{1}{\sqrt{1+(2t/3)^2}}\right) + C \\
&= \frac{3}{16}\left(\frac{\sqrt{4t^2+9}}{3} + \frac{3}{\sqrt{4t^2+9}}\right) + C\,.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t^3}{(4t^2+9)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{16}\left(\frac{\sqrt{4t^2+9}}{3} + \frac{3}{\sqrt{4t^2+9}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{3}{16}\left(\frac{\sqrt{4x^2+9}}{3} + \frac{3}{\sqrt{4x^2+9}}\right) - \frac{3}{8} = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{4x^2+9} + \frac{9}{\sqrt{4x^2+9}} = 10 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{4x^2+9}\right)^2 - 10\sqrt{4x^2+9} + 9 = 0\,.
\end{aligned}$$

Άρα, $\sqrt{4x^2+9} = 1$ ή $\sqrt{4x^2+9} = 9$. Όμως η εξίσωση $\sqrt{4x^2+9} = 1$ δεν έχει λύση, ενώ $\sqrt{4x^2+9} = 9 \Leftrightarrow 4x^2 = 72 \Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$. Επειδή $x > 0$, η λύση της εξίσωσης είναι $x = 3\sqrt{2}$. ■

4. Να βρεθεί η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, αν

$$f'(x) = \frac{1}{3 - \cos x}\,, \quad f(0) = 0.$$

Λύση. Είναι

$$f\,(x) = \int_0^x f'\,(t)\;\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{3 - \cos t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση του Weierstrass $u = \tan{(t/2)} \Leftrightarrow t = 2\arctan u$, για $t \in (-\pi, \pi)$, είναι

$$\mathrm{d}t = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u \quad \text{και} \quad \cos t = \frac{1-\tan^2{(t/2)}}{1+\tan^2{(t/2)}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f\,(x) = \int_0^x \frac{1}{3-\cos t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\tan(x/2)} \frac{1}{3 - (1-u^2)\,/\,(1+u^2)} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\tan(x/2)} \frac{1}{2u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\tan(x/2)} \frac{1}{u^2 + \left(1/\sqrt{2}\right)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}u\right)\Big|_{u=0}^{u=\tan(x/2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan{(x/2)}\right)\,. \end{aligned}$$

■

5. (α΄) Να αποδειχθεί ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι

$$2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \arctan x = \pi/2\,.$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \int_0^x \left(1 - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\arctan t\,\mathrm{d}t - 2\int_0^{\sqrt{1+x^2}-x} \arctan t\,\mathrm{d}t\,,$$

$x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή και ίση με $\ln 2$.

Απόδειξη. (α΄) Αν $\phi\,(x) := 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} \phi'\,(x) &= 2\frac{\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)'}{1 + \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{x/\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)} + \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Επομένως $\phi(x) = c$. Όμως $\phi(0) = 2\arctan 1 + \arctan 0 = 2\cdot(\pi/4) + 0 = \pi/2$. Άρα, $\phi(x) = \pi/2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(β΄) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)' + \left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\arctan x \\
&\quad - 2\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)'\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right) + \left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\arctan x \\
&\quad - 2\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right) + \left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left[\arctan x + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right) + \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&\qquad\qquad \left(\arctan x + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \tfrac{\pi}{2}\right) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση είναι σταθερή. Επειδή

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 \arctan t \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2} - 2\, t\arctan t\Big|_{t=0}^{t=1} + 2\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2} - 2\arctan 1 + \ln\left(1+t^2\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{4} + \ln 2 - \ln 1 = \ln 2\,,
\end{aligned}$$

είναι $f(x) = \ln 2$.

□

6. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y' + (\tan x)\, y = x\sin 2x\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,. \tag{1.30}$$

Λύση. Η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης: $y' + (\tan x)\, y = 0$ είναι

$$y = c\cdot \mathrm{e}^{-\int \tan x\,\mathrm{d}x} = c\cdot \mathrm{e}^{-\int (\sin x/\cos x)\,\mathrm{d}x} = c\cdot \mathrm{e}^{\ln(\cos x)} = c\cdot\cos x\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.$$

Αναζητούμε μία λύση της (1.30) της μορφής $y_\varepsilon(x) = c(x)\cos x$. Η y_ε ικανοποιεί την (1.30), δηλαδή $y'_\varepsilon + (\tan x)\, y_\varepsilon = x\sin 2x$, οπότε

$$\begin{aligned}
&[c(x)\cos x]' + (\tan x)\, c(x)\cos x = x\sin 2x \\
&\quad \Leftrightarrow c'(x)\cos x - c(x)\sin x + c(x)\sin x = x\sin 2x \\
&\quad \Leftrightarrow c'(x)\cos x = 2x\sin x\cos x \Leftrightarrow c'(x) = 2x\sin x\,.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$c(x) = 2\int x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int x\,\mathrm{d}(-\cos x) = -2x\cos x + 2\int \cos x\,\mathrm{d}x = -2x\cos x + 2\sin x\,.$$

Επομένως, $y_\varepsilon(x) = (-2x\cos x + 2\sin x)\cos x = -2x\cos^2 x + \sin 2x$. Άρα, η γενική λύση της (1.30) είναι

$$y = c\cos x - 2x\cos^2 x + \sin 2x\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

■

7. Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\left(1 - x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0\,, \quad |x| < 1\,, \tag{1.31}$$

με την αντικατάσταση $x = \sin t$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της.

Λύση. Για $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ είναι $x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x$, οπότε

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\cos t}$$

και

$$\begin{aligned}
y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\cos t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\cos t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{\cos t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{\cos t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)\frac{1}{\cos t}\,.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.31) έχουμε

$$\cos^2 t\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{\cos t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)\frac{1}{\cos t} - \sin t\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\cos t} + y = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0\,. \tag{1.32}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (1.32) είναι: $r^2 + 1 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \pm\mathrm{i}$. Επομένως, η γενική λύση της (1.32) είναι

$$y^*(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της (1.31) είναι

$$\begin{aligned} y(x) = c_1 \cos(\arcsin x) + c_2 \sin(\arcsin x) &= c_1 \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} + c_2 \sin(\arcsin x) \\ &= c_1 \sqrt{1 - x^2} + c_2 x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

■

8. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y'' + 4y = 1 + x + \sin x\,. \tag{1.33}$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y'' + 4y = 0$ είναι: $r^2 + 4 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$. Επομένως, η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Θεωρούμε τώρα τις διαφορικές εξισώσεις

$$y'' + 4y = 1 + x \tag{1.34}$$

και

$$y'' + 4y = \sin x\,. \tag{1.35}$$

Επειδή η $f_1(x) = 1 + x = (1 + x)\,\mathrm{e}^{0\cdot x} \cos(0 \cdot x) + \mathrm{e}^{0\cdot x} \sin(0 \cdot x)$ και το 0 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 + 4 = 0$, αναζητούμε μία λύση της (1.34) της μορφής $y_1 = a + bx$. Αντικαθιστώντας στην (1.34) έχουμε $4a + 4bx = 1 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $4a = 4b = 1 \Leftrightarrow a = b = 1/4$. Δηλαδή, μία λύση της (1.34) είναι η $y_1 = 1/4 + (1/4)\,x$. Επειδή η $f_2(x) = \sin x = 0 \cdot \mathrm{e}^{0\cdot x} \cos x + \mathrm{e}^{0\cdot x} \sin x$ και το $0 + \mathrm{i} = \mathrm{i}$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 + 4 = 0$, αναζητούμε μία λύση της (1.35) της μορφής $y_1 = a \cos x + b \sin x$.

Αντικαθιστώντας στην (1.35) έχουμε $3a\cos x + 3b\sin x = \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $a = 0$ και $b = 1/3$. Δηλαδή, μία λύση της (1.35) είναι η $y_2 = (1/3)\sin x$.

Επομένως, $y_1 + y_2 = 1/4 + (1/4)\,x + (1/3)\sin x$ είναι μία λύση της (1.33). Άρα, η γενική λύση της (1.33) είναι

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + 1/4 + (1/4)\,x + (1/3)\sin x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

9. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^x + 4\,, \qquad y(0) = y'(0) = 1\,. \tag{1.36}$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y'' - 2y' + y = 0$ είναι: $r^2 - 2r + 1 = 0$ με ρίζες $r_1 = r_2 = 1$. Επομένως, η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y\,(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Θεωρούμε τώρα τις διαφορικές εξισώσεις

$$y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^x \tag{1.37}$$

και

$$y'' - 2y' + y = 4\,. \tag{1.38}$$

Επειδή η $f_1\,(x) = x\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x\cos(0\cdot x) + \mathrm{e}^x\sin(0\cdot x)$ και το 1 είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 - 2r + 1 = 0$, αναζητούμε μία λύση της (1.37) της μορφής

$$y_1 = x^2(a + bx)\mathrm{e}^x = (ax^2 + bx^3)\mathrm{e}^x\,.$$

Αντικαθιστώντας στην (1.37) έχουμε $2a + 6bx = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $a = 0$ και $b = 1/6$. Δηλαδή, μία λύση της (1.37) είναι η $y_1 = (1/6)\,x^3\mathrm{e}^x$.

Επειδή η $f_2(x) = 4 = 4\cdot\mathrm{e}^{0\cdot x}\cos(0\cdot x) + \mathrm{e}^{0\cdot x}\sin(0\cdot x)$ και το 0 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 - 2r + 1 = 0$, αναζητούμε μία λύση της (1.38) της μορφής $y_2 = a$. Αντικαθιστώντας στην (1.38) έχουμε $a = 4$. Δηλαδή, μία λύση της (1.38) είναι η $y_2 = 4$.

Επομένως, $y_1 + y_2 = (1/6)\, x^3 \mathrm{e}^x + 4$ είναι μία λύση της (1.36). Άρα, η γενική λύση της (1.36) είναι

$$y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 x \mathrm{e}^x + (1/6)\, x^3 \mathrm{e}^x + 4\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Παραγωγίζοντας τη γενική λύση της (1.36) έχουμε

$$y' = (c_1 + c_2)\, \mathrm{e}^x + c_2 x \mathrm{e}^x + (1/2)\, x^2 \mathrm{e}^x + (1/6)\, x^3 \mathrm{e}^x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Όμως $y\,(0) = 1$ συνεπάγεται ότι $c_1 + 4 = 1 \Leftrightarrow c_1 = -3$, ενώ $y'\,(0) = 1$ συνεπάγεται ότι $c_1 + c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1 - c_1 = 4$. Άρα, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = -3\mathrm{e}^x + 4x\mathrm{e}^x + (1/6)\, x^3 \mathrm{e}^x + 4\,.$$

■

1.12 Ακαδημαϊκό έτος 2002–3

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Να αποδειχθεί ότι η (x_n), με $x_n = 1/4+2^2/4^2+3^2/4^3+\cdots+n^2/4^n$, είναι ακολουθία Cauchy.

   Υπόδειξη. Είναι $4^n \geq n^4$, για κάθε $n \geq 4$.

   Απόδειξη. *1ος τρόπος*. Είναι $n^4 \leq 4^n$, $\forall n \geq 4$. Για $p \in \mathbb{N}$ και $n \geq 3$ έχουμε

$$\begin{aligned}
x_{n+p} - x_n &= \frac{(n+1)^2}{4^{n+1}} + \frac{(n+2)^2}{4^{n+2}} + \cdots + \frac{(n+p)^2}{4^{n+p}} \\
&\leq \frac{(n+1)^2}{(n+1)^4} + \frac{(n+2)^2}{(n+2)^4} + \cdots + \frac{(n+p)^2}{(n+p)^4} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \left\{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$

   Δηλαδή

$$|x_{n+p} - x_n| = x_{n+p} - x_n < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

   Επομένως η ακολουθία (x_n) είναι Cauchy και άρα συγκλίνει.

   2ος τρόπος. Το x_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k}$. Αν $c_k = \frac{k^2}{4^k}$, τότε

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+1)^2}{4^{k+1}} \cdot \frac{4^k}{k^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(k+1)^2}{k^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{4} < 1\,.$$

   Από το κριτήριο του λόγου η σειρά συγκλίνει. Ισοδύναμα, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει. Άρα η (x_n) είναι Cauchy. □

2. Έστω η ακολουθία (a_n), με $a_1 \in \mathbb{R}$ και $a_{n+1} = \frac{1}{3}\arctan a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί ότι η (a_n) είναι συστολική και να βρεθεί το όριό της.

   Λύση. Αν $\alpha < \beta$, από το θεώρημα μέσης τιμής είναι

$$\arctan\beta - \arctan\alpha = \frac{1}{1+\xi^2}\,(\beta - \alpha)\;, \quad \text{για κάποιο}\,\xi \in (\alpha,\beta)\;.$$

Επομένως

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{3}\,|\arctan a_n - \arctan a_{n-1}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\xi_n^2}\,|a_n - a_{n-1}| \le \frac{1}{3}\,|a_n - a_{n-1}|\ ,$$

για κάποιο ξ_n μεταξύ a_{n-1} και a_n. Άρα,

$$|a_{n+1} - a_n| \le \frac{1}{3}\,|a_n - a_{n-1}|\ , \quad \text{για}\, n = 2, 3, \ldots\,.$$

Δηλαδή η ακολουθία (a_n) είναι συστολική και κατά συνέπεια συγκλίνει, έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda$. Επειδή η $y = \arctan x$ είναι συνεχής συνάρτηση, είναι

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \arctan a_n = \frac{1}{3}\arctan\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \quad \text{και επομένως } \lambda = \frac{1}{3}\arctan\lambda \Leftrightarrow \lambda = 0\,.$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ■

3. Να βρεθεί το ανώτερο και κατώτερο όριο των ακολουθιών:

(α΄) $x_n = 2(-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(2 + \frac{3}{n})$

(β΄) $y_n = \frac{2n-1}{n+1}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.

Λύση.

(α΄) Είναι

$$x_{4k} = -2 + \left(2 + \frac{3}{4k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,, \qquad x_{4k+1} = 2 - \left(2 + \frac{3}{4k+1}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,,$$

$$x_{4k+2} = -2 - \left(2 + \frac{3}{4k+2}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} -4\,, \qquad x_{4k+3} = 2 + \left(2 + \frac{3}{4k+3}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 4\,.$$

Επομένως $\overline{\lim}\, x_n = 4$ και $\underline{\lim}\, x_n = -4$.

(β΄) Είναι $y_{3k} = \dfrac{6k-1}{3k+1}\cos(2k\pi) \xrightarrow[k\to\infty]{} 2$,

$$y_{3k+1} = \frac{6k+1}{3k+2}\cos\left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6k+1}{3k+2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} -1$$

και

$$y_{3k+2} = \frac{6k+3}{3k+3}\cos\left(2k\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{6k+3}{3k+3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} -1\,.$$

Επομένως $\overline{\lim}\, y_n = 2$ και $\underline{\lim}\, y_n = -1$.

■

4. (α΄) Αν $S_n(x)$ είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[k^2x^k(1-x)-(k-1)^2x^{k-1}(1-x)\right], \quad x\in[0,1],$$

να αποδειχθεί ότι $S_n(x)=n^2x^n(1-x)$ και να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς.

(β΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\left[k^2x^k(1-x)-(k-1)^2x^{k-1}(1-x)\right]dx$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k^2}{(k+1)(k+2)}-\frac{(k-1)^2}{k(k+1)}\right]=1.$$

Λύση.

(α΄)

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\sum_{k=1}^{n}\left[k^2x^k(1-x)-(k-1)^2x^{k-1}\right]=(1-x)\sum_{k=1}^{n}\left[k^2x^k-(k-1)^2x^{k-1}\right]\\&=(1-x)\left[x+\left(2^2x^2-x\right)+\left(3^2x^3-2^2x^2\right)+\cdots+\left(n^2x^n-(n-1)^2x^{n-1}\right)\right]\\&=(1-x)\,n^2x^n.\end{aligned}$$

Είναι $S_n(0)=S_n(1)=0$. Αν $0<x<1$, τότε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n(x)&=(1-x)\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(1/x)^n}\overset{(p=1/x)}{=}(1-x)\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{p^n}=(1-x)\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{p^t}\overset{\text{(L'Hôpital)}}{=}\\&=(1-x)\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{p^t\ln p}\overset{\text{(L'Hôpital)}}{=}(1-x)\lim_{t\to\infty}\frac{2}{p^t(\ln p)^2}=0.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[k^2x^k(1-x)-(k-1)^2x^{k-1}(1-x)\right]=0, \quad x\in[0,1],$$

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left[k^2x^k(1-x)-(k-1)^2x^{k-1}(1-x)\right]dx\\&=k^2\int_0^1\left(x^k-x^{k+1}\right)dx-(k-1)^2\int_0^1\left(x^{k-1}-x^k\right)dx\\&=k^2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-(k-1)^2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{k^2}{(k+1)(k+2)}-\frac{(k-1)^2}{k(k+1)}\end{aligned}$$

και επομένως

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \left[k^2x^k\,(1-x)-(k-1)^2\,x^{k-1}\,(1-x)\right]\,dx=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^2}{(k+1)\,(k+2)}-\frac{(k-1)^2}{k\,(k+1)}\right]$$
$$=\left[\frac{1^2}{2\cdot 3}+\left(\frac{2^2}{3\cdot 4}-\frac{1^2}{2\cdot 3}+\right)+\left(\frac{3^2}{4\cdot 5}-\frac{2^2}{3\cdot 4}\right)+\cdots+\left(\frac{n^2}{(n+1)\,(n+2)}-\frac{(n-1)^2}{n\,(n+1)}\right)\right]$$
$$=\frac{n^2}{(n+1)\,(n+2)}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\,.$$

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \left[k^2x^k(1-x)-(k-1)^2x^{k-1}(1-x)\right]\,dx=1\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \left[k^2x^k(1-x)-(k-1)^2x^{k-1}(1-x)\right]\,dx$$
$$\neq\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\left[k^2x^k(1-x)-(k-1)^2x^{k-1}(1-x)\right]\,dx\,.$$

■

5. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin{(a/n)}$, όπου $a\in\mathbb{R}$. Συγκλίνει η σειρά απόλυτα;

Λύση. Για $a=0$ είναι $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin 0=0$, δηλαδή η σειρά συγκλίνει. Έστω $a\neq 0$. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n\geq n_0$ είναι $0<|a|/n\leq\pi/2$. Επομένως, η ακολουθία $a_n:=\sin{(|a|/n)}$ είναι θετική και φθίνουσα για κάθε $n\geq n_0$, με $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Επειδή

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n\sin(a/n)=\begin{cases}\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n\sin(|a|/n) & \text{αν } a>0\\ \sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin(|a|/n) & \text{αν } a<0\,,\end{cases}$$

από το κριτήριο του Leibniz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(a/n)$ συγκλίνει. Άρα,

$$\text{η σειρά }\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(a/n)\text{ συγκλίνει για κάθε }a\in\mathbb{R}\,.$$

Για $a\neq 0$ θεωρούμε τώρα τη σειρά

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}|(-1)^n\sin(a/n)|=\sum_{n=n_0}^{\infty}|\sin(a/n)|=\sum_{n=n_0}^{\infty}\sin(|a|/n)\,.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(|a|/n)}{1/n} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(|a|x)}{x} \stackrel{\text{(L'Hôpital)}}{=} |a|$$

και $\sum_{n=n_0}^{\infty} 1/n = \infty$, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης για σειρές θετικών όρων θα είναι και

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \sin(|a|/n) = \infty\,.$$

Επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(a/n)$ δεν συγκλίνει απόλυτα για $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. ∎

6. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όπου

$$a_n = \begin{cases} 1/3^n & n \text{ είναι άρτιος }, \\ 1/2^n & n \text{ είναι περιττός }. \end{cases}$$

Λύση. Είναι $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = 1/2$ και $\underline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = 1/3$. Επειδή $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1$, από το κριτήριο της ρίζας η σειρά συγκλίνει.

Παρατήρηση. Επειδή

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2k} & \text{αν } n = 2k \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} & \text{αν } n = 2k+1\,, \end{cases}$$

είναι

$$\overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2k} = \infty \quad \text{και} \quad \underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} = 0\,.$$

Δηλαδή

$$\underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 < \infty = \overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

και επομένως το κριτήριο του λόγου δεν δίνει απάντηση για τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς. ∎

7. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές :

(α') $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)$

(β') $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1/n - \ln(1+1/n)\right).$

Υπόδειξη. Να συγκριθεί η σειρά με τη $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^2\right)$.

Λύση.

(α΄) Επειδή

$$1 = \left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^3 - n^3 = \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)\left(\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2 + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2\right),$$

αν

$$\alpha_n := \sqrt[3]{n^3+1} - n = \frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2} \quad \text{και} \quad \beta_n := \frac{1}{n^2},$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+1/n^3)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^3} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^2\right)$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης για σειρές θετικών όρων θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)$.

(β΄) Έστω $a_n := 1/n - \ln(1+1/n)$ και $b_n = 1/n^2$. Επειδή $\ln(1+x) < x$ για κάθε $x > 0$, η (a_n) είναι ακολουθία θετικών όρων. Επίσης,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n - \ln(1+1/n)}{1/n^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - 1/(1+x)}{2x} \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^2\right)$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης για σειρές θετικών όρων θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n - \ln(1+1/n)\right)$.

■

8. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - n\sin(1/n))^a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Να συγκριθεί η σειρά με τη $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^{2a})$.

Λύση. Επειδή $\sin x \le x$, $0 \le x \le \pi/2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $\sin(1/n) < 1/n$. Επομένως $\alpha_n := (1 - n\sin(1/n))^a > 0$ και $\beta_n := 1/n^{2a} > 0$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1 - n\sin(1/n)}{1/n^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{x^2} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{2x^3} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6},$$

είναι $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{1}{6^a}$. Επομένως, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης για σειρές θετικών όρων, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n\sin(1/n))^a$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1/n^{2a}\right)$ συγκλίνει. Όμως είναι γνωστό ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^{2a})$ συγκλίνει αν και μόνο αν $2a > 1$, δηλαδή $a > 1/2$. Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n\sin(1/n))^a$ συγκλίνει για $a > 1/2$ και αποκλίνει για $a \le 1/2$. ■

9. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^a , \quad a > 1 .$$

Λύση. Αν $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, τότε $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \le 0$, για κάθε $x \ge e$. Επομένως, για κάθε $n \ge 3$ η ακολουθία $\alpha_n := (\ln n/n)^a$ είναι θετική και φθίνουσα. Από το κριτήριο συμπύκνωσης αρκεί να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{\ln 2^n}{2^n}\right)^a = (\ln 2)^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{2^{n(a-1)}} . \tag{$*$}$$
Αν $a_n := n^a/2^{n(a-1)}$, είναι
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^a}}{2^{a-1}} = \frac{1}{2^{a-1}} < 1 .$$
Επομένως, από το κριτήριο της ρίζας η σειρά ($*$) συγκλίνει. Άρα και η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^a$, $a > 1$, θα συγκλίνει. ■

2η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = 1 - x + \sin x$ είναι γνήσια μονότονη στο $\mathbb{R}$. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη της f, να υπολογιστεί το
$$\lim_{y\to 1} \frac{f^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y-1}} .$$

Λύση. Είναι $f'(x) = -1 + \cos x \le 0$, δηλαδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \ne 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Η f λοιπόν είναι γνήσια φθίνουσα και συνεχής και επομένως η f^{-1} θα είναι γνήσια φθίνουσα και συνεχής. Επειδή $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ και $f^{-1}(1) = 0$, είναι
$$\lim_{y\to 1} \left(\frac{f^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y-1}}\right)^3 = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{-x+\sin x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{-1+\cos x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} -6 \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} -6 .$$

Άρα,

$$\lim_{y\to 1}\frac{f^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y-1}} = \sqrt[3]{-6} = -\sqrt[3]{6}\,.$$

■

2. Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα :

$$I = \int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\,dx\,,\quad x>1.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\,dx = x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \int x\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]'\,dx \\ &= x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \int x\frac{1+x/\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx \\ &= x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \sqrt{x^2-1} + C\,, \end{aligned}$$

όπου $C\in\mathbb{R}$. ■

3. Να βρεθεί η συνάρτηση $y=f(x)$, $|x|<1$, αν

$$f'(x) = \frac{\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}\,,\quad f(0)=0.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t)\,dt \\ &= \int_0^x \frac{\arcsin t}{\left(1-t^2\right)^{3/2}}\,dt \\ &= \int_0^{\arcsin x} \frac{\arcsin(\sin\theta)}{\cos^3\theta}\cos\theta\,d\theta \qquad \text{(αντικατάσταση } t=\sin\theta,\ -\pi/2<\theta<\pi/2\text{)} \\ &= \int_0^{\arcsin x}\frac{\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\arcsin x}\theta\,(\tan\theta)'\,d\theta \\ &= \theta\tan\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\arcsin x} - \int_0^{\arcsin x}\tan\theta\,d\theta \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= \left.\frac{\theta\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\right|_{\theta=0}^{\theta=\arcsin x} + \ln\cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\arcsin x} \\ &= \left.\frac{\theta\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\right|_{\theta=0}^{\theta=\arcsin x} + \ln\sqrt{1-\sin^2\theta}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\arcsin x} \\ &= \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2} = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)\,. \end{aligned}$$

■

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $0 < f'(x) \le 1$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \ge 0$ είναι
$$\int_0^x f(t)^3\, dt \le \left(\int_0^x f(t)\, dt\right)^2 . \tag{$*$}$$

Απόδειξη. Επειδή $f'(x) > 0$, η f είναι γνήσια αύξουσα και επομένως $f(x) > f(0) = 0$, για κάθε $x > 0$. Αν θέσουμε
$$F(x) := \int_0^x f(t)^3\, dt - \left(\int_0^x f(t)\, dt\right)^2 ,$$
είναι
$$F'(x) := f(x)^3 - 2f(x)\int_0^x f(t)\, dt = f(x)\left(f(x)^2 - 2\int_0^x f(t)\, dt\right) .$$
Αν αποδείξουμε ότι $F'(x) \le 0$, για κάθε $x \ge 0$, τότε θα είναι $F(x) \le F(0) = 0$, για κάθε $x \ge 0$ και αυτό αποδεικνύει την $(*)$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι
$$f(x)^2 - 2\int_0^x f(t)\, dt \le 0\,, \quad \text{για κάθε}\, x \ge 0\,.$$
Θέτουμε τώρα $G(x) := f(x)^2 - 2\int_0^x f(t)\, dt$. Επειδή
$$G'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) = 2f(x)(f'(x) - 1) \le 0\,,$$
είναι
$$G(x) \le G(0) = 0 \text{ για κάθε } x \ge 0 \Leftrightarrow f(x)^2 - 2\int_0^x f(t)\, dt \le 0 \text{ για κάθε } x \ge 0\,.$$

□

5. Μία καμπύλη γ του επιπέδου με εξίσωση $y = f(x)$, όπου η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αν η κλίση της εφαπτομένης σε κάθε σημείο (x, y) της καμπύλης ισούται με το άθροισμα των συντεταγμένων του σημείου, να βρεθεί η καμπύλη γ.

Λύση. Η καμπύλη γ του επιπέδου με εξίσωση $y = f(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης
$$y' = x + y\,, \quad y(0) = 0\,.$$

Η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης: $y' = y$ είναι

$$y = c\mathrm{e}^x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Αναζητούμε τώρα μία μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης της μορφής $y_\varepsilon(x) = c(x)\,\mathrm{e}^x$. Η y_ε πρέπει να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $y' = x + y$, οπότε

$$[c(x)\,\mathrm{e}^x]' = x + c(x)\,\mathrm{e}^x \Leftrightarrow c'(x)\,\mathrm{e}^x + c(x)\,\mathrm{e}^x = x + c(x)\,\mathrm{e}^x \Leftrightarrow c'(x)\,\mathrm{e}^x = x \Leftrightarrow c'(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

Επομένως,

$$c(x) = \int x\mathrm{e}^{-x}\,dx = \int x\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)'\,dx = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\,dx = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}.$$

Κατά συνέπεια $y_\varepsilon(x) = (-x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^x = -x - 1$. Η γενική λύση της $y' = x + y$ είναι $y = c\mathrm{e}^x - x - 1$. Επειδή $y(0) = 0$, είναι $c = 1$ και τελικά έχουμε

$$y = f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

■

6. Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση:

$$xy'' + 2y' - xy = 0, \qquad x > 0$$

με την αντικατάσταση $u = xy$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της.

Λύση. Επειδή

$$u' = xy' + y \quad \text{και} \quad u'' = xy'' + y' + y' = xy'' + 2y',$$

η διαφορική εξίσωση $xy'' + 2y' - xy = 0$ μετασχηματίζεται στην

$$u'' - u = 0. \tag{1.39}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (1.39) είναι: $r^2 - 1 = 0$ με ρίζες $r_1 = -1$ και $r_2 = 1$. Επομένως, η γενική λύση της (1.39) είναι

$$u(x) = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $xy'' + 2y' - xy = 0$, $x > 0$, είναι

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^x\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

7. Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση :

$$3x^2y'' + 11xy' - 3y = 0\,, \qquad x > 0$$

με την αντικατάσταση $x = e^t$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της.

Λύση. Για $x > 0$ είναι $x = \mathrm{e}^t \Leftrightarrow t = \ln x$. Έχουμε

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

και

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\ &= \left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} \\ &= \left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση προκύπτει ότι

$$3\mathrm{e}^{2t}\cdot\left(\mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + 11\mathrm{e}^t\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) - 4y = 0$$

και ισοδύναμα

$$3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 8\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 3y = 0\,. \tag{1.40}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (1.40) είναι: $3r^2 + 8r - 3 = 0$ με ρίζες $r_1 = -3$ και $r_2 = \frac{1}{3}$. Επομένως, η γενική λύση της (1.40) είναι

$$y^*(t) = c_1\mathrm{e}^{-3t} + c_2\mathrm{e}^{t/3}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $3x^2y'' + 11xy' - 3y = 0$, $x > 0$, είναι

$$y(x) = c_1x^{-3} + c_2x^{1/3}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

8. Η διαφορική εξίσωση της κίνησης ενός συστήματος (μάζα–ελατήριο) είναι

$$y'' + 4y = \cos 2t\,. \tag{1.41}$$

Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης.

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y'' + 4y = 0$ είναι: $r^2 + 4 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$. Επομένως, η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Επειδή η $f(t) = \cos 2t = \mathrm{e}^{0\cdot t}\cos 2t + \mathrm{e}^{0\cdot t}\sin 2t$ και η $0 + 2\mathrm{i}$ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής $r^2 + 4 = 0$, αναζητούμε μερική λύση της (1.41) της μορφής $y_\mu = t(a\cos 2t + b\sin 2t)$. Αντικαθιστώντας την y_μ στην (1.41), μετά από πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$-4a\sin 2t + 4b\cos 2t = \cos 2t\,, \quad \text{για κάθε}\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Επομένως, $\{4a = 0, 4b = 1\} \Leftrightarrow \{a = 0, b = 1/4\}$. Δηλαδή, $y_\mu = \frac{1}{4}t\sin 2t$. Άρα, η γενική λύση της (1.41) είναι

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{4}t\sin 2t\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

3η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall x \in \mathbb{R}$, εφαρμόζοντας τον τύπο του Maclaurin να αποδειχθεί ότι $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   Παρατήρηση. Υπάρχουν συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμες με $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και οι οποίες δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Πράγματι, αν

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\,, \end{cases}$$

   τότε $f(x) \neq 0$, $\forall x \neq 0$ και επαγωγικά αποδεικνύεται ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο 0, με $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από τον τύπο του Maclaurin είναι

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\,,$$

για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x. Όμως, $f^{(k)}(0) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, οπότε

$$|f(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, από την προηγούμενη ανισότητα προκύπτει ότι $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
<u>*Σημείωση*</u>. Αν $x = 0$, τότε προφανώς $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Για να αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ ή ισοδύναμα $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$, αρκεί να θεωρήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ η οποία συγκλίνει. Πράγματι, αν $a_n := \frac{|x|^n}{n!}$, επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)} = 0 < 1\,,$$

από το κριτήριο του λόγου η σειρά συγκλίνει. Άρα, ο γενικός όρος της σειράς τείνει στο μηδέν. Δηλαδή, $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$. □

2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, με $f(0) = f(1) = 0$ και ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $|f''(x)| \leq M$, για κάθε $x \in (0, 1)$. Να αποδειχθεί ότι $|f'(x)| \leq M/2$, για κάθε $x \in [0, 1]$.
<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $x \in [0, 1]$, από τον τύπο του Taylor είναι

$$f(t) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(t-x) + \frac{f''(\xi)}{2!}(t-x)^2\,,$$

για κάποιο ξ μεταξύ x και t.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Taylor για $t = 0$ και $t = 1$, έχουμε αντίστοιχα

$$0 = f(0) = f(x) - f'(x)x + \frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2\,, \tag{1.42}$$

για κάποιο ξ_1, με $0 < \xi_1 < x \leq 1$ και

$$0 = f(1) = f(x) - f'(x)\,(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\,(1-x)^2\,, \tag{1.43}$$

για κάποιο ξ_2, με $0 \leq x < \xi_2 < 1$. Οι (1.42) και (1.43) προφανώς ισχύουν για $x = 0$ και $x = 1$ αντίστοιχα. Αφαιρώντας την (1.43) από την (1.42) έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)\,(1-x)^2\right]\,, \quad \forall x \in [0, 1]\,. \tag{1.44}$$

Επειδή από την υπόθεση είναι $|f''(\xi_1)| \leq M$ και $|f''(\xi_2)| \leq M$, η (1.44) συνεπάγεται ότι

$$|f'(x)| \leq \frac{M}{2}\left[x^2 + (1-x)^2\right] = \frac{M}{2}(2x^2 - 2x + 1)\,, \quad \forall x \in [0,1]\,.$$

Όμως, για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $0 < 2x^2 - 2x + 1 \leq 1$ οπότε

$$|f'(x)| \leq \frac{M}{2}\,, \quad \forall x \in [0,1]\,.$$

□

3. Να βρεθούν οι ακτίνες σύγκλισης και τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών :

(α') $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n x^n$

(β') $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$.

Λύση.

(α') Αν $a_n = \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n$, τότε

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{2k} & \text{αν } n = 2k, \\ \left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1} & \text{αν } n = 2k+1\ . \end{cases}$$

Επομένως,

$$\sqrt[2k]{a_{2k}} = \frac{3}{4} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \sqrt[2k+1]{a_{2k+1}} = \frac{1}{6} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{6}\,.$$

Κατά συνέπεια, $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = \max\{3/4\,, 1/6\} = 3/4$. Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 4/3$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < 4/3 \Leftrightarrow -4/3 < x < 4/3$. Για $x = \pm 4/3$ παίρνουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, με

$$c_n := \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n \cdot \left(\pm\frac{4}{3}\right)^n\,.$$

Τότε, $c_{2k} := (3/4)^{2k} \cdot (\pm 4/3)^{2k} = 1$. Επομένως, επειδή η ακολουθία c_n δεν συγκλίνει στο μηδέν, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ αποκλίνει. Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = (-4/3,\ 4/3)$.

(β') Αν $c_n = 2^n x^{n^2}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} 2\,|x|^n = \begin{cases} 0 & \text{αν } |x| < 1\ , \\ 2 & \text{αν } |x| = 1\ , \\ \infty & \text{αν } |x| > 1\ . \end{cases}$$

Από το κριτήριο της ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$ συγκλίνει για $|x| < 1$. Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = (-1,\,1)$.

■

4. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n\ .$$

Λύση. Αν $a_n := (1 + 1/n)^{(-1)^n n^2}$, τότε

$$a_n = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{4k^2} & \text{αν } n = 2k, \\ \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right)^{-(2k-1)^2} & \text{αν } n = 2k - 1\ . \end{cases}$$

Επειδή ως γνωστόν $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, είναι

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k} = \mathrm{e}$$

και

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right)^{-(2k-1)} = \mathrm{e}^{-1}\ .$$

Κατά συνέπεια, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \max\left\{\mathrm{e},\, \mathrm{e}^{-1}\right\} = \mathrm{e}$. Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1/\mathrm{e} = \mathrm{e}^{-1}$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < 1/\mathrm{e} \Leftrightarrow -1/\mathrm{e} < x < 1/\mathrm{e}$.

Για $x = \pm 1/\mathrm{e}$ παίρνουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, με

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} \cdot \left(\pm\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n\ .$$

Τότε, $c_{2k} := (1+1/2k)^{(2k)^2}/\mathrm{e}^{2k}$ και

$$\lim_{k\to\infty} c_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(1+1/2k)^{(2k)^2}}{\mathrm{e}^{2k}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x^2}}{\mathrm{e}^{1/x}} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right) \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=}$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{-1}-1}{2x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{-1}{2(1+x)}\right) = \exp(-1/2) = \mathrm{e}^{-1/2}\,.$$

Επομένως, επειδή η ακολουθία c_n δεν συγκλίνει στο μηδέν, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ αποκλίνει. Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = (-1/\mathrm{e},\, 1/\mathrm{e})$.

Σημείωση. Με $y = \exp x$ ή $y = \mathrm{e}^x$ συμβολίζουμε την εκθετική συνάρτηση. ■

5. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{5-2x}{6-5x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n\,, \quad |x| < 2\,.$$

Υπόδειξη. $\frac{5-2x}{6-5x+x^2} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3-x}$.

Λύση. Επειδή ως γνωστόν $1/(1-t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $|t| < 1$, είναι

$$\frac{5-2x}{6-5x+x^2} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x/3} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n\,, \quad |x| < \min\{2,3\} = 2\,.$$

■

6. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(x) = x^5/\left(1+x^3\right)$ σε δυναμοσειρά, να υπολογιστεί η παράγωγος $f^{(14)}(0)$.

Λύση. Επειδή ως γνωστόν $1/(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$, $|t| < 1$, είναι

$$f(x) = \frac{x^5}{1+x^3} = x^5\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+5} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\,, \quad |x| < 1\,.$$

Επομένως,

$$\frac{f^{(14)}(0)}{14!} = (-1)^3 \Leftrightarrow f^{(14)}(0) = -14!\,.$$

■

7. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(x/a)^n = 1/(1-x/a)$, $|x| < a$, να βρεθεί το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\frac{1\cdot 2}{a^2} + \frac{2\cdot 3}{a^3}x + \frac{3\cdot 4}{a^4}x^2 + \frac{4\cdot 5}{a^5}x^3 + \cdots\,, \qquad |x| < a\,.$$

Λύση. Είναι

$$\frac{1}{1-x/a}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}+\cdots+\frac{x^n}{a^n}+\cdots\,,\quad |x|<a\,.$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\frac{1}{a\,(1-x/a)^2}=\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}=\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}+\frac{3x^2}{a^3}+\frac{4x^3}{a^4}+\cdots+\frac{nx^{n-1}}{a^n}+\cdots\,,\quad |x|<a\,.$$

Παραγωγίζοντας και πάλι έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{2}{a^2\,(1-x/a)^3}&=\frac{1}{a^2}\sum_{n=2}^{\infty}n\,(n-1)\left(\frac{x}{a}\right)^{n-2}\\&=\frac{1\cdot2}{a^2}+\frac{2\cdot3}{a^3}x+\frac{3\cdot4}{a^4}x^2+\cdots+\frac{n\,(n-1)}{a^n}x^{n-2}+\cdots\,,\quad |x|<a\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1\cdot2}{a^2}+\frac{2\cdot3}{a^3}x+\frac{3\cdot4}{a^4}x^2+\frac{4\cdot5}{a^5}x^3+\cdots=\frac{2a}{(a-x)^3}\,,\quad |x|<a\,.$$

■

8. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $f(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ σε σειρά Maclaurin, να βρεθεί το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\frac{1}{2}2x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}4x^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}6x^7+\cdots\,,\qquad |x|<1\,.$$

Λύση. Από τη διωνυμική σειρά

$$(1+t)^a=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\,(a-1)\,(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}\,t^n\,,\quad |t|<1\,,$$

για $t=-x^2$ και $a=-1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)^{-1/2}&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\,(-1)^nx^{2n}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\,(-1)^nx^{2n}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\,(-1)^nx^{2n}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\,x^{2n}\\&=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\cdots\,,\quad |x|<1\,.\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω δυναμοσειρά, για $|x|<1$ είναι

$$\left[\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\, 2nx^{2n-1} = \frac{1}{2}2x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}4x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}6x^5 + \cdots .$$

Πολλαπλασιάζοντας και με x^2 τελικά έχουμε

$$\frac{1}{2}2x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}4x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}6x^7 + \cdots = x^2\left[\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right]' = \frac{x^3}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}\,, \quad |x|<1\,.$$

■

9. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{6}x^7 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{2n+2} + \cdots .$$

Λύση. Είναι

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{6}x^7 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{2n+2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n} .$$

Αν $c_n = (-1)^{n-1}x^{2n+1}/2n$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2+1/n}}{\sqrt[n]{2n}}\, x^2 = x^2$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$ αν και μόνο αν $x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=1$.

Αν

$$f(x) := \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{6}x^7 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{2n+2} + \cdots\,, \quad |x|<1\,,$$

τότε

$$f(x) = xg(x) \text{ με } g(x) := \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \cdots\,, \quad |x|<1\,.$$

Παραγωγίζοντας τη g παίρνουμε

$$\begin{aligned} g'(x) &= x - x^3 + x^5 - \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + \cdots \\ &= x\left(1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots\right) \\ &= x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{x}{1+x^2}\,, \qquad |x|<1\,. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$g\left(x\right)=\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\,.$$

Άρα,

$$f\left(x\right)=\frac{x}{2}\ln\left(1+x^2\right)\,.$$

■

10. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(x)=\arctan x$ σε δυναμοσειρά, να αποδειχθεί ότι

$$I=\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\left(2k+1\right)^2}\,.$$

Αν $I\approx S_2=\sum_{k=0}^{2}\left(-1\right)^k\frac{1}{(2k+1)^2}=1-\frac{1}{9}+\frac{1}{25}=\frac{209}{225}$, να αποδειχθεί ότι το σφάλμα της προσέγγισης είναι μικρότερο ή ίσο του $1/49$.

Λύση. Επειδή ως γνωστόν $\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{2k+1}/\left(2k+1\right)$, $|x|<1$, είναι

$$\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{x^{2k}}{2k+1}\,,\quad |x|<1\,.$$

Επομένως, για $|x|<1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,dt&=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{t^{2k}}{2k+1}\,dt\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{2k+1}\int_0^x t^{2k}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{2k+1}\cdot\left.\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right|_{t=0}^{t=x}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{x^{2k+1}}{\left(2k+1\right)^2}\,.\end{aligned}$$

Επειδή η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k/\left(2k+1\right)^2$ συγκλίνει, είναι

$$I=\int_0^1\frac{\arctan t}{t}\,dt=\lim_{x\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{x^{2k+1}}{\left(2k+1\right)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{1}{\left(2k+1\right)^2}\,.$$

Αν $I\approx S_2=\sum_{k=0}^{2}\left(-1\right)^k/\left(2k+1\right)^2=209/225$, από το κριτήριο του Leibniz για εναλλάσσουσες σειρές είναι

$$|I-S_2|\le a_3=\frac{1}{7^2}=\frac{1}{49}\,.$$

■

4η Σειρά Ασκήσεων στα Μαθηματικά Ια

1. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0,1]$, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{\sqrt{4n^4-k^2n^2}}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{\sqrt{4n^4-k^2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+k/n}{\sqrt{4-(k/n)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

όπου $f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}}$. Επειδή η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{\sqrt{4n^4-k^2n^2}}&=\int_0^1\frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\&=\arcsin(x/2)\big|_{x=0}^{x=1}-\left.\sqrt{4-x^2}\right|_{x=0}^{x=1}\\&=\arcsin(1/2)-\sqrt{3}+2=\pi/6+2-\sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

■

2. Έστω η συνάρτηση $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, με $\alpha\neq\beta$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$y=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_0^x\left(e^{-\alpha(x-t)}-e^{-\beta(x-t)}\right)f(t)\,dt\,,\quad x\geq 0,$$

ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha+\beta)\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=f(x)\,,\qquad y(0)=y'(0)=0\,.$$

Λύση. Επειδή

$$y=\frac{e^{-\alpha x}}{\beta-\alpha}\int_0^x e^{\alpha t}f(t)\,dt-\frac{e^{-\beta x}}{\beta-\alpha}\int_0^x e^{\beta t}f(t)\,dt\,,$$

παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\alpha e^{-\alpha x}}{\beta-\alpha}\int_0^x e^{\alpha t}f(t)\,dt+\frac{\beta e^{-\beta x}}{\beta-\alpha}\int_0^x e^{\beta t}f(t)\,dt$$

και
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha^2 e^{-\alpha x}}{\beta-\alpha}\int_0^x e^{\alpha t} f(t)\,dt + f(x) - \frac{\beta^2 e^{-\beta x}}{\beta-\alpha}\int_0^x e^{\beta t} f(t)\,dt\,.$$
Εύκολα διαπιστώνεται, μετά από πράξεις, ότι
$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha+\beta)\,\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = f(x)\,.$$
Επίσης παρατηρούμε ότι $y(0) = y'(0) = 0$. ■

3. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν $f(\pi) = 1$ και $\int_0^\pi (f(x) + f''(x))\sin x\,dx = 2$, να υπολογιστεί το $f(0)$.

Λύση. Είναι
$$\begin{aligned}\int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx &= \int_0^\pi \big[f'(x)\big]'\sin x\,dx\\ &= f'(x)\sin x\big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi f'(x)\cos x\,dx \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\ &= -\int_0^\pi f'(x)\cos x\,dx\\ &= -\,f(x)\cos x\big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\ &= f(\pi) + f(0) - \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx\,.\end{aligned}$$
Άρα,
$$f(0) = \int_0^\pi \big(f(x) + f''(x)\big)\sin x\,dx - f(\pi) = 2 - 1 = 1\,.$$
■

4. Χρησιμοποιώντας το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα να υπολογιστεί το
$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{\sqrt{3}n} \frac{n\arctan x}{n^2+x^2}\,dx\,.$$

Λύση. Αν η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, με $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Επομένως, αν $f(x) = \arctan x$ και $g(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$, από τον προηγούμενο τύπο έχουμε

$$\begin{aligned}\int_n^{\sqrt{3}n} \frac{n \arctan x}{n^2+x^2}\,dx &= \arctan \xi_n \cdot \int_n^{\sqrt{3}n} \frac{n}{n^2+x^2}\,dx \\ &= \arctan \xi_n \cdot \arctan(x/n)\Big|_{x=n}^{x=\sqrt{3}n} \\ &= \arctan \xi_n \cdot \left(\arctan \sqrt{3} - \arctan 1\right) \\ &= \arctan \xi_n \cdot (\pi/3 - \pi/4) = \arctan \xi_n \cdot (\pi/12)\ , \quad \text{όπου } \xi_n \in \left[n, \sqrt{3}n\right].\end{aligned}$$

Επειδή $n \le \xi_n \le \sqrt{3}n$, είναι $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \infty$ και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty} \arctan \xi_n = \pi/2$. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{\sqrt{3}n} \frac{n \arctan x}{n^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi^2}{24}.$$

■

5. Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης με εξίσωση $y = \arcsin e^x$, $-\ln 2 \le x \le 0$.

Λύση. Το μήκος της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}\ell &= \int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\ &= \int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)^2}\,dx = \int_{-\ln 2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx \\ &= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t\text{)} \\ &= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{t^2\sqrt{(1/t)^2 - 1}}\,dt \\ &= -\int_{2}^{1} \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\,du = \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\,du \qquad \text{(αντικατάσταση } u = 1/t \Leftrightarrow t = 1/u\text{)} \\ &= \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right)\Big|_{u=1}^{u=2} = \ln\left(2+\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

Σημείωση. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{1/2}^{1} \left(1/t\sqrt{1-t^2}\right)dt$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την αντικατάσταση $t = \sin\theta$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Τότε,

$$\begin{aligned}\ell &= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\sin\theta}\,d\theta = -\ln\left(\frac{1}{\sin\theta} + \cot\theta\right)\Bigg|_{\theta=\pi/6}^{\theta=\pi/2} \\ &= -\ln 1 + \ln\left(2+\sqrt{3}\right) = \ln\left(2+\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

■

6. (α΄) Αν $n \in \mathbb{N}$ και $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$, να αποδειχθεί ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ και στη συνέχεια ότι

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}\,. \tag{$*$}$$

(β΄) Αν $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}\left[(n-1)!\right]^2} \cdot \frac{\pi}{2}\,.$$

Λύση.

(α΄) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)' \cos^{n-1} x\, dx \\
&= \sin x \cos^{n-1} x \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \left(\cos^{n-1} x\right)'\, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^{n-2} x\, dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^{n-2} x\, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x\, dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, I_n\,.
\end{aligned}$$

Επομένως, $nI_n = (n-1)\, I_{n-2}$ και ισοδύναμα

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \tag{1.45}$$

Επειδή

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\,,$$

η $(*)$ ισχύει για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι η $(*)$ ισχύει για $n = k$. Τότε,

$$\begin{aligned}
I_{2k+2} &= \frac{2k+1}{2k+2} I_{2k} && \text{(από την (1.45))} \\
&= \frac{2k+1}{2k+2} \cdot \frac{(2k)!}{4^k\, (k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} && \text{(από την $(*)$ για $n=k$)} \\
&= \frac{(2k+1)\,(2k+2)}{(2k+2)^2} \cdot \frac{(2k)!}{4^k\, (k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+2)!}{4^{k+1}\left[(k+1)!\right]^2} \cdot \frac{\pi}{2}\,,
\end{aligned}$$

δηλαδή η $(*)$ ισχύει για $n = k+1$. Άρα, η $(*)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β') Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \tan\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^n} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n}\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2(n-1)}\theta\, d\theta = \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}\left[(n-1)!\right]^2} \cdot \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

(από την $(*)$ για $n-1$)

■

7. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx\,.$$

Λύση. Αν

$$f(x) := \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} \quad \text{και} \quad g(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,, \quad 0 \le x < 1\,,$$

είναι $f(x), g(x) > 0$, για κάθε $x \in [0,1)$. Επειδή

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{2}} \in \mathbb{R}_+$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \left(1/\sqrt[3]{1-x}\right) dx = 3/2$ συγκλίνει, από γνωστό κριτήριο για γενικευμένα ολοκληρώματα μη αρνητικών συναρτήσεων και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \left(\cos^2 x/\sqrt[3]{1-x^2}\right) dx$ θα συγκλίνει. ■

8. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1}\, dx\,.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι : $e^{\sin x} \ge 1 + \sin x$ και $\ln(1+\sqrt[3]{x}) \le \sqrt[3]{x}$.

Λύση. Επειδή ως γνωστόν ισχύουν οι ανισότητες $e^t \ge 1+t$, $\forall t \in \mathbb{R}$ και $\ln(1+t) \le t$, $\forall t > -1$, έπεται ότι $e^{\sin x} \ge 1 + \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\ln(1+\sqrt[3]{x}) \le \sqrt[3]{x}$, $\forall x > -1$. Επομένως,

$$0 < \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1} < \frac{\sqrt[3]{x}}{\sin x}\,, \quad \forall x \in (0,1]\,. \tag{1.46}$$

Αν $f(x) := \frac{\sqrt[3]{x}}{\sin x}$ και $g(x) := \frac{1}{x^{2/3}}$, τότε $f(x), g(x) > 0$, για κάθε $x \in (0,1]$. Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx = 3$ συγκλίνει, από γνωστό κριτήριο για γενικευμένα ολοκληρώματα μη αρνητικών συναρτήσεων και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sin x}\,dx$ θα συγκλίνει. Τότε όμως, χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης για γενικευμένα ολοκληρώματα μη αρνητικών συναρτήσεων, από την (1.46) συνεπάγεται ότι και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1}\,dx$ θα συγκλίνει. ■

9. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

(α') $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$

(β') $J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$

Λύση.

(α') Για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) := \frac{\ln(1+x)}{x} > 0$ και $g(x) := \frac{1}{x} > 0$. Επειδή

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \ln(1+x) = \infty\,,$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$ (αποκλίνει), από γνωστό κριτήριο για γενικευμένα ολοκληρώματα μη αρνητικών συναρτήσεων και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I = \int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \infty$ (αποκλίνει).

(β') Είναι

$$J = \int_0^\infty \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx}_{J_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx}_{J_2}\,.$$

Επειδή το J_1 είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα, αρκεί να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα J_2. Για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) := \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^3}} > 0$ και $g(x) := \frac{1}{x^{1/2}} > 0$. Επειδή

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}\arctan x}{\sqrt{1+x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1/x^3+1}} = \frac{\pi}{2}\,,$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left(1/x^{1/2}\right)\,dx = \infty$ (αποκλίνει), από γνωστό κριτήριο για γενικευμένα ολοκληρώματα μη αρνητικών συναρτήσεων και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $J_2 = \int_1^\infty \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^3}}\, dx = \infty$ (αποκλίνει). Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα J αποκλίνει.

■

10. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του γενικευμένου ολοκληρώματος για σειρές, να αποδειχθεί ότι

$$2e^{-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} \leq 3e^{-1}\,.$$

Λύση. Αν $a_n := ne^{-n}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

και από το κριτήριο του λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ συγκλίνει. Αν $f(x) := xe^{-x}$, $x \geq 1$, είναι $f(x) > 0$ και $f'(x) = e^{-x}(1-x) \leq 0$, δηλαδή η f είναι φθίνουσα. Από το θεώρημα του γενικευμένου ολοκληρώματος για σειρές είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - f(1) \leq \int_1^\infty f(x)\, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} - e^{-1} \leq \int_1^\infty xe^{-x}\, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}\,.$$

Επειδή

$$\int_1^\infty xe^{-x}\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_1^r xe^{-x}\, dx = \lim_{r\to\infty}\left(-\, xe^{-x}\Big|_{x=1}^{x=r} + \int_1^r e^{-x}\, dx \right)$$

(παραγοντική ολοκλήρωση)

$$\begin{aligned} &= \lim_{r\to\infty}\left(-re^{-r} + e^{-1} - e^{-r} + e^{-1}\right) \\ &= -\lim_{r\to\infty} \frac{r}{e^r} + 2e^{-1} \\ &= -\lim_{r\to\infty} \frac{1}{e^r} + 2e^{-1} = 2e^{-1}\,, \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \end{aligned}$$

τελικά έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} - e^{-1} \leq 2e^{-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} \Longleftrightarrow 2e^{-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} \leq 3e^{-1}\,.$$

■

Κεφάλαιο 2

Θέματα Εξετάσεων

2.1 Ακαδημαϊκό έτος 2014–15

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

9 Φεβρουαρίου, 2015

Θ1. Έστω A, B φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\inf A < \inf B$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in A$ που να είναι κάτω φράγμα του B. (1,3 μον.)

Λύση. Χρησιμοποιώντας το χαρακτηρισμό για το infimum ενός συνόλου, για $\varepsilon = \inf B - \inf A > 0$ υπάρχει $\alpha \in A$, τέτοιο ώστε

$$\alpha < \inf A + \varepsilon = \inf A + \inf B - \inf A = \inf B.$$

Συνεπώς το α είναι κάτω φράγμα του B. ■

Θ2. (α΄) Αποδείξτε ότι αν $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \beta_\nu = \beta$ και $\alpha_\nu = \beta_{\nu+1} - \beta_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \beta - \beta_1 .$$

(1,2 μον.)

(β΄) Να δείξετε ότι

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\nu+1}{3^\nu} = \frac{9}{4}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Πρόκειται για τηλεσκοπική σειρά αφού η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι η

$$s_\nu = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu = (\beta_2-\beta_1)+(\beta_3-\beta_2)+\cdots+(\beta_{\nu+1}-\beta_\nu) = \beta_{\nu+1}-\beta_1 \to \beta-\beta_1$$

και συνεπώς

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \beta - \beta_1\,.$$

(β΄) Θεωρούμε τη γεωμετρική σειρά: $\sum_{\nu=0}^{+\infty} x^\nu = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$. Επομένως

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} x^{\nu+1} = \frac{x}{1-x}\,, \quad |x|<1\,.$$

Στη συνέχεια παραγωγίζοντας όρο προς όρο έχουμε ότι

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} (\nu+1)x^\nu = \frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad |x|<1\,.$$

Για $x = 1/3$ έχουμε το συμπέρασμα.

■

Θ3. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^3-7 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 1 & \text{αν } x \text{ ρητός}\,. \end{cases}$$

Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{R}$ στα οποία η f είναι συνεχής. Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1,5 μον.)

Λύση. Η συνάρτηση f είναι ασυνεχής για $x \neq 2$. Πράγματι, αν (α_n) είναι ακολουθία άρρητων αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = x$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n^3 - 7) = x^3 - 7\,.$$

Αν (ρ_n) είναι ακολουθία ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \rho_n = x$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = 1\,.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\rho_n)$ αν και μόνο αν

$$x^3 - 7 \neq 1 \Leftrightarrow x^3 - 8 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2\,.$$

Από το θεώρημα(αρχή) μεταφοράς η f δεν είναι συνεχής για $x \neq 2$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο 2. Επειδή $2 \in \mathbb{Q}$, είναι $f(2) = 1$. Αν το x είναι άρρητος

$$|f(x) - f(2)| = |x^3 - 7 - 1| = |x^3 - 8| = |x - 2|(x^2 + 2x + 4)$$

και αν το x είναι ρητός $|f(x) - f(2)| = |1 - 1| = 0$. Επομένως

$$|f(x) - f(2)| \leq |x - 2|(x^2 + 2x + 4)\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $|x - 2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, τότε $|f(x) - f(2)| < 19|x - 2|$. Αν επιλέξουμε το $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{19}\right\}$, τότε

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon\,.$$

Άρα η f είναι συνεχής στο σημείο 2. ■

Θ4. Διατυπώστε το θεώρημα Darboux για παραγώγους.

Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα I και έστω x_0 εσωτερικό σημείο του I. Δείξτε ότι το πλευρικό όριο $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ δεν μπορεί να ισούται με $+\infty$.

<u>*Εφαρμογή*</u>. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} e^{1/x}/\ln(1/x) & \text{αν } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{αν } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Υπάρχει συνάρτηση $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) = g(x)$, για κάθε $x < 1$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (2 μον.)

Λύση. Θεώρημα Darboux για παραγώγους: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(a) \neq f'(b)$. Τότε για κάθε c μεταξύ $f'(a)$ και $f'(b)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = c\,.$$

Έστω $f'(x_0+) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$. Από τον ορισμό του ορίου από δεξιά της f' στο x_0, για $M = f'(x_0)+1$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0, x_0+\delta) \subset I$ να ισχύει $f'(x) \geq f'(x_0) + 1$. Μάλιστα μπορούμε να επιλέξουμε το $\delta > 0$ έτσι ώστε $f'(x_0) \neq f'(x_0 + \delta)$(γιατί;). Τότε από το Θεώρημα Darboux για κάθε c στο ανοικτό διάστημα J με άκρα τα $f'(x_0)$ και $f'(x_0 + \delta)$ υπάρχει $\xi \in (x_0, x_0 + \delta)$ με $c = f'(\xi) \geq f'(x_0) + 1$. Επομένως το διάστημα $[f'(x_0) + 1, +\infty)$ θα περιέχει το ανοικτό διάστημα J και κατά συνέπεια θα περιέχει και τα άκρα του διαστήματος J. Τότε $f'(x_0) + 1 \leq f'(x_0) < +\infty$, άτοπο. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι $f'(x_0+) = +\infty$. Άρα το $f'(x_0+)$ δεν ισούται με $+\infty$.

Εφαρμογή. Είναι $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -1$ και

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\ln(1/x)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{\ln t} = \lim_{t\to+\infty} te^t = +\infty\,. \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}$$

Επομένως, αν υπάρχει συνάρτηση $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) = g(x)$, για κάθε $x < 1$, θα είναι $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$ και $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, άτοπο. Άρα, δεν υπάρχει συνάρτηση $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x < 1$. ■

Θ5. Έστω $f \in C^2([-1, 1])$, δηλαδή η συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-1, 1]$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο Maclaurin για $x = 1/n$ και $x = -1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0) \right]$$

συγκλίνει.

Εφαρμογή. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Έστω $x \in [-1, 1]$, $x \neq 0$. Από τον τύπο Maclaurin, για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x είναι

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2\,.$$

Ειδικά για $x = \pm 1/n$ έχουμε

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right) = f(0) + \frac{1}{n} f'(0) + \frac{1}{2n^2} f''(\alpha_n) \tag{2.1}$$

και

$$f\left(-\tfrac{1}{n}\right) = f(0) - \frac{1}{n} f'(0) + \frac{1}{2n^2} f''(\beta_n)\,, \tag{2.2}$$

για κάποια α_n, β_n με $0 < \alpha_n < 1/n$ και $-1/n < \beta_n < 0$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2.1), (2.2) παίρνουμε

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(-\tfrac{1}{n}\right) - 2f(0) = \tfrac{1}{2n^2}\left[f''(\alpha_n) + f''(\beta_n)\right]\,,$$

όπου $\alpha_n, \beta_n \in [-1, 1]$. Έστω

$$M := \max_{x \in [-1,1]} |f''(x)|\,.$$

Τότε

$$\left|f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(-\tfrac{1}{n}\right) - 2f(0)\right| \le M \cdot \tfrac{1}{n^2}\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(-\tfrac{1}{n}\right) - 2f(0)\right|$$

θα συγκλίνει. Δηλαδή η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(-\tfrac{1}{n}\right) - 2f(0)\right]$$

συγκλίνει απόλυτα και κατά συνέπεια θα συγκλίνει.

Εφαρμογή. Η $f(x) := x\sin x$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επειδή

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(-\tfrac{1}{n}\right) - 2f(0) = \tfrac{1}{n}\sin\left(\tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{n}\sin\left(\tfrac{1}{n}\right) = 2\tfrac{1}{n}\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει. ■

Θ6. Να λυθεί η εξίσωση

$$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+1}}\,dt = \frac{\pi}{4}\,, \qquad 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+1}}\,dt &= \int_1^x \frac{1}{\sqrt{2-(t-1)^2}}\,dt \\ &= \int_0^{x-1} \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-u^2}}\,du \qquad\qquad (\text{αντικατάσταση } u=t-1) \\ &= \arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{u=0}^{u=x-1} \\ &= \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin 0 = \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+1}}\,dt = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Άρα, $x = 2$. ■

Επαναληπτική Εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

11 Σεπτεμβρίου, 2015

Θ1. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\sup A = \inf B$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τέτοια ώστε $\beta - \alpha < \varepsilon$. (1,3 μον.)

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας τους χαρακτηρισμούς για το supremum και το infimum, έχουμε ότι υπαρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τέτοια ώστε

$$\alpha > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \beta < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επομένως $\beta - \alpha < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} - (\sup A - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$. ■

Θ2. (α΄) Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{1^\nu + 2^\nu + \cdots + 15^\nu}$. (1,2 μον.)

(β΄) Να βρείτε το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu x^{4\nu}$$

και στη συνέχεια, για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνει, να υπολογίσετε το άθροισμά της. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι

$$15 < \sqrt[\nu]{1^\nu + 2^\nu + \cdots + 15^\nu} < \sqrt[\nu]{15^\nu + 15^\nu + \cdots + 15^\nu} = 15\sqrt[\nu]{15}\,.$$

Όμως για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α είναι $\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{\alpha} = 1$. Συνεπώς, από γνωστή πρόταση για τις ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες έχουμε ότι

$$\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{1^\nu + 2^\nu + \cdots + 15^\nu} = 15\,.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου (και ελέγχοντας τι συμβαίνει στα άκρα) βλέπουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < 1$ και αποκλίνει για $|x| \geq 1$. Από το θεώρημα για την όρο προς όρο παραγώγιση δυναμοσειρών και το ανάπτυγμα

$$\frac{1}{1-x^4} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{4\nu}\,, \quad \text{για κάθε } x \in (-1,1)\,,$$

έχουμε ότι

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu x^{4\nu} = \frac{x}{4}\sum_{\nu=1}^{\infty} 4\nu x^{4\nu-1} = \frac{x}{4}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{4\nu}\right)' = \frac{x}{4}\left(\frac{1}{1-x^4}\right)' = \frac{x^4}{(1-x^4)^2}\,,$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

■

Θ3. (α΄) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Βρείτε πραγματικές ακολουθίες (x_n), (y_n) με $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ και τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. Υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1 μον.)

(β΄) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f\left(r + \frac{1}{n}\right) = f(r)\,, \quad \text{για κάθε ρητό αριθμό } r \text{ και κάθε θετικό ακέραιο } n\,. \qquad (*)$$

Δείξτε ότι $f(r) = f(0)$, για κάθε ρητό r. Τι συμπεραίνετε για τη συνάρτηση f; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Έστω $x_n = 1/2n\pi$ και $y_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε $x_n, y_n \to 0$, ενώ

$$f(x_n) = \cos 2n\pi = 1 \text{ και } f(y_n) = \cos(2n\pi + \pi/2) = 0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Δηλαδή $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. Επομένως, από το θεώρημα(αρχή) μεταφοράς το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

(β΄) Αν η $(*)$ ισχύει για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, επαγωγικά θα αποδείξουμε ότι

$$f\left(r + \frac{m}{n}\right) = f(r)\,, \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}^*\,. \tag{$**$}$$

Πράγματι, από την υπόθεση η $(**)$ ισχύει για $m = 1$. Αν υποθέσουμε ότι η $(**)$ ισχύει για $m \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$f\left(r + \frac{m+1}{n}\right) = f\left(r + \frac{m}{n} + \frac{1}{n}\right) = f\left(r + \frac{m}{n}\right) = f(r)\,.$$

Δηλαδή η $(**)$ ισχύει για $m + 1$.

Για $r = 0$ και $r = -m/n$, από τη $(**)$ έχουμε

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(0) = f\left(-\frac{m}{n}\right)$$

και επομένως $f(r) = f(0)$, για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και έστω (r_n) ακολουθία ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} r_n = x_0$. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, από το θεώρημα(αρχή) μεταφοράς είναι $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(0)$. Επομένως, $f(x) = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κατά συνέπεια η f είναι σταθερή συνάρτηση.

■

Θ4. Έστω $f \in C^3([-1,1])$, δηλαδή η συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ είναι τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-1,1]$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο Maclaurin για $x = 1/n$ και $x = -1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0) - \frac{1}{n^2} f''(0) \right]$$

συγκλίνει.

Εφαρμογή. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n} - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \right]\,.$$

(2 μον.)

Λύση. Έστω $x \in [-1,1]$, $x \neq 0$. Από τον τύπο Maclaurin, για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x είναι

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 .$$

Ειδικά για $x = \pm 1/n$ έχουμε

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right) = f(0) + \tfrac{1}{n}f'(0) + \tfrac{1}{2n^2}f''(0) + \tfrac{1}{6n^3}f'''(\alpha_n) \tag{2.3}$$

και

$$f\left(-\tfrac{1}{n}\right) = f(0) - \tfrac{1}{n}f'(0) + \tfrac{1}{2n^2}f''(0) - \tfrac{1}{6n^3}f''(\beta_n) , \tag{2.4}$$

για κάποια α_n, β_n με $0 < \alpha_n < 1/n$ και $-1/n < \beta_n < 0$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2.3), (2.4) παίρνουμε

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(-\tfrac{1}{n}\right) - 2f(0) - \tfrac{1}{n^2}f''(0) = \tfrac{1}{6n^3}\left(f''(\alpha_n) - f''(\beta_n)\right) ,$$

όπου $\alpha_n, \beta_n \in [-1,1]$. Έστω

$$M := \max_{x\in[-1,1]} |f''(x)| .$$

Τότε

$$\left|f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(-\tfrac{1}{n}\right) - 2f(0) - \tfrac{1}{n^2}f''(0)\right| \leq \tfrac{1}{6n^3}\left(|f''(\alpha_n)| + |f''(\beta_n)|\right) \leq \tfrac{M}{3}\cdot\tfrac{1}{n^3} .$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^3)$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(-\tfrac{1}{n}\right) - 2f(0) - \tfrac{1}{n^2}f''(0)\right|$$

θα συγκλίνει. Δηλαδή η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(-\tfrac{1}{n}\right) - 2f(0) - \tfrac{1}{n^2}f''(0)\right]$$

συγκλίνει απόλυτα και κατά συνέπεια θα συγκλίνει.

Εφαρμογή. Η $f(x) := x\arctan x$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} .$$

Επειδή

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(-\tfrac{1}{n}\right) - 2f(0) - \tfrac{1}{n^2}f''(0) = 2\tfrac{1}{n}\arctan\left(\tfrac{1}{n}\right) - 2\tfrac{1}{n^2}$$

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n} - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ συγκλίνει. ■

Θ5. Έστω $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(1) = 1$ και

$$f'(t) = \frac{1}{t^2 + f^2(t)}\,, \quad \text{για κάθε } t \geq 1\,.$$

Δείξτε πρώτα ότι $f'(t) \leq \dfrac{1}{t^2+1}$, για κάθε $t \geq 1$ και στη συνέχεια δείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει με $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \leq 1 + \dfrac{\pi}{4}$. (1,5 μον.)

Λύση. Επειδή από την υπόθεση είναι $f'(t) > 0$, $\forall t \geq 1$, η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα με $f(t) \geq f(1) = 1$, $\forall t \geq 1$. Επομένως,

$$f'(t) = \frac{1}{t^2 + f^2(t)} \leq \frac{1}{t^2+1}\,, \quad \text{για κάθε } t \geq 1\,.$$

Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού, για κάθε $x \geq 1$ έχουμε

$$f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t)\,dt \leq \int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t\big|_{t=1}^{t=x} = \arctan x - \arctan 1 = \arctan x - \frac{\pi}{4}\,.$$

Όμως η συνάρτηση $y = \arctan x$ είναι γνήσια αύξουσα με $|\arctan x| < \pi/2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως

$$f(x) < f(1) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{4}\,.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα και άνω φραγμένη, το $1 + \pi/4$ είναι ένα άνω φράγμα. Άρα, το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει με

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}\,.$$

■

2.2 Ακαδημαϊκό έτος 2013–14

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

28 Μαρτίου, 2014

Θ1. Έστω A, B φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\sup A = \inf B$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τέτοια ώστε $\beta - \alpha < 10^{-3}$. (1,5 μον.)

Λύση. Χρησιμοποιώντας τους χαρακτηρισμούς για το supremum και το infimum ενός συνόλου, για $\varepsilon = 10^{-3}/2$ υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ τέτοια ώστε

$$\alpha > \sup A - \frac{10^{-3}}{2} \quad \text{και} \quad \beta < \inf B + \frac{10^{-3}}{2}\,.$$

Συνεπώς

$$\beta - \alpha < \left(\inf B + \frac{10^{-3}}{2}\right) - \left(\sup A - \frac{10^{-3}}{2}\right) = 10^{-3}\,.$$

■

Θ2. (α΄) Έστω η ακολουθία πραγματικών αριθμών (α_ν) για την οποία ισχύει $\lim_{\nu\to+\infty} 2^\nu \alpha_\nu = 0$. Να δείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \alpha_\nu$$

συγκλίνει απόλυτα. (1,2 μον.)

(β΄) Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{16x}{(4+x^2)^2}\,.$$

(1,3 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή $\lim_{\nu\to+\infty} 2^\nu \alpha_\nu = 0$, για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|2^\nu \alpha_\nu| < 1\,, \text{ για κάθε } \nu \geq \nu_0 \Leftrightarrow |\alpha_\nu| < \frac{1}{2^\nu}\,, \text{ για κάθε } \nu \geq \nu_0\,.$$

Επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{\nu=\nu_0}^{+\infty}(1/2)^\nu$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{\nu=\nu_0}^{+\infty}|\alpha_\nu|$ θα συγκλίνει. Άρα, η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\alpha_\nu$$

συγκλίνει απόλυτα.

(β΄) Παρατηρούμε ότι

$$\frac{16x}{(4+x^2)^2}=\frac{x}{(1+(x/2)^2)^2}=-2\left(\frac{1}{1+(x/2)^2}\right)'.$$

Επομένως από το θεώρημα για την όρο προς όρο παραγώγιση δυναμοσειρών και το ανάπτυγμα

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{\nu=0}^{+\infty}(-1)^\nu x^\nu\,,\quad |x|<1\,, \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{16}-\frac{x^6}{64}+\cdots\right)' \\ &= x-\frac{x^3}{2}+\frac{3x^5}{16}-\cdots\,,\quad |x/2|<1\Leftrightarrow|x|<2\,. \end{aligned}$$

■

Θ3. (α΄) Δώστε παράδειγμα πραγματικής συνάρτησης ορισμένης στο $\mathbb{R}$ που να είναι συνεχής μόνο στο σημείο $x=1$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (1 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη. Διατυπώστε τον τύπο Taylor με κέντρο το $x\in\mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to+\infty}f''(x)=a\in\mathbb{R}$, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+2)+f(x)-2f(x+1)\right)\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\,. \end{cases}$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 σταθερό. Αν (ρ_n) είναι ακολουθία ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \rho_n = x_0$, τότε $\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = \lim_{n\to\infty}(\rho_n - 1) = x_0 - 1$. Αν (α_n) είναι ακολουθία άρρητων αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = x_0$, τότε $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = 0$.

Είναι $\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n)$ αν και μόνο αν $x_0 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x_0 \neq 1$. Επομένως το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις συνεπάγεται ότι η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο 1. Επειδή $f(1) = 1 - 1 = 0$,

$$|f(x) - f(1)| = |f(x)| \leq |x - 1|$$

και επομένως $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο σημείο 1.

(β΄) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από τον τύπο Taylor για κάθε $h \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(c)}{2!}h^2\,, \quad \text{για κάποιο } c \text{ μεταξύ } x \text{ και } x+h\,.$$

Για $h = 1$ και $h = 2$ έχουμε

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{f''(\zeta_x)}{2!}\,, \quad \text{για κάποιο } \zeta_x \text{ με } x < \zeta_x < x+1$$

και

$$f(x+2) = f(x) + 2f'(x) + \frac{f''(\xi_x)}{2!}2^2\,, \quad \text{για κάποιο } \xi_x \text{ με } x < \xi_x < x+2\,.$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι

$$f(x+2) + f(x) - 2f(x+1) = 2f''(\xi_x) - f''(\zeta_x)\,,$$

όπου $x < \zeta_x < x+1$ και $x < \xi_x < x+2$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = a$, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+2) + f(x) - 2f(x+1)\right) = \lim_{x\to+\infty} 2f''(\xi_x) - \lim_{x\to+\infty} f''(\zeta_x) = 2a - a = a\,.$$

■

Θ4. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^1 στο $(0, +\infty)$ και τέτοια ώστε $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$.

(α΄) Δείξτε ότι υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } x \geq a \Rightarrow f'(x) > \frac{1}{2x}\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Υπολογίστε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$, για $\varepsilon = 1/2$ υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \geq a$ να ισχύει

$$|xf'(x) - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < xf'(x) < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2x} < f'(x) < \frac{3}{2x}\,.$$

Επομένως,

$$\text{για κάθε } x \geq a \Rightarrow f'(x) > \frac{1}{2x}\,.$$

(β΄) Επειδή η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \\
&\geq f(a) + \int_a^x \frac{1}{2t}\,dt && \left(f'(t) > \tfrac{1}{2t} \text{ για κάθε } t \geq a > 0\right) \\
&= f(a) + \frac{1}{2}(\ln x - \ln a) \\
&= f(a) + \frac{1}{2}\ln\frac{x}{a} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty
\end{aligned}$$

και επομένως $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

■

Θ5. Έστω (a_n) ακολουθία με

$$a_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{4n^2 + k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{4 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}\,.$$

Αν $k, n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{1}{4 + x^2}\,dx \leq \frac{1}{n}\frac{1}{4 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{4 + x^2}\,dx$$

και

$$\int_{1/n}^{(n^2+1)/n} \frac{1}{4+x^2}\,dx \le a_n \le \int_0^n \frac{1}{4+x^2}\,dx\,.$$

Υπολογίστε αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} a_n$. (2 μον.)

Λύση. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$, έχουμε

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{1}{4+x^2}\,dx \le \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{1}{4+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\,dx = \frac{1}{n}\frac{1}{4+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

και

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{4+x^2}\,dx \ge \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{4+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\,dx = \frac{1}{n}\frac{1}{4+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\,.$$

Επομένως,

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{1}{4+x^2}\,dx \le \frac{1}{n}\frac{1}{4+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \le \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{4+x^2}\,dx\,.$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω ανισότητες από $k=1$ έως $k=n^2$, παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{n^2}\int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{1}{4+x^2}\,dx \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{4+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \le \sum_{k=1}^{n^2}\int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

και ισοδύναμα

$$\int_{1/n}^{(n^2+1)/n} \frac{1}{4+x^2}\,dx \le a_n \le \int_0^n \frac{1}{4+x^2}\,dx\,.$$

Άρα,

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{x=1/n}^{x=(n^2+1)/n} \le a_n \le \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=n}$$

και κατά συνέπεια

$$\frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{n^2+1}{2n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2n}\right)\right] \le a_n \le \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{n}{2}\right)\,.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{n^2+1}{2n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2n}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\,,$$

συμπεραίνουμε ότι και $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$. ■

Επαναληπτική Εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

6 Οκτωβρίου, 2014

Θ1. Έστω A, B φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\sup A = \inf B$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τέτοια ώστε $\beta - \alpha < \frac{1}{10}$. (1,3 μον.)

Λύση. Χρησιμοποιώντας τους χαρακτηρισμούς για το supremum και το infimum ενός συνόλου, για $\varepsilon = 10^{-1}/2$ υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ τέτοια ώστε

$$\alpha > \sup A - \frac{10^{-1}}{2} \quad \text{και} \quad \beta < \inf B + \frac{10^{-1}}{2}\,.$$

Συνεπώς

$$\beta - \alpha < \left(\inf B + \frac{10^{-1}}{2}\right) - \left(\sup A - \frac{10^{-1}}{2}\right) = 10^{-1} = \frac{1}{10}\,.$$

■

Θ2. (α΄) Έστω (α_ν) ακολουθία πραγματικών αριθμών για την οποία ισχύει $\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = \alpha > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\alpha_\nu > 0$, για κάθε $\nu \geq \nu_0$. (1,2 μον.)

(β΄) Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά τη συνάρτηση

$$f(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή $\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = \alpha > 0$, για $\varepsilon = \alpha/2$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\nu \geq \nu_0$ να ισχύει

$$|\alpha_\nu - \alpha| < \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} < \alpha_\nu < \frac{3\alpha}{2}\,.$$

Επομένως,

$$\text{για κάθε } \nu \geq \nu_0 \Rightarrow \alpha_\nu > \frac{\alpha}{2} > 0\,.$$

(β΄) Παρατηρούμε ότι

$$-\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\,.$$

Επομένως από το θεώρημα για την όρο προς όρο παραγώγιση δυναμοσειρών και το ανάπτυγμα

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} (-1)^{\nu} x^{\nu}\,, \quad |x| < 1\,, \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\right)' \\ &= -2x + 4x^3 - 6x^5 + \cdots = 2\sum_{\nu=1}^{+\infty} (-1)^{\nu} \nu x^{2\nu-1}\,, \quad |x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1\,. \end{aligned}$$

■

Θ3. (i) Διατυπώστε το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες και το θεώρημα(αρχή) μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις. (0,5 μον.)

(ii) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(x)^2 + (f'(x))^2 > 0\,, \quad \text{για κάθε } x \in [a, b]\,. \tag{2.5}$$

Δείξτε ότι η f έχει πεπερασμένο το πλήθος ρίζες στο διάστημα $[a, b]$. (1,5 μον.)

Λύση.

(i) **Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες**: Κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα(αρχή) μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις: Η συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$.

(ii) Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $Z(f) := \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$ δεν είναι πεπερασμένο, δηλαδή το σύνολο των ριζών της f στο διάστημα $[a, b]$ δεν είναι πεπερασμένο. Τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) ξένων ανά δύο στοιχείων του συνόλου $Z(f)$. Είναι $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και επομένως από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) με $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$. Είναι $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και κατά συνέπεια το $x_0 \in [a, b]$. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, από το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$. Όμως $f(x_{k_n}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ οπότε και $f(x_0) = 0$, δηλαδή το x_0 είναι ρίζα της f.

Από την υπόθεση η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in [a, b]$ με

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Τότε από το θεώρημα(αρχή) μεταφοράς για το όριο συνάρτησης έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{k_n}) - f(x_0)}{x_{k_n} - x_0} = 0\,.$$

Επομένως $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Όμως λόγω της (2.5) αυτό είναι άτοπο. Άρα το σύνολο των ριζών της f στο διάστημα $[a, b]$ είναι πεπερασμένο.

■

Θ4. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0, 1]$, να βρεθεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{4k^2 - 4kn + 2n^2}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{4k^2 - 4kn + 2n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4\,(k/n)^2 - 4(k/n) + 2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

όπου $f(x) = \frac{1}{4x^2 - 4x + 2}$. Επομένως, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{4k^2 - 4kn + 2n^2} = \int_0^1 \frac{1}{4x^2 - 4x + 2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(2x-1)^2 + 1}\,dx\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{4k^2 - 4kn + 2n^2} &= \int_0^1 \frac{1}{(2x-1)^2 + 1}\,dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2 + 1}\,dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t = 2x - 1\text{)} \\
&= \frac{1}{2} \arctan t\Big|_{t=-1}^{t=1} \\
&= \frac{1}{2}(\arctan 1 - \arctan(-1)) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

■

Θ5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$, δηλαδή $f(t+T) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(α΄) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Αν $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$\int_x^{x+nT} f(t)\,dt = n\int_0^T f(t)\,dt\,.$$

(0,5 μον.)

(γ΄) _Εφαρμογή_. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$(i)\ \int_{-\varphi}^{1007\pi-\varphi} |\sin t|\,dt \quad \text{και} \quad (ii)\ \int_{-\varphi}^{1007\pi-\varphi} |\cos 2t|\,dt\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) _1ος τρόπος_. Από την υπόθεση είναι $f(t-T) = f\left((t-T)+T\right) = f(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+T} f(t)\,dt &= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{x+T} f(t)\,dt \\
&= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{x+T} f(t-T)\,dt \\
&= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_0^x f(u)\,du \quad \text{(αντικατάσταση } u = t-T\text{)} \\
&= -\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

2ος τρόπος. Έστω

$$F(x) := \int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^{x+T} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η F είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. Άρα $F(x) = F(0) = \int_0^T f(t)\,dt$ και κατά συνέπεια

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt\,, \quad \text{για κάθε}\, x \in \mathbb{R}\,.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας το (α΄) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_x^{x+nT} f(t)\,dt &= \int_x^{x+T} f(t)\,dt + \int_{x+T}^{x+2T} f(t)\,dt + \cdots + \int_{x+(n-1)T}^{x+nT} f(t)\,dt \\ &= \underbrace{\int_0^T f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \cdots + \int_0^T f(t)\,dt}_{n} = n\int_0^T f(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

(γ΄) <u>*Εφαρμογή*</u>. (i) Επειδή η συνάρτηση $y = |\sin t|$ είναι συνεχής και π-περιοδική, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\varphi}^{1007\pi-\varphi} |\sin t|\,dt &= 1007\int_0^{\pi} |\sin t|\,dt \\ &= 1007\int_0^{\pi} \sin t\,dt \\ &= 1007(-\cos\pi + \cos 0) = 1007\cdot 2 = 2014\,.\end{aligned}$$

(ii) Είναι

$$\begin{aligned}\int_{-\varphi}^{1007\pi-\varphi} |\cos 2t|\,dt &= \frac{1}{2}\int_{-2\varphi}^{2014\pi-2\varphi} |\cos x|\,dx \qquad \text{(αντικατάσταση } x = 2t\text{)} \\ &= 1007\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx \\ &\qquad \text{(η συνάρτηση } y = |\cos x| \text{ είναι συνεχής και } \pi\text{-περιοδική)} \\ &= 1007\left[\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx\right] \\ &= 1007\,[(\sin(\pi/2) - (\sin(\pi) - \sin(\pi/2))] = 1007\cdot 2 = 2014\,.\end{aligned}$$

<u>*Σημείωση*</u>. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την αντικατάσταση $x = 2t - \dfrac{\pi}{2}$.

■

2.3 Ακαδημαϊκό έτος 2012–13

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

22 Φεβρουαρίου, 2013

Θ1. (α΄) Έστω A, B μη κενά φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν $\inf A < \sup B$, τότε υπάρχουν στοιχεία $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ με $\alpha < \beta$. (1 μον.)

(β΄) Έστω ότι $\lim \alpha_\nu = \alpha < 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\alpha_\nu < 0$ για κάθε $\nu \geq \nu_0$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν επιλέξουμε $\varepsilon = \sup B - \inf A > 0$, τότε από τον χαρακτηρισμό supremum και infimum θα υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ τέτοια ώστε

$$\alpha < \inf A + \frac{\varepsilon}{2} = \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < \beta\,.$$

Άρα $\alpha < \beta$.

(β΄) Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό έτσι ώστε $\alpha + \varepsilon < 0$ (π.χ. $\varepsilon = -\frac{\alpha}{2}$) και έχουμε ότι υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\alpha_\nu < \alpha + \varepsilon < 0\,, \quad \text{για κάθε } \nu \geq \nu_0\,.$$

■

Θ2. (α΄) Δείξτε ότι αν $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \beta_\nu = \beta$ και $\alpha_\nu = \beta_\nu - \beta_{\nu+1}\,, \nu \in \mathbb{N}$, τότε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \beta_1 - \beta\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά, κέντρου 0, τη συνάρτηση

$$\frac{1}{(2+x)^2}$$

προσδιορίζοντας και την ακτίνα σύγκλισής της. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Πρόκειται για τηλεσκοπική σειρά αφού η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι η

$$\begin{aligned} s_\nu &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \\ &= (\beta_1 - \beta_2) + (\beta_2 - \beta_3) + \cdots + (\beta_\nu - \beta_{\nu+1}) \\ &= \beta_1 - \beta_{\nu+1} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \beta_1 - \beta \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \beta_1 - \beta\,.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα για την παραγώγιση όρο προς όρο δυναμοσειράς έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2+x)^2} &= \left(-\frac{1}{2+x}\right)' \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x/2}\right)' \\ &= -\frac{1}{2}(1 - x/2 + x^2/4 - x^3/8 + x^4/16 - \cdots)' \\ &= 1/4 - x/4 + 3x^2/16 - x^3/8 + \cdots\,, \quad \text{για } |x| < 2\,. \end{aligned}$$

■

Θ3. (α΄) Έστω η συνάρτηση $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, με $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό του ορίου $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lambda$ και δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. (1 μον.)

(β΄) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $y \in [a,b]$ με

$$|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|\,.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ με $f(x_0) = 0$. (1,5 μον.)

Υπόδειξη. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του $[a,b]$ με

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|f(x_1)|\,.$$

Λύση.

(α΄) Αν $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lambda$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > a$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > \delta$ να ισχύει

$$|xf(x) - \lambda| < \varepsilon\,.$$

Παίρνουμε $\varepsilon = 1$ και επιλέγουμε το $\delta > a$, $\delta > 0$. Τότε $|xf(x)| - |\lambda| \leq |xf(x) - \lambda| < 1$ και κατά συνέπεια $|xf(x)| < |\lambda| + 1$ για κάθε $x > \delta$. Επομένως

$$|f(x)| < \frac{|\lambda| + 1}{x}\,, \quad \text{για κάθε } x > \delta\,.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(β΄) *1ος τρόπος*. Έστω $x_1 \in [a,b]$. Από την υπόθεση υπάρχει $x_2 \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $|f(x_2)| \leq (1/2)|f(x_1)|$. Έστω ότι υπάρχει $x_k \in [a,b]$ με $|f(x_k)| \leq (1/2^{k-1})|f(x_1)|$. Τότε από την υπόθεση υπάρχει $x_{k+1} \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $|f(x_{k+1})| \leq (1/2)|f(x_k)| \leq (1/2^k)|f(x_1)|$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|f(x_1)|\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

Η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι $f(x_n) \to 0$. Η ακολουθία (x_n) σημείων του $[a,b]$ είναι φραγμένη και επομένως από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει, έστω $x_{k_n} \to x_0$. Είναι $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επομένως το $x_0 \in [a,b]$. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, από το θεώρημα μεταφοράς $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$. Όμως $f(x_n) \to 0$ συνεπάγεται ότι και $f(x_{k_n}) \to 0$. Άρα, $f(x_0) = 0$.

2ος τρόπος. Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι η f δεν μηδενίζεται στο $[a,b]$. Επειδή η $|f|$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$, η $|f|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο διάστημα $[a,b]$. Δηλαδή υπάρχει $x_1 \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$|f(x)| \geq |f(x_1)|\,, \quad \text{για κάθε } x \in [a,b]\,. \tag{2.6}$$

Όμως από την υπόθεση της άσκησης υπάρχει $y \in [a,b]$ με

$$|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x_1)| \leq \frac{1}{2}|f(y)|\,. \qquad \text{(λόγω της (2.6))}$$

Επειδή υποθέσαμε ότι η f δεν μηδενίζεται στο $[a,b]$, είναι $|f(y)| > 0$ και από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι $1 \leq 1/2$ που είναι άτοπο. Άρα η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[a,b]$.

■

Θ4. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα I και έστω x_0 εσωτερικό σημείο του I.

(α΄) Διατυπώστε το θεώρημα Darboux για την παράγωγο της f στο διάστημα I. Αν τα πλευρικά όρια $f'(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ και $f'(x_0+) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ υπάρχουν, είναι δυνατόν να είναι

$$f'(x_0-) < f'(x_0) < f'(x_0+)\,;$$

Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (0,8 μον.)

(β΄) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι η f είναι γνήσια μονότονη στο I. (0,8 μον.)

(γ΄) Έστω $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ και $f(x_0) = f'(x_0) = 1$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$F(x) := \int_1^{f(x)} e^{-t^2}\,dt$$

είναι γνήσια μονότονη στο διάστημα $f(I)$ και υπολογίστε την παράγωγο $(F^{-1})'(0)$, όπου F^{-1} η αντίστροφη της F. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) *Θεώρημα Darboux*: Αν $a, b \in I$ με $f'(a) \neq f'(b)$, τότε για κάθε c μεταξύ $f'(a)$ και $f'(b)$ υπάρχει ξ μεταξύ a και b, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = c$.

Έστω ότι $f'(x_0-) < f'(x_0) < f'(x_0+)$. Αν $f'(x_0-) < c < f'(x_0+)$ με $c \neq f'(x_0)$, από το θεώρημα Darboux θα πρέπει να υπάρχει $x \in I$ τέτοιο ώστε $c = f'(x)$ που είναι άτοπο. Επομένως δεν μπορεί να ισχύει $f'(x_0-) < f'(x_0) < f'(x_0+)$, δηλαδή η f' να έχει ασυνέχεια πρώτου είδους στο x_0.

(β΄) Θα αποδείξουμε ότι η f' διατηρεί το πρόσημο στο διάστημα I. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι για κάποια $x, y \in I$ είναι $f'(x) < 0 < f'(y)$, από το θεώρημα Darboux υπάρχει ξ μεταξύ των x και y με $f'(\xi) = 0$. Άτοπο, επειδή από την υπόθεση είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ και κατά συνέπεια $f'(\xi) \neq 0$. Επομένως θα είναι είτε $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in I$ ή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in I$. Άρα, είτε η f είναι γνήσια φθίνουσα στο I ή η f είναι γνήσια αύξουσα στο I.

(γ΄) Είναι

$$F'(x) = f'(x)e^{-f(x)^2} \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in I$$

και επομένως η F είναι γνήσια μονότονη στο διάστημα $f(I)$. Επειδή $F(x_0) = 0 \Leftrightarrow (F^{-1})(0) = x_0$, είναι

$$(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(x_0)} = \frac{e^{f(x_0)^2}}{f'(x_0)} = e\,.$$

■

Θ5. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{a\to 0} \int_0^2 \frac{\sqrt{4 + a^2x^3}}{4 + x^2}\, dx\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. <u>*1ος τρόπος*</u>. Επειδή οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{4 + a^2x^3}$ και $g(x) = \frac{1}{4+x^2}$ είναι θετικές και συνεχείς στο διάστημα $[0, 2]$, από το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα είναι

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{\sqrt{4 + a^2x^3}}{4 + x^2}\, dx &= \sqrt{4 + a^2\xi^3} \int_0^2 \frac{1}{2^2 + x^2}\, dx \\ &= \sqrt{4 + a^2\xi^3} \cdot \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=2} \\ &= \sqrt{4 + a^2\xi^3} \cdot \frac{1}{2} \arctan 1 = \frac{\pi}{8}\sqrt{4 + a^2\xi^3}\,,\end{aligned}$$

για κάποιο ξ με $0 \leq \xi \leq 2$. Όμως $\lim_{a\to 0} \sqrt{4 + a^2\xi^3} = 2$, οπότε

$$\lim_{a\to 0} \int_0^2 \frac{\sqrt{4 + a^2x^3}}{4 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

<u>*2ος τρόπος*</u>. Επειδή

$$\int_0^2 \left(\lim_{a\to 0} \frac{\sqrt{4 + a^2x^2}}{4 + x^2}\right) dx = \int_0^2 \frac{2}{4 + x^2}\, dx\,,$$

θεωρούμε τη διαφορά

$$\begin{aligned}\left| \frac{\sqrt{4 + a^2x^3}}{4 + x^2}\, dx - \int_0^2 \frac{2}{4 + x^2}\, dx \right| &= \int_0^2 \frac{\sqrt{4 + a^2x^3} - 2}{4 + x^2}\, dx \\ &\leq (\sqrt{4 + 8a^3} - 2) \int_0^2 \frac{1}{4 + x^2}\, dx \xrightarrow[a\to 0]{} 0\,.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\lim_{a\to 0}\int_0^2 \frac{\sqrt{4+a^2x^3}}{4+x^2}\,dx = \int_0^2 \frac{2}{2^2+x^2}\,dx = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

■

Επαναληπτική Εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

13 Σεπτεμβρίου, 2013

Θ1. Έστω A, B μη κενά άνω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών. Αν $\sup A < \sup B$, αποδείξτε ότι υπάρχει στοιχείο $\beta \in B$ που να είναι άνω φράγμα του συνόλου A. Ισχύει το συμέρασμα αν $\sup A \leq \sup B$; (1 μον.)

Λύση. Αν επιλέξουμε $\varepsilon = \sup B - \sup A > 0$, τότε από τον χαρακτηρισμό του supremum θα υπάρχει $\beta \in B$ τέτοιο ώστε

$$\beta > \sup B - \varepsilon = \sup B - \sup B + \sup A = \sup A\,.$$

Άρα $\beta > \alpha$, για κάθε $\alpha \in A$, δηλαδή το β είναι άνω φράγμα του A.

Αν η ανισότητα δεν είναι γνήσια, τότε δεν ισχύει το συμπέρασμα (μπορούμε για παράδειγμα να πάρουμε $A = [0,1)$ και $B = [1/2, 1)$). ■

Θ2. Έστω (α_ν) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών.

(α΄) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{2+\nu^2\alpha_\nu}$$

συγκλίνει. (1 μον.)

(β΄) Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ αποκλίνει, αποδείξτε ότι και η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_\nu}$$

θα αποκλίνει. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι

$$0 < \frac{\alpha_\nu}{2+\nu^2\alpha_\nu} < \frac{\alpha_\nu}{\nu^2\alpha_\nu} = \frac{1}{\nu^2}\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1/\nu^2\right)$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης για σειρές με θετικούς όρους και η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha_\nu}{2+\nu^2\alpha_\nu}$ θα συγκλίνει.

(β΄) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

– *Η ακολουθία (α_ν) είναι άνω φραγμένη*, δηλαδή υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $\alpha_\nu \le M$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_\nu} \ge \frac{\alpha_\nu}{2+M} = \frac{1}{2+M}\cdot\alpha_\nu\,,$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ και συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης για σειρές με θετικούς όρους και η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_\nu}$ θα αποκλίνει.

– *Η ακολουθία (α_ν) δεν είναι άνω φραγμένη.* Τότε υπάρχει υπακολουθία (α_{κ_ν}) της (α_ν) με

$$\lim_{\nu\to\infty}\alpha_{\kappa_\nu} = +\infty\,.$$

Επομένως

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\alpha_{\kappa_\nu}}{2+\alpha_{\kappa_\nu}} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2/\alpha_{\kappa_\nu}+1} = 1$$

και κατά συνέπεια $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty}\frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_\nu} \ne 0$. Άρα, από το κριτήριο απόκλισης η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_\nu}$ θα αποκλίνει.

■

Θ3. Έστω $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^1 στο $(0,\infty)$ και τέτοια ώστε $\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 1$.

(α΄) Αποδείξτε ότι υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } x \ge a \Rightarrow f'(x) > \frac{1}{2x}\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Υπολογίστε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή $\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 1$, για $\varepsilon = 1/2$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > M$ να ισχύει

$$|xf'(x) - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < xf'(x) < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2x} < f'(x) < \frac{3}{2x}\,.$$

Επομένως αν επιλέξουμε $a > M > 0$, τότε

$$\text{για κάθε } x \geq a \Rightarrow f'(x) > \frac{1}{2x}\,.$$

(β΄) Επειδή η f' είναι συνεχής στο $(0, \infty)$, από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \\ &\geq f(a) + \int_a^x \frac{1}{2t}\,dt && (f'(t) > \tfrac{1}{2t} \text{ για κάθε } t \geq a > 0) \\ &= f(a) + \frac{1}{2}(\ln x - \ln a) \\ &= f(a) + \frac{1}{2}\ln\frac{x}{a} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty \end{aligned}$$

και επομένως $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

■

Θ4. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^2 και τέτοια ώστε

$$f(x+y)f(x-y) \leq (f(x))^2\,, \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Αποδείξτε ότι

$$f(x)f''(x) \leq (f'(x))^2\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

(2 μον.)

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$, x σταθερό. Αν $y \neq 0$, από τον τύπο Taylor έχουμε

$$f(x+y) = f(x) + f'(x)y + \frac{f''(\zeta_y)}{2!}y^2\,, \quad \text{για κάποιο } \zeta_y \text{ μεταξύ } x \text{ και } x+y$$

και

$$f(x-y) = f(x) - f'(x)y + \frac{f''(\xi_y)}{2!}y^2\,, \quad \text{για κάποιο } \xi_y \text{ μεταξύ } x \text{ και } x-y\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω ισότητες κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε

$$(f(x))^2 - f(x)f'(x)y + f(x)\frac{f''(\xi_y)}{2}y^2 + f(x)f'(x)y - (f'(x))^2y^2 + f'(x)\frac{f''(\xi_y)}{2}y^3$$
$$+f(x)\frac{f''(\zeta_y)}{2}y^2 - f'(x)\frac{f''(\zeta_y)}{2}y^3 + \frac{f''(\zeta_y)f''(\xi_y)}{4}y^4 \le (f(x))^2\,.$$

Επομένως

$$f(x)\frac{f''(\xi_y)}{2}y^2+f'(x)\frac{f''(\xi_y)}{2}y^3+f(x)\frac{f''(\zeta_y)}{2}y^2-f'(x)\frac{f''(\zeta_y)}{2}y^3+\frac{f''(\zeta_y)f''(\xi_y)}{4}y^4 \le (f'(x))^2y^2$$

και διαιρώντας με y^2 έχουμε

$$f(x)\frac{f''(\xi_y)}{2} + f'(x)\frac{f''(\xi_y)}{2}y + f(x)\frac{f''(\zeta_y)}{2} - f'(x)\frac{f''(\xi_y)}{2}y + \frac{f''(\xi_y)f''(\zeta_y)}{4}y^2 \le (f'(x))^2\,.$$

Επειδή $\lim_{y\to 0}\zeta_y = \lim_{y\to 0}\xi_y = x$ και η f'' είναι συνεχής, παίρνοντας στην παραπάνω ανισότητα το $y \to 0$ τελικά προκύπτει ότι

$$f(x)\frac{f''(x)}{2} + f(x)\frac{f''(x)}{2} \le (f'(x))^2 \Leftrightarrow f(x)f''(x) \le (f'(x))^2\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

■

Θ5. (α΄) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ ορισμένη στο διάστημα $[1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ και έστω $P = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ διαμέριση του $[1, n]$. Υπολογίστε το κάτω άθροισμα $L(f, P)$, το άνω άθροισμα $U(f, P)$ της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P και αποδείξτε ότι

$$n - 1 + \ln(n-1)! \le n \ln n \le n - 1 + \ln n!\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\,, \quad \text{για κάθε } x > -1 \text{ και } f(0) = \frac{\pi}{2}\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή η $f(x) = \ln x$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση στο στο διάστημα $[1, n]$, έχουμε

$$\begin{aligned} L(f,P) &= (2-1)\ln 1 + (3-2)\ln 2 + \cdots + (n-(n-1))\ln(n-1) \\ &= \ln 2 + \cdots + \ln(n-1) = \ln(n-1)! \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} U(f,P) &= (2-1)\ln 2 + (3-2)\ln 3 + \cdots + (n-(n-1))\ln n \\ &= \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n = \ln n!\,. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\int_1^n \ln x\,dx = \left. x\ln x\right|_{x=1}^{x=n} - \int_1^n dx = n\ln n - n + 1\,.$$

Όμως

$$L(f,P) \le \int_1^n \ln x\,dx \le U(f,P)$$

και επομένως

$$\ln(n-1)! \le n\ln n - n + 1 \le \ln n! \Leftrightarrow n - 1 + \ln(n-1)! \le n\ln n \le n - 1 + \ln n!\,.$$

(β΄) Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού για κάθε $x > -1$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x \frac{1}{(t+2)\sqrt{t+1}}\,dt \\ &= \int_1^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{(u^2+1)u} 2u\,du \qquad (\text{αντικατάσταση } u = \sqrt{t+1} \Leftrightarrow t = u^2 - 1) \\ &= 2\,\arctan u\Big|_{u=1}^{u=\sqrt{x+1}} \\ &= 2(\arctan\sqrt{x+1} - \arctan 1) \\ &= 2\left(\arctan\sqrt{x+1} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\arctan\sqrt{x+1} - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

και επομένως $f(x) = 2\arctan\sqrt{x+1}$.

■

2.4 Ακαδημαϊκό έτος 2011–12

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

8 Μαρτίου, 2012

Θ1. (α΄) Έστω A, B μη κενά σύνολα πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x \leq y$, για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$. Να δείξετε ότι $\inf B \geq x$, για κάθε $x \in A$. (1 μον.)

(β΄) Έστω (α_ν) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = \rho < 1\,.$$

Δείξτε ότι $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $\inf B < x$, για κάποιο $x \in A$, τότε επιλέγοντας $\varepsilon = x - \inf B > 0$, από το χαρακτηρισμό του infimum θα υπάρχει $y \in B$ τέτοιο ώστε

$$y < \inf B + \varepsilon = x$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\inf B \geq x$, για κάθε $x \in A$.

(β΄) Από την υπόθεση, για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} < \rho + \varepsilon = \lambda < 1 \text{ για κάθε } \nu \geq \nu_0\,.$$

Επομένως

$$0 \leq |\alpha_\nu| < \lambda^\nu \text{ για κάθε } \nu \geq \nu_0\,.$$

Αφού $0 < \lambda < 1$, είναι $\lim_{\nu\to\infty} \lambda^\nu = 0$ και κατά συνέπεια $\lim_{\nu\to\infty} |\alpha_\nu| = 0$. Το τελευταίο όμως συνεπάγεται ότι $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0$

■

Θ2. (α΄) Έστω (α_ν) και (β_ν) ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=+\infty\,.$$

Δείξτε ότι αν η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ αποκλίνει, τότε αποκλίνει και η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$. (1 μον.)

(β΄) Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά, κέντρου 0, τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^3}\,,\qquad |x|<1\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Έστω $M>0$. Τότε από τον ορισμό του ορίου υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}>M \text{ για κάθε } \nu\geq\nu_0\,.$$

Επομένως,

$$\alpha_\nu>M\beta_\nu \text{ για κάθε } \nu\geq\nu_0\,.$$

Επειδή η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu=+\infty$ αποκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu=+\infty$ θα αποκλίνει.

(β΄) Έχουμε, χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά και το θεώρημα για την παραγώγιση όρο προς όρο δυναμοσειρών, ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^3}&=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)'\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)''\\&=\frac{1}{2}\left(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots\right)''\\&=\frac{1}{2}\left(-1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+\cdots\right)'\\&=1-3x+6x^2-10x^3+\cdots\,,\qquad |x|<1\,.\end{aligned}$$

■

Θ3. Έστω η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$.

(α΄) Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι φραγμένη. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $x_n \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$|f(x_n)| > n \,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες αποδείξτε ότι η παραπάνω υπόθεση οδηγεί σε άτοπο. Επομένως η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$. (1 μον.)

(β΄) Έστω $f(x_0) > 0$, όπου $x_0 \in (a, b)$. Αποδείξτε οτι υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b] \text{ να ισχύει } \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2} \,. \tag{2.7}$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0 \,.$$

Αν υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$, χρησιμοποιώντας τη (2.7) αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0 \,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Να συμπεράνετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Η ακολουθία (x_n) σημείων του $[a, b]$ είναι φραγμένη και επομένως από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) με $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x$. Είναι $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και κατά συνέπεια το $x \in [a, b]$. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, από το θεώρημα μεταφοράς

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_{k_n}\right) = f(x) \,.$$

Δηλαδή η ακολουθία $\left(f\left(x_{k_n}\right)\right)$ συγκλίνει και κατά συνέπεια θα είναι φραγμένη. Όμως από την υπόθεση είναι

$$|f(x_{k_n})| > k_n \geq n \,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} \left|f\left(x_{k_n}\right)\right| = \infty$, δηλαδή η ακολουθία $\left(f\left(x_{k_n}\right)\right)$ δεν είναι φραγμένη. Άτοπο. Επομένως η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.

(β΄) Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 \in (a,b)$, για $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in [a,b]$ με $|x - x_0| < \delta_1$, δηλαδή $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, να ισχύει

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}\,.$$

Αν πάρουμε το $\delta < \delta_1$ αρκετά μικρό έτσι ώστε $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a,b]$, τότε

$$\text{για κάθε } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a,b] \text{ θα είναι } \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}\,.$$

Εφαρμογή. Αν υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$, χρησιμοποιώντας τη (2.7) έχουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,dx = \delta f(x_0) > 0\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Επομένως $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, θα είναι $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ και $f(b) = \lim_{x\to b^-} f(x) = 0$. Άρα, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

■

Θ4. (α΄) Διατυπώστε το θεώρημα Taylor. Στον τύπο Taylor δείξτε ποιο είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού n ($n \in \mathbb{N}$) και ποιο το υπόλοιπο. Δώστε και τις δύο μορφές του υπολοίπου. Ποιο θεώρημα χρησιμοποιείται για την απόδειξη του τύπου Taylor; (1 μον.)

(β΄) Εφαρμόστε τον τύπο Maclaurin για τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$ και αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots - \frac{1}{2k}x^{2k} < \ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\,. \qquad (2.8)$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) **Θεώρημα Taylor**: Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ της οποίας οι παράγωγοι $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και η $f^{(n+1)}$ υπάρχει στο (a,b). Αν $x_0 \in [a,b]$, τότε για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει ξ μεταξύ x_0 και x τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)\,, \qquad \text{(τύπος Taylor)}$$

όπου

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \text{ είναι } \textbf{το πολυώνυμο Taylor βαθμού } n$$

και $R_n(x)$ είναι το **υπόλοιπο** με

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \text{(Lagrange)}$$

ή

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)\,. \qquad \text{(Cauchy)}$$

Για την απόδειξη του τύπου Taylor με το υπόλοιπο κατά Lagrange χρησιμοποιείται το "γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής". Για την απόδειξη του ίδιου τύπου με το υπόλοιπο κατά Cauchy χρησιμοποιείται το κλασικό θεώρημα μέσης τιμής (για τις αποδείξεις παραπέμπουμε στο [27]).

(β΄) Θα εφαρμόσουμε τον τύπο Maclaurin(τύπος Taylor με $x_0 = 0$)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\,,$$

όπου ξ μεταξύ 0 και x. Παρατηρούμε ότι η n-οστή παράγωγος της $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$, είναι

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\,.$$

Κατά συνέπεια

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \quad \text{και} \quad \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = (-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}\,.$$

Επομένως, αν $x > 0$

$$\ln(1+x) = \underbrace{x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n}_{P_n(x)} + \underbrace{(-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}}_{R_n(x)}\,, \qquad (2.9)$$

για κάποιο ξ με $0 < \xi < x$.

(i) Αν $n = 2k$ είναι άρτιος, τότε $R_{2k}(x) > 0$ και από τη (2.9) προκύπτει η αριστερή ανισότητα της (2.8).

(ii) Αν $n = 2k+1$ είναι περιττός, τότε $R_{2k+1}(x) < 0$ και από τη (2.9) προκύπτει η δεξιά ανισότητα της (2.8).

■

Θ5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^x \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η λύση της εξίσωσης

$$\int_1^x \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt = \frac{\pi}{24}$$

είναι $x = 2\sqrt{3}-1$. (1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt &= \int_1^x \frac{1}{(t+1)^2+2^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)\Bigg|_{t=1}^{t=x} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan 1 \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{\pi}{8}\,.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{t^2+2t+5}\,dt = \frac{\pi}{24} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{24} \\
&\Leftrightarrow \quad \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{2} = \tan\frac{\pi}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{2} = \sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow \quad x = 2\sqrt{3}-1\,.
\end{aligned}$$

■

Επαναληπτική Εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

5 Οκτωβρίου, 2012

Θ1. Έστω A, B μη κενά άνω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών. Αν $\sup A < \sup B$, αποδείξτε ότι υπάρχει στοιχείο $\beta \in B$ που να είναι άνω φράγμα του συνόλου A. Ισχύει το συμέρασμα αν $\sup A \leq \sup B$; (1 μον.)

Λύση. Αν επιλέξουμε $\varepsilon = \sup B - \sup A > 0$, τότε από τον χαρακτηρισμό του supremum θα υπάρχει $\beta \in B$ τέτοιο ώστε

$$\beta > \sup B - \varepsilon = \sup B - \sup B + \sup A = \sup A\,.$$

Άρα $\beta > \alpha$, για κάθε $\alpha \in A$, δηλαδή το β είναι άνω φράγμα του A.

Αν η ανισότητα δεν είναι γνήσια, τότε δεν ισχύει το συμπέρασμα (μπορούμε για παράδειγμα να πάρουμε $A = [0,1)$ και $B = [1/2,1)$). ■

Θ2. Έστω (α_ν) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών.

(α΄) Αποδείξτε ότι η σειρά
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{2+\nu^2\alpha_\nu}$$
συγκλίνει. (1 μον.)

(β΄) Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ αποκλίνει, αποδείξτε ότι και η σειρά
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_\nu}$$
θα αποκλίνει. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι
$$0 < \frac{\alpha_\nu}{2+\nu^2\alpha_\nu} < \frac{\alpha_\nu}{\nu^2\alpha_\nu} = \frac{1}{\nu^2}\,.$$
Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1/\nu^2\right)$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης για σειρές με θετικούς όρους και η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{2+\nu^2\alpha_\nu}$ θα συγκλίνει.

(β΄) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

– *Η ακολουθία* (α_ν) *είναι άνω φραγμένη*, δηλαδή υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $\alpha_\nu \le M$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Τότε

$$\frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_\nu} \ge \frac{\alpha_\nu}{2+M} = \frac{1}{2+M} \cdot \alpha_\nu \,,$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ και συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης για σειρές με θετικούς όρους και η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_\nu}$ θα αποκλίνει.

– *Η ακολουθία* (α_ν) *δεν είναι άνω φραγμένη.* Τότε υπάρχει υπακολουθία (α_{κ_ν}) της (α_ν) με

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_{\kappa_\nu} = +\infty \,.$$

Επομένως

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\alpha_{\kappa_\nu}}{2+\alpha_{\kappa_\nu}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2/\alpha_{\kappa_\nu}+1} = 1$$

και κατά συνέπεια $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty} \frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_\nu} \ne 0$. Άρα, από το κριτήριο απόκλισης η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{2+\alpha_\nu}$ θα αποκλίνει.

■

Θ3. (α΄) Διατυπώστε το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες και το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις.

(0,5 μον.)

(β΄) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$f(x_n) = \frac{2}{n^2} \,.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. (0,8 μον.)

(γ΄) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $g(r) = 0$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, είναι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (0,7 μον.)

Λύση.

(α΄) **Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες**: Κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις: Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$.

(β΄) Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και επομένως από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) με $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$. Είναι $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και κατά συνέπεια το $x_0 \in [a, b]$. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{k_n^2} = 0\,.$$

(γ΄) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι σύνολο πυκνό στο $\mathbb{R}$, υπάρχει ακολουθία (r_n) ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $r_n \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

$$x - \frac{1}{n} < r_n < x + \frac{1}{n}\,.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Επειδή η g είναι συνεχής συνάρτηση, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(r_n) = 0\,.$$

Άρα, $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

■

Θ4. Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f είναι από δεξιά παραγωγίσιμη στο a και $f'_+(a) = \lambda$(δηλαδή, $f'_+(a) = f'(a+)$). (1 μον.)

Λύση. Επειδή $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lambda$,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0, \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } x \text{ με } a < x < a + \delta \leq b \text{ είναι } |f'(x) - \lambda| < \varepsilon\,. \tag{2.10}$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής για κάθε $t \in (a, a + \delta)$ υπάρχει $\xi \in (a, t)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(\xi)\,.$$

Επομένως, από τη (2.10) για $x = \xi$ προκύπτει ότι

$$\text{για κάθε } t \in (a, a + \delta)\,, \quad \left|\frac{f(t) - f(a)}{t - a} - \lambda\right| < \varepsilon\,.$$

Δηλαδή $f'_+(a) = \lim_{t\to a^+} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \lambda$. Άρα, η δεξιά παράγωγος της f στο a υπάρχει και ισούται με λ. ■

Θ5. Έστω I ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και γνήσια μονότονη συνάρτηση.

(α΄) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$ και $f'(x_0) \neq 0$, δείξτε ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και ισχύει

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Αν η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = (1+x^3)^{-1/2}$ για κάθε $x \in I = (-1,\infty)$, δείξτε ότι η αντίστροφη συνάρτηση $g = f^{-1}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$g''(x) = \frac{3}{2}g(x)^2\,, \quad \text{για κάθε } x \in f(I)\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Πρέπει να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h}$$

υπάρχει και ισούται με $1/f'(x_0)$. Παίρνουμε το h αρκετά μικρό, $h \neq 0$, έτσι ώστε το $y_0 + h$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f^{-1}(δηλαδή στο πεδίο τιμών της f). Επειδή η f είναι $1-1$, υπάρχει **μοναδικό** $t \neq 0$ τέτοιο ώστε $y_0 + h = f(x_0+t)$. Επομένως,

$$h = f(x_0+t) - y_0 = f(x_0+t) - f(x_0)$$

και

$$x_0 + t = f^{-1}(y_0+h), \text{ οπότε } t = f^{-1}(y_0+h) - x_0 = f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)\,.$$

Ως γνωστόν η f^{-1} είναι συνεχής και επομένως $\lim_{h\to 0}[f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)] = 0$. Δηλαδή το $t \to 0$ καθώς το $h \to 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} &= \lim_{t\to 0} \frac{t}{f(x_0+t) - f(x_0)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.\end{aligned}$$

Άρα, η παράγωγος $(f^{-1})'(y_0)$ υπάρχει και ισούται με $1/f'(x_0)$.

(β΄) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, \infty)$, η f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $I = (-1, \infty)$. Για κάθε $x \in f(I)$ έχουμε

$$\begin{aligned} g'(x) = (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \text{(από το (α΄))} \\ &= \left\{1 + [f^{-1}(x)]^3\right\}^{1/2} \end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{3}{2} \frac{[f^{-1}(x)]^2 (f^{-1})'(x)}{\{1 + [f^{-1}(x)]^3\}^{1/2}} \\ &= \frac{3}{2}[f^{-1}(x)]^2 = \frac{3}{2} g(x)^2 \,. \end{aligned}$$

■

Θ6. (α΄) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\, dx \,.$$

(1 μον.)

(β΄) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $a, b > 0$, χρησιμοποιώντας το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, αποδείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \,.$$

(1 μον.)

(γ΄) Αποδείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|\, dt$ συγκλίνει και ισούται με 1.

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\, dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(t^2+1)t} 2t\, dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = t^2 + 1\text{)} \\ &= 2 \arctan t \big|_{t=1}^{t=\sqrt{3}} \\ &= 2(\arctan \sqrt{3} - \arctan 1) \\ &= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} \,. \end{aligned}$$

(β΄) Για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό τα $a\varepsilon, b\varepsilon \in (0,1)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και η $g(x) = 1/x$ είναι θετική και συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα τα $a\varepsilon$, $b\varepsilon$, από το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα(παραπέμπουμε στο [27]) είναι

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx = f(\xi(\varepsilon)) \cdot \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{x}\, dx = f(\xi(\varepsilon))\,(\ln b\varepsilon - \ln a\varepsilon) = f(\xi(\varepsilon)) \ln \frac{b}{a}\,, \qquad (2.11)$$

για κάποιο $\xi(\varepsilon) \in [a\varepsilon, b\varepsilon]$ αν $a < b$ ή $\xi(\varepsilon) \in [b\varepsilon, a\varepsilon]$ αν $b < a$. Επειδή η f είναι συνεχής και $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \xi(\varepsilon) = 0$, θα είναι $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(\xi(\varepsilon)) = f(0)$. Άρα, από τη (2.11) έχουμε

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}\,.$$

(γ΄) Για κάθε $x \in (0,1)$

$$\int_x^1 |\ln t|\, dt = -\int_x^1 \ln t\, dt = -\, t \ln t|_{t=x}^{t=1} + \int_x^1 \, dt = x \ln x + 1 - x$$

(παραγοντική ολοκλήρωση)

και επομένως

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\ln t|\ dt &= \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 |\ln t|\, dt \\
&= \lim_{x\to 0^+} (x \ln x + 1 - x) \\
&= \lim_{x\to 0^+} x \ln x + 1 \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} + 1 \\
&= -\lim_{x\to 0^+} x + 1 && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 |\ln t|\, dt$ συγκλίνει και ισούται με 1.

■

2.5 Ακαδημαϊκό έτος 2010–11

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

24 Φεβρουαρίου, 2011

Θ1. (α΄) Έστω A, B μη κενά κάτω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν $\inf A < \inf B$, τότε υπάρχει στοιχείο $\alpha \in A$ που να είναι κάτω φράγμα του συνόλου B. Ισχύει το συμπέρασμα αν $\inf A \leq \inf B$; (1,2 μον.)

(β΄) Να δείξετε ότι το σύνολο

$$\Gamma = \left\{ \frac{\mu}{\ln \nu} : \mu \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \right\}$$

είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν επιλέξουμε $\varepsilon = \inf B - \inf A > 0$, τότε από τον χαρακτηρισμό του infimum θα υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε

$$\alpha < \inf A + \varepsilon = \inf A + (\inf B - \inf A) = \inf B\,.$$

Άρα $\beta > \alpha$, για κάθε $\beta \in B$, δηλαδή το α είναι κάτω φράγμα του B.

Αν η ανισότητα δεν είναι γνήσια, δηλαδή $\inf A \leq \inf B$, τότε δεν ισχύει το συμπέρασμα (μπορούμε για παράδειγμα να πάρουμε $A = B = (0, 1]$).

(β΄) *1ος τρόπος*. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$, με $x < y$. Υποθέτουμε ότι $x > 0$ και επιλέγουμε ένα $\nu \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, έτσι ώστε

$$\frac{1}{\ln \nu} < y - x\,.$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό μ έτσι ώστε

$$\frac{\mu}{\ln \nu} > x\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{\mu - 1}{\ln \nu} \leq x\,.$$

Τότε,

$$\frac{\mu}{\ln \nu} \leq x + \frac{1}{\ln \nu} < x + (y - x) = y$$

και επομένως

$$x < \frac{\mu}{\ln \nu} < y\,.$$

Αν $x < 0 < y$, μπορούμε να πάρουμε $\mu = 0$. Τέλος αν $x < y < 0$, τότε $0 < -y < -x$ και από το πρώτο μέρος της απόδειξης, θα υπάρχουν $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$, $\nu \neq 1$, τέτοια ώστε

$$-y < \frac{\mu}{\ln \nu} < -x \Leftrightarrow x < \frac{-\mu}{\ln \nu} < y\,.$$

Άρα το σύνολο

$$\Gamma = \left\{ \frac{\mu}{\ln \nu} : \mu \in \mathbb{Z},\, \nu \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \right\}$$

είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία (x_ν) στοιχείων του συνόλου Γ με

$$x_\nu = \frac{[x \ln \nu]}{\ln \nu}\,, \qquad \nu \geq 2\,,$$

όπου $[x \ln \nu]$ είναι το ακέραιο μέρος του $x \ln \nu$. Επειδή ως γνωστόν

$$x \ln \nu - 1 < [x \ln \nu] \leq x \ln \nu\,,$$

διαιρώντας με $\ln \nu$ παίρνουμε

$$x - \frac{1}{\ln \nu} < x_\nu \leq x\,.$$

Επομένως, από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι $\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = x$. Επειδή κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι όριο ακολουθίας στοιχείων του Γ, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο Γ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

■

Θ2. Έστω $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 5$ και $|\lambda| < 1$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \lambda^\nu$ συγκλίνει και στη συνέχεια υπολογίστε το άθροισμά της.

(1,5 μον.)

Λύση. Επειδή $\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu=+\infty$, είναι

$$\left|\frac{\alpha_{\nu+1}\lambda^{\nu+1}}{\alpha_\nu\lambda^\nu}\right|=|\lambda|\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right|=|\lambda|\left|\frac{\alpha_\nu+5}{\alpha_\nu}\right|=|\lambda|\left|1+\frac{5}{\alpha_\nu}\right|\xrightarrow[\nu\to+\infty]{}|\lambda|<1$$

και από το κριτήριο λόγου η σειρά συγκλίνει. Επειδή η σειρά συγκλίνει, από γνωστό κριτήριο έπεται ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu\lambda^\nu=0\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned} s_\nu &= \alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+\cdots+\alpha_{\nu-1}\lambda^{\nu-1}\\ \Rightarrow \lambda s_\nu &= \lambda\alpha_0+\alpha_1\lambda^2+\cdots+\alpha_{\nu-1}\lambda^\nu\,. \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε ότι

$$(1-\lambda)s_\nu=\alpha_0+(\alpha_1-\alpha_0)\,\lambda+(\alpha_2-\alpha_1)\,\lambda^2+\cdots+(\alpha_{\nu-1}-\alpha_{\nu-2})\,\lambda^{\nu-1}-\alpha_{\nu-1}\lambda^\nu\,.$$

Δηλαδή

$$(1-\lambda)s_\nu=\alpha_0+5\lambda\left(1+\lambda+\lambda^2+\cdots+\lambda^{\nu-2}\right)-\alpha_{\nu-1}\lambda^\nu\,.$$

Συνεπώς, περνώντας στο όριο και στα δύο μέλη έχουμε ότι

$$(1-\lambda)\lim_{\nu\to+\infty}s_\nu=\alpha_0+5\lambda\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{k=0}^{\nu-2}\lambda^k-\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_{\nu-1}\lambda^\nu\,.$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψην ότι $|\lambda|<1$ (και άρα η γεωμετρική σειρά συγκλίνει) καθώς και το ότι $\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu\lambda^\nu=0$, έχουμε

$$(1-\lambda)\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\lambda^\nu=\alpha_0+5\lambda\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^\nu\,.$$

Άρα,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\lambda^\nu=\frac{\alpha_0}{1-\lambda}+\frac{5\lambda}{(1-\lambda)^2}\,.$$

■

Θ3. Αν η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, να αποδειχθεί ότι και η $|f|$ θα είναι συνεχής στο $[a,b]$. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης g η οποία να είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $[a,b]$, ενώ η $|g|$ να είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[a,b]$. (1 μον.)

Λύση. Έστω η f είναι συνεχής και έστω $x_0 \in [a,b]$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [a,b]$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Επειδή ως γνωστόν ισχύει η ανισότητα $||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$, τελικά έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [a,b]$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $||f(x)| - |f(x_0)|| < \varepsilon$. Δηλαδή η $|f|$ είναι συνεχής στο x_0.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση g με

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}\,, \\ -1 & \text{αν } x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Η g είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $[a,b]$, ενώ $|g(x)| = 1$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επομένως η $|g|$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[a,b]$. ■

Θ4. (α΄) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ και } f'(x) \leq -\frac{1}{1+x^2} \text{ για κάθε } x > 0\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \arctan(1/x)$ για κάθε $x > 0$. (1 μον.)

(β΄) Διατυπώστε το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες και το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις.

Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$. Αν οι συναρτήσεις f, f' δεν έχουν καμία κοινή ρίζα στο διάστημα $[a,b]$, να αποδειχθεί ότι το σύνολο των ριζών της f στο διάστημα $[a,b]$ είναι πεπερασμένο.

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $g(x) := f(x) - \arctan(1/x)$, η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x) = f'(x) - \frac{(1/x)'}{1+(1/x)^2} = f'(x) + \frac{1}{1+x^2} \leq 0\,, \quad \text{για κάθε } x > 0\,.$$

Επομένως η g είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$. Επίσης έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - \lim_{x\to+\infty} \arctan\frac{1}{x} = 0\,.$$

Άρα $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \arctan(1/x)$ για κάθε $x > 0$.

(β΄) **Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες**: Κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις: Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$.

Έστω $Z(f) := \{x \in [a,b] : f(x) = 0\}$ το σύνολο των ριζών της f στο διάστημα $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $Z(f)$ δεν είναι πεπερασμένο. Τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) ξένων ανά δύο στοιχείων του συνόλου $Z(f)$. Είναι $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και επομένως από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) με $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = c$. Είναι $a \le x_{k_n} \le b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και κατά συνέπεια το $c \in [a,b]$. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, από το θεώρημα μεταφοράς $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(c)$. Όμως $f(x_{k_n}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ οπότε και $f(c) = 0$, δηλαδή το c είναι ρίζα της f.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $c \in [a,b]$ και επομένως

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\,.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = c$, από το θεώρημα μεταφοράς για το όριο συνάρτησης έχουμε

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{k_n}) - f(c)}{x_{k_n} - c} = 0\,.$$

Επομένως $f(c) = f'(c) = 0$, δηλαδή το $c \in [a,b]$ είναι μία κοινή ρίζα των f και f'. Άτοπο. Άρα, το σύνολο των ριζών της f στο διάστημα $[a,b]$ είναι πεπερασμένο.

■

Θ5. (α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{2 - x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\tan\theta + 1}\,d\theta = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8}\,.$$

(1,5 μον.)

(β΄) Αν $n \in \mathbb{N}$, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{n \arcsin\left(x/2\right)}{x+n}\, dx\,.$$

Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}\, dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta}\, d\theta \\
&\qquad \text{(αντικατάσταση } x=\sqrt{2}\sin\theta \Leftrightarrow \theta=\arcsin(x/\sqrt{2}),\ 0\le\theta\le\pi/4\text{)} \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\tan\theta+1}\, d\theta \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1+t)\left(1+t^2\right)}\, dt \\
&\qquad \text{(αντικατάσταση } t=\tan\theta \Leftrightarrow \theta=\arctan t,\ 0\le\theta\le\pi/4\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{1+t}+\frac{-t+1}{1+t^2}\right] dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+t\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\arctan t\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{4}\ln 2+\frac{\pi}{8}\,.
\end{aligned}$$

(β΄) *1ος τρόπος*. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\sqrt{3}} \frac{n\arcsin(x/2)}{x+n}\, dx - \int_0^{\sqrt{3}} \arcsin(x/2)\, dx\right| &= \left|\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\arcsin(x/2)}{x+n}\, dx\right| \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\arcsin(x/2)}{x+n}\, dx \\
&\le \frac{\sqrt{3}\pi}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x+n}\, dx \\
&\le \frac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{n\arcsin(x/2)}{x+n}\, dx = \int_0^{\sqrt{3}} \arcsin(x/2)\, dx\,.$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin(x/2)\,dx &= x\arcsin(x/2)\big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \\ &= \sqrt{3}\arcsin\left(\sqrt{3}/2\right) + \sqrt{4-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - 1\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{n\arcsin(x/2)}{x+n}\,dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - 1\,.$$

<u>*2ος τρόπος*</u>. Στο διάστημα $[0,\sqrt{3}]$ οι συναρτήσεις $f_n(x) = \frac{n}{x+n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι συνεχείς και η συνάρτηση $g(x) = \arcsin(x/2)$ είναι συνεχής και μη αρνητική. Επομένως, από το γεινικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{n\arcsin(x/2)}{x+n}\,dx &= \frac{n}{\xi_n+n}\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin(x/2)\,dx \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3} - 1\right)\frac{n}{\xi_n+n}\,, \quad \left(\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin(x/2)\,dx = \sqrt{3}\pi/3 - 1\right)\end{aligned}$$

για κάποιο ξ_n με $0 \le \xi_n \le \sqrt{3}$. Επειδή $0 \le \xi_n/n \le \sqrt{3}/n$, είναι

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\xi_n}{n} = 0$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{n\arcsin(x/2)}{x+n}\,dx = \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3} - 1\right)\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\xi_n/n+1} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - 1\,.$$

■

Επαναληπτική Εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

31 Οκτωβρίου, 2011

Θ1. Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $0 \notin A$, $\inf A = 0$ και ότι το σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο. Ορίζουμε το σύνολο B ως εξής

$$B = \left\{\frac{3x}{3x+1} \,:\, x \in A\right\}.$$

Να αποδείξετε ότι $\inf B = 0$ και $\sup B = 1$. Έχει το B μέγιστο, ελάχιστο στοιχείο;

(1,5 μον.)

Λύση. Παρατηρούμε ότι σύνολο B είναι κάτω φραγμένο από το 0 και άνω φραγμένο από το 1. Χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό των inf και sup, θα δείξουμε ότι $\inf B = 0$ και $\sup B = 1$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε αφού $\inf A = 0$, υπάρχει $x \in A$, τέτοιο ώστε $x < \varepsilon/3$ και επομένως

$$\frac{3x}{3x+1} < 3x < \varepsilon\,.$$

Άρα $\inf B = 0$.

Επειδή το σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, μπορούμε να επιλέξουμε $x \in A$ τέτοιο ώστε

$$x > \frac{1}{3\varepsilon} - \frac{1}{3}\,.$$

Τότε

$$\frac{3x}{3x+1} > 1 - \varepsilon$$

και συνεπώς $\sup B = 1$.

Το B δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο αφού οι εξισώσεις

$$\frac{3x}{3x+1} = 0 \text{ και } \frac{3x}{3x+1} = 1$$

είναι αδύνατες στο B. ∎

Θ2. (α΄) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n}$. (1 μον.)

(β΄) Δίνεται η ακολουθία (b_n), $n \geq 0$, πραγματικών αριθμών με

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

Θέτουμε $a_n = b_{n-1} - b_{n+1}$, για $n \geq 1$. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Έχουμε ότι

$$5 < \sqrt[n]{3^n + 5^n} < \sqrt[n]{5^n + 5^n} = 5\sqrt[n]{2}\,.$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$(για κάθε $\alpha > 0$ είναι γνωστό ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$). Επομένως, από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = 5\,.$$

(β΄) Πρόκειται για τηλεσκοπική σειρά. Αν $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ είναι το N-οστό μερικό άθροισμα της σειράς, τότε

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N}(b_{n-1} - b_n) + \sum_{n=1}^{N}(b_n - b_{n+1}) \\ &= [(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_{N-2} - b_{N-1}) + (b_{N-1} - b_N)] \\ &\quad + [(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{N-1} - b_N) + (b_N - b_{N+1})] \\ &= [b_0 - b_N] + [b_1 - b_{N+1}] = b_0 + b_1 - b_N - b_{N+1}\,. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty}(b_0 + b_1 - b_N - b_{N+1}) = b_0 + b_1 - 2b\,.$$

■

Θ3. Υποθέτουμε ότι η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$ και ότι το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει, έστω $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη στο διάστημα $[a, \infty)$. (1 μον.)

Λύση. Επειδή $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > a$ τέτοιο ώστε $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$ για κάθε $x > M$. Ισοδύναμα,

$$\lambda - \varepsilon < f(x) < \lambda + \varepsilon \quad \text{για κάθε } x > M\,.$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, M]$, η f είναι φραγμένη. Έστω $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$c_1 < f(x) < c_2\,, \quad \text{για κάθε } x \in [a, M]\,.$$

Τότε

$$\min\{\lambda - \varepsilon,\, c_1\} < f(x) < \max\{\lambda + \varepsilon,\, c_2\}\,, \quad \text{για κάθε } x \in [a, \infty)\,.$$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι φραγμένη στο διάστημα $[a, \infty)$. ∎

Θ4. Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(a) > f'(b)$. Δείξτε ότι για κάθε $c \in (f'(b), f'(a))$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = c$.

Υπόδειξη. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) := f(x) - cx$ δεν μπορεί να πάρει τη μέγιστη τιμή της στα σημεία a, b. (1,5 μον.)

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) := f(x) - cx\,.$$

Τότε,

$$g'(a) = f'(a) - c > 0 \quad \text{και} \quad g'(b) = f'(b) - c < 0\,.$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ και επομένως θα παίρνει τη μέγιστη τιμή της για κάποιο $\xi \in [a, b]$.

Αν $\xi = a$, τότε για κάθε $h > 0$ με $a + h < b$ είναι $g(a + h) \leq g(a)$ και επομένως

$$g'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \leq 0\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Αν $\xi = b$, τότε για κάθε $h < 0$ με $b + h > a$ είναι $g(b + h) \leq g(b)$ και επομένως

$$g'(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(b+h) - g(b)}{h} \geq 0\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα, το $\xi \in (a, b)$ και το θεώρημα του Fermat συνεπάγεται ότι $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = c$. ∎

Θ5. (α΄) Υποθέτουμε ότι η φραγμένη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Αν

$$a_n = \left[\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n},$$

χρησιμοποιώντας το (α΄) αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2e^{(\pi - 4)/2}$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Έστω $P_n = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ακολουθία διαμερίσεων του διαστήματος $[0,1]$, όπου $x_k = k/n$, $0 \le k \le n$. Επειδή $x_k - x_{k-1} = k/n - (k-1)/n = 1/n$, είναι $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Αν $\xi = (\xi_k)_{k=1}^n$, με $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$ $(1 \le k \le n)$, τότε το άθροισμα του Riemann

$$S(f, P_n, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ .$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n, \xi) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ . \tag{2.12}$$

Αν επιλέξουμε το $\xi_k = k/n$, $1 \le k \le n$, τότε από τη (2.12) προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}\ln a_n &= \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\ .\end{aligned}$$

Επομένως, από το (α΄) έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\\ &= \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx\\ &= x\ln(1+x^2)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\ &= \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx\\ &= \ln 2 - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \ln 2 - 2 + 2\,\arctan x\Big|_{x=0}^{x=1}\\ &= \ln 2 - 2 + 2\arctan 1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\ln 2 - 2 + \pi/2} = 2e^{(\pi-4)/2}\,.$$

■

Θ6. Δείξτε ότι

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad x > 0$$

και στη συνέχεια υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{1/2}^{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) \arctan x \, dx\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$\left(\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1/x)'}{1+(1/x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0\,.$$

Επομένως $\arctan x + \arctan(1/x) = c$, για κάθε $x > 0$. Όμως για $x = 1$ είναι $\arctan 1 + \arctan 1 = 2\arctan 1 = \pi/2 = c$. Άρα $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$, για κάθε $x > 0$.

Είναι

$$\int_{1/2}^{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) \arctan x \, dx = \int_{2}^{1/2} \left(\frac{1}{t^2} + t^4\right) \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

(αντικατάσταση $x = 1/t$)

$$= \int_{1/2}^{2} \left(t^2 + \frac{1}{t^4}\right) \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{1/2}^{2} \left(t^2 + \frac{1}{t^4}\right) dt - \int_{1/2}^{2} \left(t^2 + \frac{1}{t^4}\right) \arctan t \, dt$$

($\arctan(1/t) = \pi/2 - \arctan t$)

και κατά συνέπεια

$$2\int_{1/2}^{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) \arctan x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_{1/2}^{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3x^3}\right)\Bigg|_{1/2}^{2} = \frac{21\pi}{8}\,.$$

Άρα

$$\int_{1/2}^{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) \arctan x \, dx = \frac{21\pi}{16}\,.$$

■

2.6 Ακαδημαϊκό έτος 2009–10

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

11 Φεβρουαρίου, 2010

Θ1. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x} & \text{αν } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

(α΄) Εξετάστε αν η συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ και υπολογείστε τα όρια $\lim_{x\to 0} f(x)$ και $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Είναι η f συνεχής στο 0; Ποιο είνα το πεδίο τιμών της f; Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας. (1,5 μον.)

(β΄) Έστω

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $y = F(x)$ είναι γνήσια μονότονη. Αν F^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της F, να υπολογιστεί η παράγωγος $\left(F^{-1}\right)'(0)$. (0,5 μον.)

(γ΄) Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά η συνάρτηση $y = \arctan x$ και να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Για $x \neq 0$ είναι

$$f'(x) = \frac{x/\left(1+x^2\right) - \arctan x}{x^2}\,.$$

Αν $g(x) = x/\left(1+x^2\right) - \arctan x$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \leq 0\,.$$

Δηλαδή η g είναι γνήσια φθίνουσα οπότε $g(x) \geq g(0) = 0$ για κάθε $x \leq 0$ και $g(x) \leq g(0) = 0$ για κάθε $x \geq 0$. Επομένως, $f'(x) > 0$ για κάθε $x < 0$ και $f'(x) < 0$

για κάθε $x > 0$. Άρα, η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $(0, \infty)$.

Είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1\,.$$

Επειδή $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\pi/2$, έχουμε

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0\,.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ και επομένως η f είναι συνεχής στο 0. Το πεδίο τιμών της f είναι το $(0, 1]$.

(β΄) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επομένως $F'(x) = f(x)$. Από το (α΄) έχουμε ότι $F'(x) > 0$, δηλαδή η F είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $F(1) = 0$, είναι

$$\left(F^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{\arctan 1} = \frac{4}{\pi}\,.$$

(γ΄) Επειδή $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$, $|t| < 1$, είναι $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$, για κάθε $|t| < 1$. Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Επομένως

$$\frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}\,, \quad |x| < 1\,,$$

οπότε

$$\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\, x^{2n+1}\,.$$

Επειδή η τελευταία δυναμοσειρά συγκλίνει για $x = 1$ (κριτήριο του Leibniz), τελικά έχουμε

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,dt = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\, x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\,.$$

■

Θ2. (α΄) Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(x) + 4\int_0^x (x-t)\, f(t)\; dt = 3\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(1,5 μον.)

(β΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης, το διάστημα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)\, x^{2n-2}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$f(x) = 3 - 4\int_0^x (x-t)\, f(t)\; dt = 3 - 4x\int_0^x f(t)\; dt + 4\int_0^x t f(t)\; dt\,.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = -4\int_0^x f(t)\; dt - 4xf(x) + 4xf(x) = -4\int_0^x f(t)\; dt\,.$$

Επίσης η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = -4f(x) \Leftrightarrow f''(x) + 4f(x) = 0\,.$$

Επομένως, οι συναρτήσεις $y = f(x)$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες και ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 3\,,\; y'(0) = 0\,.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της $y'' + 4y = 0$ είναι: $r^2 + 4 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \pm 2i$. Επομένως, η γενική λύση της $y'' + 4y = 0$ είναι

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Όμως $y(0) = 3$ συνεπάγεται ότι $c_1 = 3$, ενώ $y'(0) = 0$ συνεπάγεται ότι $c_2 = 0$. Άρα,

$$y = f(x) = 3\cos 2x\,.$$

(β΄) Αν $c_n = (-1)^{n-1} (2n-1)\, x^{2n-2}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n-1}\, |x|^{2-2/n} = x^2\,.$$

Επομένως, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

Για $x = \pm 1$ έχουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)$. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^{n-1}(2n-1)\right| = \lim_{n\to\infty} (2n-1) = \infty\,,$$

η σειρά αποκλίνει. Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = (-1, 1)$.

Έστω

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)\, x^{2n-2}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Τότε

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1}\right]' \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} x^{2n+1}\right]' \\ &= \left[x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} x^{2n}\right]' \\ &= \left[x \frac{1}{1+x^2}\right]' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,. \end{aligned}$$

■

Θ3. (α΄) Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, με $g(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [a,b]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = f(\xi) \int_a^b g(t)\, dt\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας το (α΄) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\sin^n t}{t^{n+1}}\, dt\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [27].

(β΄) <u>*1ος τρόπος*</u>. Αν

$$f(t)=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \quad \text{και} \quad g(t)=\frac{1}{t}\,, \quad t>0\,,$$

οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς και η g είναι θετική. Αν $x>0$, από το (α΄) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_x^{2x}\frac{\sin^n t}{t^{n+1}}\,dt &= \left(\frac{\sin\xi(x)}{\xi(x)}\right)^n\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt\\ &= \left(\frac{\sin\xi(x)}{\xi(x)}\right)^n(\ln 2x-\ln x)\\ &= \left(\frac{\sin\xi(x)}{\xi(x)}\right)^n\ln 2\,,\end{aligned}$$

για κάποιο $\xi(x)$, με $x\le\xi(x)\le 2x$. Επειδή $\lim_{x\to 0^+}\xi(x)=0$, είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin\xi(x)}{\xi(x)}\right)^n=\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^n=1\,. \qquad (\lim_{u\to 0^+}\tfrac{\sin u}{u}=1)$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{\sin^n t}{t^{n+1}}\,dt=\ln 2\,.$$

<u>*2ος τρόπος*</u>. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $y=\frac{\sin x}{x}$ είναι φθίνουσα και θετική στο διάστημα $(0,\pi)$. Επομένως, για κάθε $x\in(0,\pi/2)$ και $t\in[x,2x]$ είναι

$$0<\frac{\sin 2x}{2x}\le\frac{\sin t}{t}<1\,,\ \text{οπότε}\ \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^n\frac{1}{t}\le\frac{\sin^n t}{t^{n+1}}<\frac{1}{t}.$$

Ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[x,2x]$ έχουμε

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^n\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt\le\int_x^{2x}\frac{\sin^n t}{t^{n+1}}\,dt\le\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt\\ &\Leftrightarrow\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^n(\ln 2x-\ln x)\le\int_x^{2x}\frac{\sin^n t}{t^{n+1}}\,dt\le(\ln 2x-\ln x)\\ &\Leftrightarrow\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^n\ln 2\le\int_x^{2x}\frac{\sin^n t}{t^{n+1}}\,dt\le\ln 2\,.\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^n=1$, από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{\sin^n t}{t^{n+1}}\,dt=\ln 2\,.$$

■

Θ4. (α΄) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$(i)\quad\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{n}+\ln\frac{n-1}{n}\right)\quad\text{και}\quad(ii)\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n+n}\,.$$

(1,5 μον.)

(β΄) Να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_4^{\infty} \frac{3x+7}{2\sqrt{x}\,(x-1)\,(x+4)}\,dx$$

συγκλίνει και αν ναι να υπολογιστεί. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) (i) Για κάθε $n \geq 2$ είναι $a_n = \frac{2}{n} + \ln\frac{n-1}{n} = 2/n + \ln(1-1/n) > 0$. Αν $b_n = 1/n$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1-1/n)}{1/n} = 2 + \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-x)}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} 2 - \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x} = 1\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ αποκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{n} + \ln\frac{n-1}{n}\right)$ θα αποκλίνει.

(ii) Αν $a_n = n^2/\left(2^n + n\right)$, είναι

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}+n+1}\cdot\frac{2^n+n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{1+n/2^n}{2+n/2^n+1/2^n}\,.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{n\ln 2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x\ln 2}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x\ln 2}\ln 2} = 0\,,$$

είναι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} < 1\,.$$

Άρα, από το κριτήριο του λόγου(κριτήριο D'Alembert) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2/\left(2^n+n\right)\right)$ συγκλίνει.

(β΄) Επειδή

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+7)/2\sqrt{x}\,(x-1)\,(x+4)}{1/x^{3/2}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x}{2\,(x-1)\,(x+4)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{3+7/x}{2\,(1-1/x)\,(1+4/x)} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_4^{\infty}\left(1/x^{3/2}\right)\,dx$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_4^{\infty} \frac{3x+7}{2\sqrt{x}\,(x-1)\,(x+4)}\,dx$$

θα συγκλίνει. Είναι

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+7}{2\sqrt{x}\,(x-1)\,(x+4)}\,dx &= \int \frac{3t^2+7}{(t^2-1)\,(t^2+4)}\,dt \\
&\qquad\qquad \text{(αντικατάσταση } t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2\text{)} \\
&= \int \frac{3t^2+7}{(t-1)\,(t+1)\,(t^2+4)}\,dt \\
&= \int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt + \int \frac{1}{t^2+2^2}\,dt \\
&= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + c \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{x}}{2} + c\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_4^\infty \frac{3x+7}{2\sqrt{x}\,(x-1)\,(x+4)}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_4^R \frac{3x+7}{2\sqrt{x}\,(x-1)\,(x+4)}\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{R}-1}{\sqrt{R}+1}\right| + \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{R}}{2}\right) \\
&\qquad - \left(\ln\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\arctan 1\right) \\
&= \ln 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \ln 3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \ln 3\,.
\end{aligned}$$

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

8 Σεπτεμβρίου, 2010

Θ1. (α΄) Να αποδεχθεί ότι

$$n! \geq n^{n/2}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

και να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n!}\,.$$

(1,5 μον.)

(β΄) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνουσα σειρά θετικών όρων και έστω (u_n) ακολουθία με $u_1 > 0$ και

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ συγκλίνει. Συγκλίνει ή αποκλίνει η ακολουθία (u_n) και γιατί; (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Η ανισότητα για $n = 1$ είναι ισότητα. Αν $n! \geq n^{n/2}$, πρέπει να αποδείχθεί ότι $(n+1)! \geq (n+1)^{(n+1)/2}$. Είναι

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \geq n^{n/2}\,(n+1)\ .$$

Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι

$$\begin{aligned} n^{n/2}\,(n+1) \geq (n+1)^{(n+1)/2} &\Leftrightarrow n^{n/2} \geq (n+1)^{(n-1)/2} \\ &\Leftrightarrow n^n \geq (n+1)^{n-1} \\ &\Leftrightarrow (n+1) \geq (1+1/n)^n \\ &\Leftrightarrow \ln(n+1) \geq n\ln(1+1/n)\ . \end{aligned}$$

Όμως η τελευταία ανισότητα ισχύει. Πράγματι,

$$n\ln(1+1/n) \leq n\,(1/n) = 1 \leq \ln(n+1)\ , \quad \text{για κάθε } n \geq 2.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$0 \leq \frac{(\ln n)^n}{n!} \leq \frac{(\ln n)^n}{n^{n/2}}\,.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\ln n)^n}{n^{n/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^{1/2}} = 0 < 1\,,$$

από το κριτήριο της ρίζας (κριτήριο Cauchy) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left((\ln n)^n / n^{n/2}\right)$ συγκλίνει. Επομένως, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ((\ln n)^n / n!)$ θα συγκλίνει.

(β΄) Από τον ορισμό η (u_n) είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία θετικών όρων. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$0 < u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n\right) = \frac{a_n^2}{2\left(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} + u_n\right)} < \frac{1}{2} a_n\,.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n) \text{ θα συγκλίνει}\,.$$

Για κάθε $n \geq 2$ είναι

$$\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = (u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\cdots+(u_n-u_{n-1}) = u_n-u_1\,,$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_1 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = u_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(u_{k+1}-u_k)\ .$$

Άρα, η ακολουθία (u_n) συγκλίνει.

■

Θ2. Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - r^2y = 0\,,\quad r > 0\,, \tag{2.13}$$

με την αντικατάσταση $x = t^{-1}$ και $y = ut^{-1}$ στη μορφή

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \beta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \gamma u = 0\,.$$

Να υπολογιστούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.13) στο διάστημα $(0, \infty)$. (1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-u}{t^2}(-t^2) = u - t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u - t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u - t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - t\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\right)(-t^2) = t^3\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\,.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$t^{-1}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - r^2ut^{-1} = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} - r^2 u = 0\,. \tag{2.14}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2.14) είναι: $\rho^2 - r^2 = 0$ με ρίζες $\rho_{1,2} = \pm r$. Επομένως η γενική λύση της (2.14) είναι

$$u\left(t\right) = c_1 e^{-rt} + c_2 e^{rt}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.13) είναι

$$y\left(x\right) = x\left(c_1 e^{-r/x} + c_2 e^{r/x}\right)\,, \quad x > 0\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

Θ3. (α΄) Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0,1]$, να βρεθεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\left(k^2 + n^2\right)^{3/2}}\,.$$

(1,5 μον.)

(β΄) Αν η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f\left(x\right) \sin nx \, dx = 0\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\left(k^2 + n^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(k/n\right)^2}{\left(\left(k/n\right)^2 + 1\right)^{3/2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\,,$$

όπου $f\left(x\right) = x^2 / \left(x^2 + 1\right)^{3/2}$. Επομένως, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(k^2+n^2)^{3/2}} &= \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx \\ &= \int_0^1 x\left[-\left(x^2+1\right)^{-1/2}\right]'\,dx \\ &= -\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\ &\qquad\qquad\text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\end{aligned}$$

<u>*Σημείωση*</u>. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$ υπολογίζεται και με την αντικατάσταση $x = \tan\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

(β΄) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx &= -\frac{1}{n}\,f(x)\cos nx\big|_{x=a}^{x=b} + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\,dx \\ &= \frac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\,dx\,.\end{aligned}$$

Αν $M = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$ και $M' = \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|$, τότε

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right| &\le \frac{|f(a)\cos na - f(b)\cos nb|}{n} + \frac{1}{n}\left|\int_a^b f'(x)\cos nx\,dx\right| \\ &\le \frac{|f(a)|+|f(b)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b \left|f'(x)\right|\,dx \\ &\le \frac{2M}{n} + \frac{M'(b-a)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0\,.$$

■

Θ4. Έστω $a \neq 0$. Να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)(1+a^2x)}\,dx$$

συγκλίνει και αν ναι να υπολογιστεί. (1,5 μον.)

Λύση. Επειδή

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)(1+a^2x)}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+a^2x)}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{(1+x)(1+a^2x)}\,dx}_{I_2},$$

αρκεί να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2. Για κάθε $x \geq 1$ είναι

$$0 < \frac{1}{(1+x)(1+a^2x)} < \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{x^2}$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left(1/x^2\right)\,dx$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \left(1/\left(1+x\right)\left(1+a^2x\right)\right)\,dx$ θα συγκλίνει. Αν $a \neq \pm 1$ και $R > 0$, τότε

$$\begin{aligned}
\int_0^R \frac{1}{(1+x)(1+a^2x)}\,dx &= \frac{1}{1-a^2}\int_0^R \left[\frac{1}{1+x} - \frac{a^2}{1+a^2x}\right]dx \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left[\ln(1+x) - \ln(1+a^2x)\right]\Big|_{x=0}^{x=R} \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left[\ln(1+R) - \ln(1+a^2R)\right] \\
&= \frac{1}{1-a^2}\ln\left(\frac{1+R}{1+a^2R}\right).
\end{aligned}$$

Επομένως, για $a \neq \pm 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)(1+a^2x)}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{(1+x)(1+a^2x)}\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{1-a^2}\ln\left(\frac{1+R}{1+a^2R}\right) \\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{1-a^2}\ln\left(\frac{1/R+1}{1/R+a^2}\right) \\
&= \frac{1}{1-a^2}\ln\left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{2\ln|a|}{a^2-1}.
\end{aligned}$$

Αν $a = \pm 1$, τότε

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x} = 1.$$

Άρα,

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)(1+a^2x)}\,dx = \begin{cases} 2\ln|a|/(a^2-1) & \text{αν } a \neq \pm 1\,, \\ 1 & \text{αν } a = \pm 1\,. \end{cases}$$

■

Θ5. (α΄) Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά, να βρεθεί το ανάπτυγμα της συνάρτησης $y = \ln\left(1 - x^2\right)$ σε σειρά Maclaurin. (0,5 μον.)

(β΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης, το διάστημα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n+1)}\,.$$

Εφαρμογή. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}\,.$$

(2 μον.)

Λύση.

(α΄) Ως γνωστόν $1/(1-t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $|t| < 1$. Ολοκληρώνοντας, για $|x| < 1$ έχουμε

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\,dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,.$$

Επομένως,

$$\ln(1-x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\,, \quad |x| < 1\,.$$

(β΄) Αν $c_n = x^{2n}/n\,(2n+1)$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+3)}\cdot\frac{n(2n+1)}{x^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)}x^2 = x^2\,.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty}|c_{n+1}/c_n| < 1$, αν και μόνο αν $|x| < 1$. Δηλαδή, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

Για $x = \pm 1$ παίρνουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$. Είναι

$$0 < \frac{1}{n(2n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

και ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Επομένως, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$ θα συγκλίνει. Άρα, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = [-1, 1]$.

Αν $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n+1)}$, $|x| < 1$, τότε $xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$, $|x| < 1$, οπότε

$$(xf(x))' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n} = -\ln(1-x^2)\,, \quad |x| < 1\,.$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
xf(x) &= -\int_0^x \ln(1-t^2)\,dt \\
&= -\,t\ln(1-t^2)\big|_{t=0}^{t=x} - 2\int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}\,dt \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= -x\ln(1-x^2) + 2\int_0^x dt - 2\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt \\
&= -x\ln(1-x^2) + 2x - \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt \\
&= -x\ln(1-x^2) + 2x - \ln(1+x) + \ln(1-x) \\
&= 2x - (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)\,.
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$
f(x) = \begin{cases} 2 - \big(x^{-1}+1\big)\ln(1+x) + (x^{-1}-1)\ln(1-x) & \text{αν } |x|<1,\ x\neq 0 \\ 0 & \text{αν } x=0\,. \end{cases}
$$

Εφαρμογή. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$ συγκλίνει, είναι

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)} &= \lim_{x\to 1^-}\big[2 - (x^{-1}+1)\ln(1+x) + (x^{-1}-1)\ln(1-x)\big] \\
&= 2 - 2\ln 2 + \lim_{x\to 1^-}(x^{-1}-1)\ln(1-x) \\
&= 2 - 2\ln 2 + \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)}{(x^{-1}-1)^{-1}} \\
&= 2 - 2\ln 2 - \lim_{x\to 1^-}(1-x) \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= 2 - 2\ln 2\,.
\end{aligned}
$$

■

2.7 Ακαδημαϊκό έτος 2008–9

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

25 Φεβρουαρίου, 2009

Θ1. (α΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \quad \text{με } a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι $\sin x \le x$, για κάθε $x \ge 0$ και επομένως

$$0 < a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx \le \int_0^{1/n} \frac{x^3}{1+x}\,dx \le \int_0^{1/n} x^3\,dx = \frac{1}{4n^4}\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα συγκλίνει.

(β΄) Επειδή

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)\,,$$

είναι

$$\begin{aligned} S_N &= \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{N-1}} - \frac{1}{\sqrt{N}}\right) \right] \\ &\quad - \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{N+1}}\right) \right] \\ &= \left[1 - \frac{1}{\sqrt{N}}\right] - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{N+1}}\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

Άρα

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

■

Θ2. Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-x^3y=0\,, \tag{2.15}$$

με την αντικατάσταση $t=x^2$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της στο διάστημα $(0,\infty)$.

(1 μον.)

Λύση. Είναι

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot 2x=2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\\&=2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\\&=2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\&=2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4x^3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-x^3y=0$$

και ισοδύναμα

$$4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-y=0\,. \tag{2.16}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2.16) είναι: $4r^2-1=0$ με ρίζες $r_{1,2}=\pm 1/2$. Επομένως, η γενική λύση της (2.16) είναι

$$y^*\left(t\right)=c_1e^{-t/2}+c_2e^{t/2}\,,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.15) είναι

$$y\left(x\right)=c_1e^{-x^2/2}+c_2e^{x^2/2}\,,\quad x>0\,,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

■

Θ3. (α΄) Έστω η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική, δηλαδή $g(t + 2\pi) = g(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\ dt\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Έστω

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt\,, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,,$$

όπου η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική. Αν

$$B_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \sin nt\, dt\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

να αποδειχθεί ότι $B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) *1ος τρόπος*. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)\ dt &= \int_{-\pi+x}^{-\pi} g(t)\ dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\ dt + \int_{\pi}^{\pi+x} g(t)\ dt \\
&= -\int_{\pi}^{\pi+x} g(u - 2\pi)\ du + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\ dt + \int_{\pi}^{\pi+x} g(t)\ dt \\
&\hspace{6cm} (\text{αντικατάσταση } u = t + 2\pi) \\
&= -\int_{\pi}^{\pi+x} g(u)\ du + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\ dt + \int_{\pi}^{\pi+x} g(t)\ dt \\
&\hspace{6cm} (g(u - 2\pi) = g(u)) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\ dt\,.
\end{aligned}$$

2ος τρόπος. Αν

$$F(x) = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)\ dt = \int_{0}^{\pi+x} g(t)\ dt - \int_{0}^{-\pi+x} g(t)\ dt\,,$$

τότε

$$F'(x) = g(\pi + x) - g(-\pi + x) = g(\pi + x) - g(-\pi + x + 2\pi) = g(\pi + x) - g(\pi + x) = 0\,,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $F(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως $F(0) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt$ και κατά συνέπεια

$$F(x) = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nt\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(u)\sin n(u-x)\, du \qquad \text{(αντικατάσταση } u = x+t\text{)} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin n(u-x)\, du \\
&\qquad \text{(επειδή η συνάρτηση } g(u) := f(u)\sin n(u-x) \text{ είναι } 2\pi\text{-περιοδική)} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\sin nu\cos nx - \cos nu\sin nx\right)\, du \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\, du\right)\cos nx - \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nu\, du\right)\sin nx \\
&= b_n\cos nx - a_n\sin nx\,.
\end{aligned}$$

■

Θ4. (α΄) Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, με $g(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [a,b]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = f(\xi)\int_a^b g(t)\, dt\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έστω $a > 0$. Να υπολογιστεί το

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2(a+1)}}\int_0^{x^2} t^a f(t)\, dt\,.$$

(0,8 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [27].

(β΄) *1ος τρόπος*. Επειδή η συνάρτηση $g(t) = t^a$ είναι μη αρνητική και συνεχής στο διάστημα $\left[0, x^2\right]$, από το (α΄) έχουμε

$$\frac{1}{x^{2(a+1)}} \int_0^{x^2} t^a f(t)\, dt = \frac{f\left(\xi(x)\right)}{x^{2(a+1)}} \int_0^{x^2} t^a\, dt = \frac{f\left(\xi(x)\right)}{x^{2(a+1)}} \cdot \frac{x^{2(a+1)}}{a+1} = \frac{f\left(\xi(x)\right)}{a+1},$$

για κάποιο $\xi(x)$, με $0 \leq \xi(x) \leq x^2$. Επειδή $\lim_{x\to 0} \xi(x) = 0$ και η f είναι συνεχής, είναι $\lim_{x\to 0} f\left(\xi(x)\right) = f(0)$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2(a+1)}} \int_0^{x^2} t^a f(t)\, dt = \lim_{x\to 0} \frac{f\left(\xi(x)\right)}{a+1} = \frac{f(0)}{a+1}.$$

2ος τρόπος. Είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2(a+1)}} \int_0^{x^2} t^a f(t)\, dt &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^{x^2} t^a f(t)\, dt\right)'}{\left(x^{2(a+1)}\right)'} && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x x^{2a} f(x^2)}{2(a+1)x^{2a+1}} \\
&= \frac{f(0)}{a+1}. && \text{(η } f \text{ είναι συνεχής)}
\end{aligned}$$

■

Θ5. (α΄) Να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\, dx$$

συγκλίνει και αν ναι να υπολογιστεί. (1 μον.)

(β΄) Αν $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$, να αποδειχθεί ότι

$$I_n = \int_0^\infty t^{2n} e^{-4t^2}\, dt = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{3n+2}}\sqrt{\pi}, \quad n = 1, 2, 3\ldots.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$0 < \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} < \frac{1}{e^x+1} < \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα I θα συγκλίνει. Είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx &= \int \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx \\ &= \int \frac{1}{t^2}\,dt \qquad\qquad (\text{αντικατάσταση } t = e^x+1) \\ &= -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{e^x+1} + c\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$I = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

(β΄) Είναι

$$I_n = \int_0^\infty t^{2n} e^{-4t^2}\,dt = \frac{1}{2^{2n+1}} \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2^{2n+1}} J_n\,, \quad (\text{αντικατάσταση } x = 2t)$$

όπου

$$J_n = \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}\,dx\,.$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\int x^{2n} e^{-x^2}\,dx = \int x^{2n-1} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right)' dx = -\frac{1}{2} x^{2n-1} e^{-x^2} + \frac{2n-1}{2} \int x^{2n-2} e^{-x^2}\,dx\,.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to\infty} x^{2n-1} e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^{x^2}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \frac{2n-1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2n-3}}{e^{x^2}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \cdots = 0\,,$$

είναι

$$J_n = \frac{2n-1}{2} \int_0^\infty x^{2n-2} e^{-x^2}\,dx = \frac{2n-1}{2} J_{n-1}\,, \quad n = 1,2,3\ldots\,.$$

Επομένως,

$$J_n = \frac{2n-1}{2} J_{n-1} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2} J_{n-2} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3}{2^{n-1}} J_1\,,$$

οπότε

$$J_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n} \int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}\,,$$

Άρα,

$$I_n = \int_0^\infty t^{2n} e^{-4t^2}\,dt = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots (2n-1)}{2^{3n+2}} \sqrt{\pi}\,, \quad n = 1,2,3\ldots\,.$$

■

Θ6. (α΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης καθώς επίσης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{n8^n}.$$

(1 μον.)

(β΄) Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-(-1)^n)\, 3^{-n}.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $c_n = (x-1)^{3n}/n8^n$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^3}{8\sqrt[n]{n}} = \frac{|x-1|^3}{8}.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, αν και μόνο αν $|x-1|^3 < 8$ και ισοδύναμα $|x-1| < 2$. Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 2$ και κατά συνέπεια η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (-1, 3)$

(i) Για $x = -1$ προκύπτει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$. Η σειρά είναι εναλλάσσουσα και από το κριτήριο του Leibniz συγκλίνει.

(ii) Για $x = 3$ προκύπτει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$. Ως γνωστόν η σειρά αποκλίνει.

Άρα, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = [-1,\, 3)$.

(β΄) Είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-(-1)^n)\, 3^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n}.$$

Ως γνωστόν,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1.$$

Επομένως, για $x = 1/3$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (n-(-1)^n)\, 3^{-n} &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{(1-1/3)^2} - \frac{1}{1+1/3} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0.\end{aligned}$$

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

9 Σεπτεμβρίου, 2009

Θ1. (α΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\,.$$

(0,5 μον.)

(β΄) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < 1/3$, για κάθε $n \geq N$ και να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n\,.$$

(1 μον.)

(γ΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όπου

$$a_n = \begin{cases} 1/4^n & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος ,} \\ 1/5^n & \text{αν } n \text{ είναι περιττός .} \end{cases}$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

και ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει. Επομένως από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

θα συγκλίνει.

(β΄) Επειδή
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\text{(L'Hôpital)}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\,,$$
είναι
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}n^{1/n}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln n/n}=e^0=1\,.$$
Επειδή $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, για $\varepsilon=1/3$ υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0<\sqrt[n]{n}-1<1/3$, για κάθε $n\geq N$.

Επομένως
$$0<\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n<(1/3)^n\ ,\quad \text{για κάθε } n\geq N$$
και ως γνωστόν η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=N}^{\infty}(1/3)^n$ συγκλίνει. Άρα από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=N}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ θα συγκλίνει. Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ συγκλίνει.

Σημείωση. Για τη σύγκλιση της σειράς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το κριτήριο της ρίζας (κριτήριο του Cauchy). Αν $a_n=\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$, τότε
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=0<1$$
και επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ συγκλίνει.

(γ΄) *1ος τρόπος*. Αν $n=2k$, τότε
$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[2k]{a_{2k}}=\sqrt[2k]{\frac{1}{4^{2k}}}=\frac{1}{4}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{4}\,.$$
Αν $n=2k+1$, τότε
$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[2k+1]{a_{2k+1}}=\sqrt[2k+1]{\frac{1}{5^{2k+1}}}=\frac{1}{5}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{5}\,.$$
Επομένως, $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}=1/4<1$ και από το κριτήριο της ρίζας(κριτήριο του Cauchy) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Ας σημειωθεί ότι το κριτήριο του λόγου(κριτήριο του D'Alembert) δεν δίνει απάντηση για τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

2ος τρόπος. Παρατηρούμε ότι
$$0<a_n\leq\frac{1}{4^n}\,,\quad \text{για κάθε } n\geq 1.$$
Επειδή ως γνωστόν η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/4^n)=1/3$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ θα συγκλίνει.

■

Θ2. Να βρεθούν όλες οι $1-1$ και δύο φορές παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις $y=f(x)$ με $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οι οποίες είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=0\,. \tag{2.17}$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Εκφράστε τη δεύτερη παράγωγο $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$ συναρτήσει των $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ και $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. (1,5 μον.)

Λύση. Ως γνωστόν

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\right)\\ &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} && \text{(κανόνας αλυσίδας)}\\ &=-\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\,.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(1-\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3}\right)=0\,.$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3=1\,.$$

Η λύση της εξίσωσης $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$ είναι $y=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$ με $a\neq 0$, επειδή η y είναι $1-1$.
Η $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3=1$ συνεπάγεται $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$ της οποίας η λύση είναι $y=x+c$, $c\in\mathbb{R}$.
Άρα η γενική λύση της (2.17) είναι $y=f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$ με $a\neq 0$. ■

Θ3. (α΄) Να αποδειχθεί ότι $\arctan t\leq t$, για κάθε $t\geq 0$. (0,5 μον.)

(β΄) Έστω $f:[0,1]\to[0,\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση της οποίας η πρώτη παράγωγος είναι φθίνουσα συνάρτηση και τέτοια ώστε $f(0)=0$ και $f'(1)>0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1\frac{1}{f^2(x)+1}\,dx\leq\frac{f(1)}{f'(1)}\,. \tag{2.18}$$

Είναι δυνατόν να ισχύει η ισότητα στην παραπάνω ανισότητα; (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $\varphi(t) := \arctan t - t$, είναι

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 1 = -\frac{t^2}{1+t^2} \leq 0\,, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, για κάθε $t \geq 0$ είναι $\varphi(t) \leq \varphi(0)$ και ισοδύναμα $\arctan t \leq t$.

(β΄) Από την υπόθεση $f'(x) \geq f'(1) > 0$, για κάθε $x \in [0,1]$ και επομένως η f είναι γνήσια αύξουσα.

Επειδή η f' είναι φθίνουσα, για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $f'(1) \leq f'(x)$ και επομένως

$$\frac{f'(1)}{f^2(x)+1} \leq \frac{f'(x)}{f^2(x)+1}\,.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\begin{aligned} f'(1)\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)+1}\,dx &\leq \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)+1}\,dx \\ &= \int_0^1 (\arctan(f(x)))'\,dx \\ &= \arctan(f(1)) - \arctan(f(0)) \\ &= \arctan(f(1))\,. \qquad (f(0)=0) \end{aligned}$$

Επειδή $f'(1) > 0$ και $f(1) > f(0) = 0$, από την (α΄) έχουμε $\arctan(f(1)) \leq f(1)$ και επομένως

$$\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)+1}\,dx \leq \frac{\arctan(f(1))}{f'(1)} \leq \frac{f(1)}{f'(1)}\,.$$

Για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει να είναι $\arctan(f(1)) = f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$. Τότε

$$\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)+1}\,dx = 0\,. \qquad (\text{άτοπο επειδή } f^2(x)+1 > 0,\ \forall x \in [0,1])$$

Άρα δεν είναι δυνατόν να έχουμε ισότητα στη (2.18).

Σημείωση. Επίσης, επειδή $f(1) > f(0) = 0$, από την (α΄) προκύπτει ότι $\arctan(f(1)) < f(1)$ και επομένως δεν είναι δυνατόν να έχουμε ισότητα στη (2.18).

■

Θ4. (α΄) Αν

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\, dx\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

να αποδειχθεί ότι

$$I_n = \frac{1}{2}\left(I_{n+1} + I_{n-1}\right)\,, \quad n \geq 2$$

και να υπολογιστεί το I_n. (1,5 μον.)

(β΄) Να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \sin\left(x^2 + x + 1\right)\, dx$$

συγκλίνει.

Υπόδειξη.

$$\sin\left(x^2+x+1\right) = \frac{\left[-\cos\left(x^2+x+1\right)\right]'}{2x+1}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos nx}{1-\cos x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{n\sin nx}{\sin x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \frac{n^2\cos nx}{\cos x} = n^2\,,$$

το I_n είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα. Για $n \geq 2$ είναι

$$\begin{aligned}
\frac{I_{n+1}+I_{n-1}}{2} &= \int_0^{\pi} \frac{2-\left[\cos\left(n+1\right)x + \cos\left(n-1\right)x\right]}{2\left(1-\cos x\right)}\, dx \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos nx\cos x}{1-\cos x}\, dx \\
&= \int_0^{\pi} \frac{(1-\cos nx) + \cos nx(1-\cos x)}{1-\cos x}\, dx \\
&= I_n + \int_0^{\pi} \cos nx\, dx = I_n + \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{x=0}^{x=\pi} = I_n\,.
\end{aligned}$$

Επομένως, οι όροι της ακολουθίας $\{I_1, I_2, I_3, \ldots\}$ αποτελούν αριθμητική πρόοδο με λόγο $\omega = I_2 - I_1$. Όμως

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{1-\cos x}\, dx = \pi$$

και

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{2-2\cos^2 x}{1-\cos x}\, dx = 2\int_0^{\pi} \left(1+\cos x\right)\, dx = 2\pi\,,$$

οπότε $\omega = 2\pi - \pi = \pi$. Άρα, $I_n = I_1 + \left(n-1\right)\omega = \pi + \left(n-1\right)\pi = n\pi$.

(β΄) Επειδή

$$\int \sin\left(x^2+x+1\right)\,dx = -\frac{\cos\left(x^2+x+1\right)}{2x+1} - 2\int \frac{\cos\left(x^2+x+1\right)}{(2x+1)^2}\,dx$$

(παραγοντική ολοκλήρωση)

και

$$\left| -\frac{\cos\left(x^2+x+1\right)}{2x+1} \right| \leq \frac{1}{2x+1} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0\,,$$

είναι

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2+x+1\right)\,dx = \cos 1 - 2\underbrace{\int_0^\infty \frac{\cos\left(x^2+x+1\right)}{(2x+1)^2}\,dx}_{I}\,.$$

Αρκεί να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα I. Επειδή

$$\left|\frac{\cos\left(x^2+x+1\right)}{(2x+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(2x+1)^2}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,, \qquad \text{(συγκλίνει)}$$

από το κριτήριο σύγκρισης το γενικευμένο ολοκλήρωμα I συγκλίνει απόλυτα και κατά συνέπεια θα συγκλίνει. Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2+x+1\right)\,dx$$

συγκλίνει.

■

Θ5. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+2^{-n}\right)x^n\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Αν $a_n = n + 2^{-n}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1+2^{-n-1}}{n+2^{-n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n+1/n2^{n+1}}{1+1/n2^n} = 1\,.$$

Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$. Δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < 1$.

Ως γνωστόν, για $|x| < 1$ είναι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{και} \quad \frac{x/2}{1-x/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n .$$

Επομένως, για $|x| < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + 2^{-n}\right) x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{2-x}\,.\end{aligned}$$

■

2.8 Ακαδημαϊκό έτος 2007–8

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

25 Φεβρουαρίου, 2008

Θ1. (α΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right).$$

(1 μον.)

(β΄) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \quad \text{και} \quad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/n^2} - 1\right).$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) *1ος τρόπος*. Είναι

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) = \ln\left(\frac{3}{1}\right) + \ln\left(\frac{5}{3}\right) + \ln\left(\frac{7}{5}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{2N+1}{2N-1}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{5}\cdots\frac{2N+1}{2N-1}\right) = \ln(2N+1) \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty .$$

Επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) = \infty ,$$

δηλαδή η σειρά αποκλίνει.

2ος τρόπος. Παρατηρούμε ότι

$$\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{2n-1}\right).$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1 ,$$

από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)}{\frac{2}{2n-1}} = 1\,.$$

Όμως $\sum_{n=1}^{\infty} (2/(2n-1)) = \infty$, οπότε από το οριακό κριτήριο σύγκρισης θα είναι και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) = \infty\,.$$

(β΄) (i) Αν $b_n = \ln n/n^2$ και $c_n = 1/n^{3/2}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n/n^2}{1/n^{3/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \stackrel{\text{(L'Hôpital)}}{=} 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ θα συγκλίνει.

<u>*Σημείωση*</u>. Επειδή η ακολουθία $b_n = \frac{\ln n}{n^2}$ είναι φθίνουσα και θετική για κάθε $n \geq 2$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το κριτήριο συμπύκνωσης ή το κριτήριο γενικευμένου ολοκληρώματος.

(ii) Έστω

$$a_n = n^{1/n^2} - 1 = e^{\ln n/n^2} - 1 \quad \text{και} \quad b_n = \frac{\ln n}{n^2}\,.$$

Είναι

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0\,.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0^+} e^x = 1\,,$$

τότε από το θεώρημα μεταφοράς

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\ln n/n^2} - 1}{\ln n/n^2} = 1\,.$$

Επειδή από τη (i) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/n^2} - 1\right)$ θα συγκλίνει.

■

Θ2. Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + \frac{2x}{1+x^2} y' + \frac{1}{(1+x^2)^2} y = 0 \tag{2.19}$$

με την αντικατάσταση $x = \tan t$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της. (1,5 μον.)

Λύση. Ως γνωστόν $x = \tan t \Leftrightarrow t = \arctan x$. Είναι

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cos^2 t$$

και

$$\begin{aligned} y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cos^2 t\right) \cdot \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cos^2 t - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sin 2t\right]\cos^2 t = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cos^4 t - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sin 2t \cos^2 t\,. \end{aligned}$$

Επειδή $1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cos^4 t - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sin 2t\cos^2 t + 2\tan t\cos^2 t \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cos^2 t + y\cos^4 t = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0\,. \tag{2.20}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2.20) είναι: $r^2 + 1 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \pm i$. Επομένως, η γενική λύση της (2.20) είναι

$$y^*(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Επειδή

$$\cos t = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{και} \quad \sin t = \pm\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$

η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.19) είναι

$$y(x) = \frac{c_1 + c_2 x}{\sqrt{1+x^2}}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

Θ3. (α΄) Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0, 1]$, να βρεθεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k^2 - 2kn + 2n^2}}\,.$$

(1,3 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας το γεικειυμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{a\to 0}\int_0^3 \frac{\sqrt{1+a^4x^3}}{3+x^2}\,dx\,.$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k^2-2kn+2n^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{(k/n)^2-2k/n+2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

όπου $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$. Επομένως, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k^2-2kn+2n^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}\,dx\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k^2-2kn+2n^2}}&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}\,dx\\&=\int_{-1}^0\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt\qquad\text{(αντικατάσταση } t=x-1)\\&=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\Big|_{t=-1}^{t=0}\\&=-\ln(-1+\sqrt{2})=\ln(1+\sqrt{2})\,.\end{aligned}$$

(β΄) *<u>1ος τρόπος</u>*. Επειδή οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{1+a^4x^3}$ και $g(x)=\frac{1}{3+x^2}$ είναι θετικές και συνεχείς στο διάστημα $[0,3]$, από το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα είναι

$$\begin{aligned}\int_0^3\frac{\sqrt{1+a^4x^3}}{3+x^2}\,dx&=\sqrt{1+a^4\xi^3}\int_0^3\frac{1}{(\sqrt{3})^2+x^2}\,dx\\&=\sqrt{1+a^4\xi^3}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{x=0}^{x=3}\\&=\sqrt{1+a^4\xi^3}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\sqrt{1+a^4\xi^3}\,,\end{aligned}$$

για κάποιο ξ, με $0 \le \xi \le 3$. Επειδή $\lim_{a\to 0}\sqrt{1+a^4\xi^3}=1$, είναι

$$\lim_{a\to 0}\int_0^3 \frac{\sqrt{1+a^4x^3}}{3+x^2}\,dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

2ος τρόπος.

$$\left|\int_0^3 \frac{\sqrt{1+a^4x^3}}{3+x^2}\,dx - \int_0^3 \frac{1}{3+x^2}\,dx\right| = \int_0^3 \frac{\sqrt{1+a^4x^3}-1}{3+x^2}\,dx$$
$$\le (\sqrt{1+27a^4}-1)\int_0^3 \frac{1}{3+x^2}\,dx \xrightarrow[a\to 0]{} 0\,.$$

Άρα,

$$\lim_{a\to 0}\int_0^3 \frac{\sqrt{1+a^4x^3}}{3+x^2}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{3+x^2}\,dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

■

Θ4. (α΄) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty f\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\,dx$$

συγκλίνει, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^\infty f\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+\frac{1}{u^2}\right) f(u)\,du\,.$$

(0,8 μον.)

(β΄) Να βρεθούν οι τιμές του $n\in\mathbb{N}$ για τις οποίες το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I_n = \int_0^\infty \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^n\,dx$$

συγκλίνει και χρησιμοποιώντας το (α΄) να υπολογιστεί. (1,7 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $u=\sqrt{x^2+1}-x$, $x\ge 0$, τότε $x=-\frac{u^2-1}{2u}$ και $\frac{dx}{du}=-\frac{u^2+1}{2u^2}$. Παρατηρούμε ότι για $x=0$ είναι $u=1$ και

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0\,.$$

Επομένως,

$$\int_0^\infty f(\sqrt{x^2+1}-x)\,dx = -\int_1^0 f(u)\frac{u^2+1}{2u^2}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+\frac{1}{u^2})f(u)\,du\,.$$

(β΄) Επειδή

$$\int_0^{\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)^n\, dx = \underbrace{\int_0^1 (\sqrt{x^2+1}-x)^n\, dx}_{J_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)^n\, dx}_{J_2},$$

όπου το J_1 είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα, αρκεί να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα J_2. Όμως

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^n}{1/x^n} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)^n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n}\, dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $n \geq 2$. Επομένως, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης το γενικευμένο ολοκλήρωμα J_2 θα συγκλίνει αν και μόνο αν $n \geq 2$. Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_n θα συγκλίνει αν και μόνο αν $n \geq 2$.

Για τον υπολογισμό του I_n, $n \geq 2$, από το (α΄) για $f(x) = x^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} I_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+\frac{1}{u^2}\right) u^n\, du &= \frac{1}{2}\int_0^1 (u^n + u^{n-2})\, du \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1} + \frac{u^{n-1}}{n-1}\right)\Bigg|_{u=0}^{u=1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{n}{n^2-1}. \end{aligned}$$

■

Θ5. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n .$$

Εφαρμογή. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n/2}} .$$

(1,5 μον.)

Λύση. Αν $a_n = n^2$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1 .$$

Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος της δυναμοσειράς παραγωγίζουμε δύο φορές τη γεωμετρική σειρά $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$, οπότε

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{και} \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[n\,(n-1) + n\right] x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)\,x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \\ &= x^2 \frac{2}{(1-x)^3} + x \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}\,, \quad |x| < 1\,.\end{aligned}$$

Εφαρμογή. Για $x = 1/\sqrt{3}$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n/2}} = \frac{1/3 + 1/\sqrt{3}}{\left(1 - 1/\sqrt{3}\right)^3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\left(\sqrt{3} - 1\right)^3} \approx 12,0622\,.$$

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

1 Σεπτεμβρίου, 2008

Θ1. (α΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}\,.$$

(1 μον.)

(γ΄) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει, να αποδειχθεί ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ θα συγκλίνει.

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) <u>*1ος τρόπος*</u>. Είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right) &= \ln\left(\frac{3}{5}\right) + \ln\left(\frac{5}{7}\right) + \ln\left(\frac{7}{9}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{2N+1}{2N+3}\right) \\ &= \ln\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{9}\cdots\frac{2N+1}{2N+3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2N+3}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} -\infty\,.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right) = -\infty\,,$$

δηλαδή η σειρά αποκλίνει.

<u>*2ος τρόπος*</u>. Παρατηρούμε ότι

$$\ln\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right) = \ln\left(1 - \frac{2}{2n+3}\right)\,.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln(1-x)}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-x} = 1\,,$$

τότε και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln\left(1-\frac{2}{2n+3}\right)}{\frac{2}{2n+3}} = 1\,.$$

Όμως $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+3} = \infty$, οπότε από το οριακό κριτήριο σύγκρισης θα είναι και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\ln\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)\right] = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right) = -\infty\,.$$

(β΄) Ο γενικός όρος της σειράς είναι $a_n = n^{\ln n}/(\ln n)^n$, $n \geq 2$. Είναι $a_n > 0$, για κάθε $n \geq 2$ και

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\ln n/n}}{\ln n} = \frac{e^{\ln^2 n/n}}{\ln n}\,.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} 2\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\,,$$

είναι

$$\lim_{n\to\infty} e^{\ln^2 n/n} = 1\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\ln^2 n/n}}{\ln n} = 0 < 1$$

και από το κριτήριο της ρίζας(κριτήριο του Cauchy) η σειρά συγκλίνει.

(γ΄) Είναι $(|a_n| - 1/n)^2 \geq 0$ και ισοδύναμα

$$2\left|\frac{a_n}{n}\right| \leq a_n^2 + \frac{1}{n^2}\,, \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^2\right)$ συγκλίνει και από την υπόθεση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ επίσης συγκλίνει. Επομένως και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + 1/n^2\right)$ θα συγκλίνει. Άρα, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $2\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$ συγκλίνει. Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ θα συγκλίνει.

■

Θ2. Να βρεθεί η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in (-3/2, 5/2)$, αν

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-4x^2+4x+15}}\,, \quad f(1/2) = \pi\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$f(x) - f(1/2) = \int_{1/2}^{x} \frac{1}{\sqrt{-4t^2+4t+15}}\,dt \Leftrightarrow f(x) = \int_{1/2}^{x} \frac{1}{\sqrt{-4t^2+4t+15}}\,dt + \pi\,.$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{-4t^2+4t+15}}\,dt &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4-(t-1/2)^2}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{2^2-u^2}}\,du \qquad \text{(αντικατάσταση } u = t - 1/2\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{u}{2}\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{t-1/2}{2}\right) + c = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2t-1}{4}\right) + c\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$f(x) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{4}\right) + \pi\,.$$

■

Θ3. (α΄) Αν η συνάρτηση $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$ είναι φθίνουσα, να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) \le \int_1^n f(x)\, dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n)\ , \quad n = 1, 2, \dots\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας το (α΄) να υπολογιστεί το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/3}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/3}}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{N}$, για $k \le x \le k+1$ είναι $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$ και επομένως

$$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)\, dx \le f(k)\ .$$

Αν $n \ge 2$, αθροίζοντας τις παραπάνω ανισότητες για $k = 1, 2, \dots, n-1$ έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \le \int_1^2 f(x)\, dx + \int_2^3 f(x)\, dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

και ισοδύναμα

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)\, dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k)\ .$$

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) \le \int_1^n f(x)\, dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n)\ .$$

(β΄) Επειδή η συνάρτηση $f(x) = 1/x^{1/3}$ είναι γνήσια φθίνουσα στο διαστημα $[1,\infty)$, από το (α΄) έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/3}} - 1 \le \int_1^n \frac{1}{x^{1/3}}\, dx \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/3}} - \frac{1}{n^{1/3}}\,.$$

Όμως
$$\int_1^n \frac{1}{x^{1/3}}\,dx = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{x=1}^{x=n} = \frac{3}{2}\left(n^{2/3}-1\right),$$
οπότε
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1/3}} - 1 \le \frac{3}{2}\left(n^{2/3}-1\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1/3}} - \frac{1}{n^{1/3}}$$
και ισοδύναμα
$$\frac{3}{2}\left(n^{2/3}-1\right) + \frac{1}{n^{1/3}} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1/3}} \le \frac{3}{2}\left(n^{2/3}-1\right) + 1\,.$$
Επομένως,
$$\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{n} \le \frac{1}{n^{2/3}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1/3}} \le \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2/3}}\,.$$
Επειδή
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2/3}}\right) = \frac{3}{2},$$
από τις παραπάνω ανισότητες και το κριτήριο κιβωτισμού(κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών) προκύπτει ότι
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2/3}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1/3}} = \frac{3}{2}\,.$$

■

Θ4. Να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα
$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx$$
συγκλίνει και αν ναι να υπολογιστεί. (1,5 μον.)

Λύση. Επειδή
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}/\left(x+1\right)^2}{1/x^{3/2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+1/x)^2} = 1$$
και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left(1/x^{3/2}\right)\,dx$ συγκλίνει, από το οριακό κριτή-

ριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left(\sqrt{x}/\left(x+1\right)^2\right)\, dx$ θα συγκλίνει. Είναι

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\, dx &= -\int \sqrt{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)'\, dx \\
&= -\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\, dx && \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= -\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \int \frac{1}{t^2+1}\, dt && \text{(αντικατάσταση } t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2\text{)} \\
&= -\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \arctan t + c \\
&= -\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \arctan\sqrt{x} + c\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\, dx &= \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\, dx \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{R}}{R+1} + \arctan\sqrt{R}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \arctan 1\right) \\
&= -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{R}+1/\sqrt{R}} + \lim_{R\to\infty}\arctan\sqrt{R} + \frac{1}{2} - \arctan 1 \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

■

Θ5. (α΄) Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά, να βρεθεί το ανάπτυγμα της συνάρτησης $y = \ln(1-2x)$ σε σειρά Maclaurin. (0,7 μον.)

(β΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+2}}{n\,(n+2)}\,.$$

Εφαρμογή. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+2)\,2^n}\,.$$

(2,3 μον.)

Λύση.

(α΄) Ως γνωστόν $1/(1-t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $|t| < 1$. Ολοκληρώνοντας, για $|x| < 1$ έχουμε

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\,dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,.$$

Επομένως,

$$\ln(1-2x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}\,, \quad |x| < \frac{1}{2}\,.$$

(β΄) Αν $c_n = 2^n x^{n+2}/n(n+2)$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}|x|^{n+3}}{(n+1)(n+3)}\cdot\frac{n(n+2)}{2^n|x|^{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+2)}{(n+1)(n+3)}|x| = 2|x|\,.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty}|c_{n+1}/c_n| < 1$, αν και μόνο αν $|x| < 1/2$. Δηλαδή, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1/2$.

Έστω

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{n+2}}{n(n+2)}\,, \quad |x| < \frac{1}{2}\,.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{n+1}}{n} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n} = -x\ln(1-2x)\,, \quad |x| < \frac{1}{2}$$

και κατά συνέπεια

$$f(x) = -\int_0^x t\ln(1-2t)\,dt\,, \quad |x| < \frac{1}{2}\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned}\int_0^x t\ln(1-2t)\,dt &= \int_0^x \left(\frac{t^2}{2}\right)'\ln(1-2t)\,dt \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(1-2x) + \int_0^x \frac{t^2}{1-2t}\,dt \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(1-2x) - \frac{1}{4}\int_0^x (2t+1)\,dt + \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{1-2t}\,dt \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(1-2x) - \frac{1}{4}\left(x^2+x\right) - \frac{1}{8}\ln(1-2x)\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{n+2}}{n(n+2)} = \frac{1}{4}\left(x^2+x\right) + \frac{1}{8}\left(1-4x^2\right)\ln(1-2x)\,, \quad |x| < \frac{1}{2}\,.$$

Εφαρμογή. Για $x = 1/4$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+2)\,4^{n+2}} = \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)\,2^n}\,.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+2)\,2^n} = 16\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}\left(1-4\frac{1}{4^2}\right)\ln\left(1-2\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{5}{4}-\frac{3}{2}\ln 2\,.$$

■

2.9 Ακαδημαϊκό έτος 2006–7

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

10 Σεπτεμβρίου, 2007

Θ1. (α') Έστω η ακολουθία $a_n = n^r x^n$, $r \in \mathbb{R}$ και $|x| < 1$. Να υπολογιστεί το $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ καθώς επίσης και το $\lim_{n\to\infty} a_n$. (0,7 μον.)

(β') Έστω $f_n(x) = x^n(1-x)$, $g_n(x) = n^2 x^n (1-x)$ ακολουθίες συναρτήσεων ορισμένες στο διάστημα $[0,1]$. Να υπολογιστούν τα $b_n = \max\limits_{0\le x\le 1} f_n(x)$ και $c_n = \max\limits_{0\le x\le 1} g_n(x)$. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,,$$

ενώ $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx\,.$$

(1,8 μον.)

Λύση.

(α') Είναι

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^r\,|x|^{n+1}}{n^r\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^r |x| = |x| < 1\,.$$

Από το κριτήριο του λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και επομένως $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(β') Η παράγωγος $f_n'(x) = x^{n-1}\left(n-(n+1)x\right)$ μηδενίζεται στο $(0,1)$ για $x = \frac{n}{n+1}$. Επειδή $f_n(0) = f_n(1) = 0$, είναι

$$b_n = \max_{0\le x\le 1} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{n+1}\,.$$

Παρόμοια,

$$c_n = \max_{0\le x\le 1} g_n(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{n^2}{n+1}\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{e}\cdot 0 = 0$$

και
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \frac{1}{e} \cdot \infty = \infty\,.$$
Από την (α'), για $|x| < 1$ είναι $\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} n^2 x^n = 0$. Επομένως, για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. Παρατηρούμε ότι
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left(x^n - x^{n+1}\right)\,dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\\ &= 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,,\end{aligned}$$
ενώ
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} n^2\int_0^1 (x^n - x^{n+1})\,dx\\ &= \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\\ &= 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

■

Θ2. (α') Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}\,, \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0\,.$$
(1 μον.)

(β') Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^a \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$
(1 μον.)

Λύση.

(α') Έστω $a_n = n^n/a^{n^2}$. Τότε
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{a^{n^2}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{|a|^n} = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{|a|}\right)^n\,.$$

Αν $|a| > 1$, από το θέμα 1 (α') είναι $\lim_{n\to\infty} n(1/|a|)^n = 0 < 1$. Επομένως, από το κριτήριο της ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^n/a^{n^2}\right)$ συγκλίνει απόλυτα. Αν $|a| \le 1$, $a \ne 0$, είναι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n(1/|a|)^n = +\infty$ και από το κριτήριο της ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^n/a^{n^2}\right)$ αποκλίνει. Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^n/a^{n^2}\right)$ συγκλίνει αν και μόνο αν $|a| > 1$.

(β') Αν $a_n = n^a \tan(\pi/4 + 1/n)$, για κάθε $n \ge 2$ είναι $a_n > 0$. Έστω $b_n = n^a$. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\,,$$

από το οριακό κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^a \tan(\pi/4 + 1/n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^a$ συγκλίνει. Ως γνωστόν, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^a = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^{-a})$ συγκλίνει αν και μόνο αν $-a > 1 \Leftrightarrow a < -1$. Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^a \tan(\pi/4 + 1/n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν $a < -1$.

■

Θ3. Αν η συνάρτηση $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = f(\xi)\,,\quad \text{για κάποιο } \xi \in [0, \pi/2]\,.$$

Αν $f(x) = \frac{1}{2-\sin x}$, να αποδειχθεί ότι το

$$\xi = \arcsin\left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \approx 0,7767\,.$$

(2 μον.)

Λύση. Υποθέτουμε ότι η f παίρνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της στα σημεία x_0 και y_0 αντίστοιχα του $[0, \pi/2]$. Τότε $f(x_0) \le f(x) \le f(y_0)$, για κάθε $x \in [0, \pi/2]$ και επομένως

$$\int_0^{\pi/2} f(x_0)\,dx \le \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx \le \int_0^{\pi/2} f(y_0)\,dx \Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx \le f(y_0)\,.$$

Από το θεώρημα του Bolzano ή ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in [0, \pi/2]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx\,.$$

Αν $f(x) = \frac{1}{2-\sin x}$, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t = \tan\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$, οπότε $x = 2\arctan t$, είναι

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{και} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2-\sin x}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{2-2t/\left(1+t^2\right)} \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(t-1/2)^2+3/4}\,dt \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{u^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}\,du \qquad \text{(αντικατάσταση } u=t-1/2\text{)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{u=-1/2}^{u=1/2} \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$f\left(\xi\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2-\sin x}\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{2-\sin\xi} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin\xi = 2-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

και κατά συνέπεια

$$\xi = \arcsin\left(2-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \approx 0,7767\,.$$

■

Θ4. Αν $\theta \in (0,\pi/2)$, να βρεθεί η γενική λύση $y = y\left(x\right)$ της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 2y'\cos\theta + y = 0$$

και να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty y\left(x\right)^2\,dx$ συγκλίνει. (1,5 μον.)

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι: $r^2+2r\cos\theta+1=0$ με ρίζες

$$r_{1,2} = -\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta-1} = -\cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} = -\cos\theta \pm i\sin\theta\,.$$

Επομένως, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y\left(x\right) = \left(c_1\cos\left(x\sin\theta\right) + c_2\sin\left(x\sin\theta\right)\right)e^{-x\cos\theta}\,, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

Επειδή

$$y(x)^2 = \left(c_1\cos\left(x\sin\theta\right)+c_2\sin\left(x\sin\theta\right)\right)^2 e^{-2x\cos\theta} \le \left(|c_1|+|c_2|\right)^2 e^{-2x\cos\theta}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-2x\cos\theta}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-2x\cos\theta}\,dx\\ &= -\frac{1}{2\cos\theta}\lim_{R\to\infty} e^{-2x\cos\theta}\Big|_{x=0}^{x=R}\\ &= -\frac{1}{2\cos\theta}\lim_{R\to\infty}\left(e^{-2R\cos\theta}-1\right)=\frac{1}{2\cos\theta} \qquad (\cos\theta>0)\end{aligned}$$

συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty y(x)^2\,dx$ θα συγκλίνει. ■

Θ5. Να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}\,,\quad x>0\,,$$

συγκλίνει και αν ναι να υπολογιστεί. (1,5 μον.)

Λύση. Επειδή για $t>0$ είναι

$$0<\frac{1}{t\sqrt{t+1}}<\frac{1}{t\sqrt{t}}=\frac{1}{t^{3/2}}$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_x^\infty \left(1/t^{3/2}\right)dt$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_x^\infty \left(1/t\sqrt{t+1}\right)dt$ θα συγκλίνει. Είναι

$$\begin{aligned}\int_x^\infty \frac{dt}{t\sqrt{t+1}} &= \int_{\sqrt{x+1}}^\infty \frac{2u\,du}{u\,(u^2-1)} \qquad (\text{αντικατάσταση } u=\sqrt{t+1}\Leftrightarrow t=u^2-1)\\ &= \int_{\sqrt{x+1}}^\infty\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du\\ &= \ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\Big|_{\sqrt{x+1}}^\infty\\ &= \lim_{u\to\infty}\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\\ &= \ln 1-\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right).\end{aligned}$$

■

Θ6. (α΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n3^n}x^{3n}\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας τη διωνυμική σειρά, να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(x) = 1/\left(1-x^3\right)^{1/2}$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\frac{1}{2}3x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}6x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}9x^9 + \cdots, \quad |x| < 1\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $c_n = (1/n3^n)\,x^{3n}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^3}{3\sqrt[n]{n}} = \frac{|x|^3}{3}\,.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, αν και μόνο αν $|x|^3 < 3$ και ισοδύναμα $|x| < \sqrt[3]{3}$. Δηλαδή, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = \sqrt[3]{3}$.

(i) Για $x = \sqrt[3]{3}$ προκύπτει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$. Ως γνωστόν η σειρά αποκλίνει.

(ii) Για $x = -\sqrt[3]{3}$ προκύπτει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n/n\right)$. Η σειρά είναι εναλλάσσουσα και από το κριτήριο του Leibniz συγκλίνει.

Άρα, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = \left[-\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{3}\right)$.

(β΄) Από τη διωνυμική σειρά

$$(1+t)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}\,t^n, \quad |t| < 1\,,$$

για $t = -x^3$ και $a = -1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = \left(1-x^3\right)^{-1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-1)^n x^{3n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}(-1)^n x^{3n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}(-1)^n x^{3n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^{3n} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^9 + \cdots, \quad |x| < 1\,. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2\left(1-x^3\right)^{-3/2} = \frac{1}{2}3x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}6x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}9x^8 + \cdots, \quad |x| < 1$$

και επομένως

$$\frac{3x^3}{2\left(1-x^3\right)^{3/2}} = \frac{1}{2}3x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}6x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}9x^9 + \cdots\,, \quad |x|<1\,.$$

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

8 Οκτωβρίου, 2007

Θ1. (α΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$$

Υπόδειξη. $\ln(1+x) < x$, για κάθε $x>0$. (1 μον.)

(β΄) Να βρεθούν οι τιμές του a, $a<0$, για τις οποίες η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^a}{n}$$

συγκλίνει. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Για κάθε $n \geq 2$ είναι

$$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)+2}{n-1}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) < \frac{2}{n-1}$$

και επομένως

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) < \frac{2}{\sqrt{n}\,(n-1)}\,. \tag{2.21}$$

Όμως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2/\sqrt{n}\,(n-1)}{1/n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{3/2}}{\sqrt{n}\,(n-1)} = 2$$

και ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1/n^{3/2}\right)$ συγκλίνει. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\left(2/\sqrt{n}\,(n-1)\right)$ συγκλίνει. Άρα, από την ανισότητα (2.21) και το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ συγκλίνει.

(β΄) _1ος τρόπος_. Η ακολουθία $a_n = \frac{(\ln n)^a}{n}$, $a < 0$, $n \geq 2$, είναι θετική και φθίνουσα. Από το κριτήριο συμπύκνωσης αρκεί να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{(\ln 2^n)^a}{2^n} = (\ln 2)^a \sum_{n=1}^{\infty} n^a \, .$$

Ως γνωστόν, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^a = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^{-a})$ συγκλίνει αν και μόνο αν $-a > 1 \Leftrightarrow a < -1$. Άρα, η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^a}{n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $a < -1$.

2ος τρόπος. Στο διάστημα $[2, \infty)$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\ln x)^a}{x}$, $a < 0$, είναι θετική και φθίνουσα. Από το κριτήριο του γενικευμένου ολοκληρώματος η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{\infty} \frac{(\ln x)^a}{x}\, dx$ συγκλίνει. Όμως

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{(\ln x)^a}{x}\, dx &= \int_{\ln 2}^{\infty} t^a \, dt \qquad\qquad (\text{αντικατάσταση } t = \ln x) \\ &= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^{-a}}\, dt \end{aligned}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνο αν $-a > 1 \Leftrightarrow a < -1$.

■

Θ2. Έστω η ακολουθία

$$a_n = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\cdots(n+n)}{n^n} \, .$$

Ζητείται να υπολογιστεί το $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους:

(α΄) Να υπολογιστεί πρώτα το $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ και στη συνέχεια το $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (1 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα $[0, 1]$ να βρεθεί το $\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n}$ και στη συνέχεια το $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{n(n+1)} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{(1+1/n)^n} \, . \end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) = 4/e$. Τότε όμως και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 4/e$. Επειδή $4/e > 1$, από το κριτήριο του λόγου (ή το κριτήριο της ρίζας) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}
\ln \sqrt[n]{a_n} &= \frac{1}{n}\left\{\ln n + \ln(n+1) + \ln(n+2) + \cdots + \ln(n+n) - n\ln n\right\} \\
&= \frac{1}{n}\ln n + \frac{1}{n}\left\{[\ln(n+1) - \ln n] + [\ln(n+2) - \ln n] + \cdots + [\ln(n+n) - \ln n]\right\} \\
&= \ln \sqrt[n]{n} + \frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\} \\
&= \ln \sqrt[n]{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \\
&= \ln 1 + \int_0^1 \ln(1+x)\, dx \\
&= x\ln(1+x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\, dx \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= \ln 2 - \int_0^1 \frac{(1+x)-1}{1+x}\, dx \\
&= \ln 2 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx \\
&= \ln 2 - 1 + \ln(1+x)\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \ln 2 - 1 + \ln 2 = \ln 4 - 1\,.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{\ln 4 - 1} = \frac{4}{e}\,.$$

■

Θ3. (α΄) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω a, b σημεία του ανοικτού διαστήματος $I \subseteq \mathbb{R}$, με $a < b$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη. Τότε, για κάθε $t \in [0,1]$ είναι

$$f\left((1-t)\,a + tb\right) \geq (1-t)\, f(a) + tf(b)\,. \tag{2.22}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\;dx \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}\,. \tag{2.23}$$

(1 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας την κοίλη συνάρτηση $y=\ln x$ στο διάστημα $[n,n+1]$, $n=1,2,3,\ldots$, να αποδειχθεί ότι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot e\,.$$

(1 μον.)

Απόδειξη. (α΄) Ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε

$$\int_0^1 f((1-t)\,a+tb)\;dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\;dx \qquad \text{(αντικατάσταση } x=(1-t)\,a+tb\text{)}$$

και

$$\int_0^1 [(1-t)\,f(a)+tf(b)]\;dt = f(a)\int_0^1 (1-t)\;dt + f(b)\int_0^1 t\,dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

Επομένως, από την ανισότητα (2.22) προκύπτει η απόδειξη της ανισότητας (2.23).

(β΄) Από την ανισότητα (2.23), με $f(x)=\ln x$, $a=n$ και $b=n+1$ έχουμε

$$\int_n^{n+1}\ln x\,dx \geq \frac{\ln n+\ln(n+1)}{2} = \ln\sqrt{n(n+1)}\,.$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1}\ln x\,dx &= x\ln x|_{x=n}^{x=n+1} - \int_n^{n+1} x(\ln x)'\;dx \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\
&= (n+1)\ln(n+1) - n\ln n - \int_n^{n+1} dx\\
&= n(\ln(n+1)-\ln n) + \ln(n+1) - 1\\
&= n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln(n+1) - 1\\
&= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \ln(n+1) - 1\,,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
&\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \ln(n+1) - 1 \geq \ln\sqrt{n(n+1)} \\
&\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \ln\sqrt{n(n+1)} - \ln(n+1) + 1 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \ln\frac{\sqrt{n(n+1)}}{n+1} + \ln e \\
&\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \ln\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot e\right).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot e\,.$$

□

Θ4. (α΄) Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + xy' + 4y = 0\,, \qquad x \geq 1\,,$$

με την αντικατάσταση $x = e^t$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της. (1,5 μον.)

(β΄) Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί a, $a > 1$, έτσι ώστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$x^2 y'' + xy' + 4y = 0\,, \qquad 1 \leq x \leq a\,, \quad y(1) = y(a) = 0\,,$$

να έχει μη μηδενική λύση. (0,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Για $x > 0$ είναι $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$. Έχουμε

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{dx/dt} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{e^t} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

και

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx} \\
&= \left(e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{dx/dt} = \left(e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{e^t} = e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}\,.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση προκύπτει ότι

$$e^{2t} \cdot \left(e^{-2t} \frac{d^2 y}{dt^2} - e^{-2t} \frac{dy}{dt} \right) + e^t \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) + 4y = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 0\,. \tag{2.24}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2.24) είναι: $r^2 + 4 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \pm 2i$. Επομένως, η γενική λύση της (2.24) είναι

$$y^*(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)\ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(β΄) Η συνθήκη $y(1) = 0$ συνεπάγεται ότι $c_1 = 0$ και επομένως η συνθήκη $y(a) = 0$ θα ικανοποιείται για μη μηδενικά c_2 αν

$$\sin(2 \ln a) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln a = n\pi \Leftrightarrow a = e^{n\pi/2}\,,$$

όπου το n είναι θετικός ακέραιος.

■

Θ5. (α΄) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^x \sin\sqrt{t}\,dt$, $x \geq 0$. (0,8 μον.)

(β΄) Έστω $a_n = (2n + 1/2)^2 \pi^2$ και $b_n = 4n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$. Να υπολογιστούν τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{a_n} \sin\sqrt{t}\,dt \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^{b_n} \sin\sqrt{t}\,dt\,.$$

Υπάρχει το $\lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin\sqrt{t}\,dt$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (0,7 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin\sqrt{t}\,dt &= 2\int_0^{\sqrt{x}} u \sin u\,du \qquad (\text{αντικατάσταση } u = \sqrt{t} \Leftrightarrow t = u^2,\ dt = 2udu) \\
&= -2\ u \cos u\Big|_{u=0}^{u=\sqrt{x}} + 2\int_0^{\sqrt{x}} \cos u\,du \qquad (\text{παραγοντική ολοκλήρωση}) \\
&= -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x}\,.
\end{aligned}$$

(β΄) Παρατηρούμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ και

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{a_n} \sin\sqrt{t}\,dt = \lim_{n\to\infty}\left(-2\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)+2\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\,,$$

ενώ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{b_n} \sin\sqrt{t}\,dt = \lim_{n\to\infty}\left(-4n\pi\cos 2n\pi + 2\sin 2n\pi\right) = \lim_{n\to\infty}(-4n\pi) = -\infty\,.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{a_n} \sin\sqrt{t}\,dt \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^{b_n} \sin\sqrt{t}\,dt\,,$$

το $\lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin\sqrt{t}\,dt$ δεν υπάρχει.

■

Θ6. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\,dx\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Επειδή

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\,dx}_{I_2}\,,$$

αρκεί να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα I_1 και I_2. Είναι

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 (1/\sqrt[3]{x})\,dx$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 |\cos x/\sqrt[3]{x}|\,dx$ θα συγκλίνει. Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1 συγκλίνει.

Για το I_2 θα χρησιμοποιήσουμε παραγοντική ολοκλήρωση. Είναι

$$\int_1^R \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \left.\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\right|_{x=1}^R + \frac{1}{3}\int_1^R \frac{\sin x}{x^{4/3}}\,dx = \frac{\sin R}{\sqrt[3]{R}} - \sin 1 + \frac{1}{3}\int_1^R \frac{\sin x}{x^{4/3}}\,dx\,.$$

Επειδή

$$\left|\frac{\sin R}{\sqrt[3]{R}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,, \quad \text{είναι} \quad \lim_{R\to\infty}\frac{\sin R}{\sqrt[3]{R}} = 0\,.$$

Επομένως

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\,dx = -\sin 1 + \frac{1}{3}\underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{4/3}}\,dx}_{I_3}\,.$$

Αρκεί να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_3. Επειδή

$$\left|\frac{\sin x}{x^{4/3}}\right| \le \frac{1}{x^{4/3}}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^{4/3}}\,dx$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^{4/3}}\right|\,dx$ θα συγκλίνει. Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_3 συγκλίνει και κατά συνέπεια το I_2 συγκλίνει. Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ συγκλίνει. ■

Θ7. (α΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^{3n+1}\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Έστω η δυναμοσειρά

$$1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + \cdots\,.$$

Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, το άθροισμα

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + \cdots$$

και να αποδειχθεί ότι

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \left(1+x^2\right) f\left(x\right)\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $c_n = (3^n/n)\,x^{3n+1}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left|x\right|^{3n+4}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n\left|x\right|^{3n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}3\left|x\right|^3 = 3\left|x\right|^3\,.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty}\left|c_{n+1}/c_n\right| < 1$, αν και μόνο αν $\left|x\right|^3 < 1/3$ και ισοδύναμα $|x| < 1/\sqrt[3]{3}$. Δηλαδή, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1/\sqrt[3]{3}$.

(i) Για $x = 1/\sqrt[3]{3}$ προκύπτει η σειρά $\left(1/\sqrt[3]{3}\right)\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Ως γνωστόν η σειρά αποκλίνει.

(ii) Για $x = -1/\sqrt[3]{3}$ προκύπτει η σειρά $\left(1/\sqrt[3]{3}\right)\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$. Η σειρά είναι εναλλάσσουσα και από το κριτήριο του Leibniz συγκλίνει.

Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = \left[-1/\sqrt[3]{3},\, 1/\sqrt[3]{3}\right)$.

(β΄) Έχουμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/(2n+1)$. Αν $c_n = x^{2n}/(2n+1)$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{x^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}x^2 = x^2\,.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty}|c_{n+1}/c_n| < 1$, αν και μόνο αν $x^2 < 1$ και ισοδύναμα $|x| < 1$. Δηλαδή η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

Παρατηρούμε ότι

$$xf(x) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\,, \quad \text{οπότε} \quad (xf(x))' = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots\,, \quad |x|<1\,.$$

Επομένως $(xf(x))' = 1/\left(1-x^2\right)$, $|x|<1$. Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$xf(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,.$$

Άρα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{αν } |x|<1,\ x\neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

Μετά από πράξεις, εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = (1+x^2)f(x)\,.$$

■

2.10 Ακαδημαϊκό έτος 2004–5

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

31 Ιανουαρίου, 2005

Θ1. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n} - 1)$.

(1,5 μον.)

Λύση.

(i) *1ος τρόπος*. Είναι $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$. Επειδή ως γνωστόν η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης θα είναι και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \infty$, δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ αποκλίνει.

2ος τρόπος. Αν $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, τότε $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \le 0$, για κάθε $x \ge \mathrm{e}$. Δηλαδή η f είναι φθίνουσα και θετική για $x \ge \mathrm{e}$. Αν $a_n = \frac{\ln n}{n}$, τότε για κάθε $n \ge 3$ η ακολουθία (a_n) είναι γνήσια φθίνουσα με $a_n > 0$. Από το κριτήριο συμπύκνωσης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει. Όμως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\ln 2^n}{2^n} = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$$

και επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \infty$, δηλαδή αποκλίνει.

Σημείωση. Επειδή η f είναι φθίνουσα και θετική για $x \ge \mathrm{e}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το κριτήριο γενικευμένου ολοκληρώματος για σειρές. Πράγματι, επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} \int_{\mathrm{e}}^{R} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{1}^{\ln R} t\,\mathrm{d}t \qquad \text{(αντικατάσταση } t = \ln x\text{)} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{(\ln R)^2}{2} - \frac{1}{2} = \infty\,,
\end{aligned}$$

θα είναι και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \infty$.

(ii) Ισχύει η ανισότητα $\mathrm{e}^x \ge x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως

$$n^{\frac{1}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \ge \frac{\ln n}{n}\,, \quad \text{για κάθε}\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}=\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης θα είναι και $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1/n}-1\right)=\infty$, δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1/n}-1\right)$ αποκλίνει.

Σημείωση . Αν $a_n=\frac{\ln n}{n}$ και $b_n=n^{1/n}-1$, είναι $a_n,b_n>0$, $\forall n\geq 2$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$, οπότε και πάλι από το οριακό κριτήριο σύγκρισης καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

■

Θ2. Να αποδειχθεί ότι $\sin x\geq\frac{2x}{\pi}$, για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Αν $I_n:=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-n\sin x}\,\mathrm{d}x$, να αποδειχθεί ότι $I_n=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-n\sin x}\,\mathrm{d}x$ και στη συνέχεια ότι $\lim_{n\to\infty}n^aI_n=0$, όπου $a<1$. (1,5 μον.)

Απόδειξη. Αν $f(x)=\sin x-\frac{2x}{\pi}$, τότε $f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$ και $f''(x)=-\sin x\leq 0$, για κάθε $x\in[0,\pi/2]$. Επομένως η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0,\pi/2]$, με $f(0)=f(\pi/2)=0$. Άρα $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,\pi/2]$ και ισοδύναμα $\sin x\geq\frac{2x}{\pi}$ για κάθε $x\in[0,\pi/2]$. Γεωμετρικά, η ευθεία με εξίσωση $y=\frac{2x}{\pi}$ διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$, $(\pi/2,1)$ και η $y=\sin x$ είναι κοίλη στο διάστημα $[0,\pi/2]$. Άρα $\sin x\geq\frac{2x}{\pi}$ για κάθε $x\in[0,\pi/2]$.

Είναι

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-n\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{e}^{-n\sin x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-n\sin x}\,\mathrm{d}x-\int_{\pi/2}^{0}\mathrm{e}^{-n\sin(\pi-t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(αντικατάσταση } x=\pi-t\text{)}\\
&= \int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-n\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-n\sin t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-n\sin x}\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως

$$
\begin{aligned}
0<n^aI_n &= 2n^a\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-n\sin x}\,\mathrm{d}x\\
&\leq 2n^a\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-2nx/\pi}\,\mathrm{d}x\\
&= -\pi n^{a-1}\,\mathrm{e}^{-2nx/\pi}\Big|_{x=0}^{x=\pi/2}\\
&= \pi n^{a-1}\left(1-\mathrm{e}^{-n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\,.
\end{aligned}
$$

Άρα $\lim_{n\to\infty}n^aI_n=0$. □

Θ3. (α΄) Αν $f(x) = \int_0^{x^3} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, να αποδειχθεί ότι

$$6\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$xy' = \sqrt{x^3 - 2}\,, \quad x \geq \sqrt[3]{2}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή $f'(x) = (x^3)'\mathrm{e}^{x^6} = 3x^2\mathrm{e}^{x^6}$, με $f(0) = 0$ και $f(1) = \int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
6\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \left(x^3\right)' f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2x^3 f(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= 2\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t - 6\int_0^1 x^5\mathrm{e}^{x^6}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{x^6}\Big|_0^1 = 2\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e} + 1
\end{aligned}$$

και ισοδύναμα

$$6\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}\,.$$

(β΄) Είναι

$$y' = \frac{\sqrt{x^3 - 2}}{x}\,, \quad x \geq \sqrt[3]{2}\,,$$

οπότε

$$y = \int \frac{\sqrt{x^3 - 2}}{x}\,\mathrm{d}x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Αν $u = \sqrt{x^3 - 2}$, τότε $x = \left(u^2 + 2\right)^{1/3}$ και $\mathrm{d}x = \left(2u/3\left(u^2+2\right)^{2/3}\right)\mathrm{d}u$. Επομένως

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^3-2}}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\int \frac{u^2}{u^2+2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{\left(u^2+2\right)-2}{u^2+2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3}\int \mathrm{d}u - \frac{4}{3}\int \frac{1}{u^2+(\sqrt{2})^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2u}{3} - \frac{4}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{x^3-2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\sqrt{\frac{x^3-2}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = \frac{2\sqrt{x^3-2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\sqrt{\frac{x^3-2}{2}}\right) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

■

Θ4. (α΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty x^{3/2}\cos\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x\,.$$

(1,5 μον.)

(β΄) Έστω $\Gamma(p) := \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\,\mathrm{d}x$, $p > 0$, η **συνάρτηση γάμμα**. Να αποδειχθεί ότι

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)\,.$$

Αν $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$, να υπολογιστεί η $\Gamma(1/2)$ και στη συνέχεια η $\Gamma(5/2)$.

(1,3 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\int_0^\infty x^{3/2}\cos\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 x^{3/2}\cos\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty x^{3/2}\cos\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x}_{I_2},$$

όπου το $I_1 = \int_0^1 \left(x^{3/2}\cos\left(x^3\right)\right)\,\mathrm{d}x$ είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_1^R x^{3/2}\cos\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x &= \int_1^R \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin\left(x^3\right)}{3}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{\sin\left(x^3\right)}{3\sqrt{x}}\right|_{x=1}^{x=R} - \frac{1}{3}\int_1^R \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\sin\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad\qquad\text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= \frac{\sin\left(R^3\right)}{3\sqrt{R}} - \frac{\sin 1}{3} + \frac{1}{6}\int_1^R \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty x^{3/2}\cos\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{\sin\left(R^3\right)}{3\sqrt{R}} - \frac{\sin 1}{3} + \frac{1}{6}\int_1^R \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{\sin 1}{3} + \frac{1}{6}\int_1^\infty \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι

$$\left|\frac{\sin\left(R^3\right)}{\sqrt{R}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \text{ συνεπάγεται } \lim_{R\to\infty}\frac{\sin\left(R^3\right)}{\sqrt{R}} = 0\,.$$

Επειδή $\left|\sin\left(x^3\right)/x^{3/2}\right| \le 1/x^{3/2}$ και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x^3)}{x^{3/2}}\right|\,\mathrm{d}x$$

θα συγκλίνει. Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{\sin(x^3)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει και κατά συνέπεια το I_2 συγκλίνει. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty x^{3/2}\cos(x^3)\,\mathrm{d}x$$

συγκλίνει.

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}
p\Gamma(p) &= p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \mathrm{e}^{-x}\left(x^p\right)'\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{R\to\infty}\left\{\mathrm{e}^{-x}x^p\Big|_{x=0}^{x=R} - \int_0^R \left(\mathrm{e}^{-x}\right)' x^p\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= \lim_{R\to\infty}\left\{\mathrm{e}^{-R}R^p + \int_0^R \mathrm{e}^{-x}x^p\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^p\,\mathrm{d}x \qquad \left(\lim_{R\to\infty}\mathrm{e}^{-R}R^p = \lim_{R\to\infty}\tfrac{R^p}{\mathrm{e}^R} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} 0\right) \\
&= \Gamma(p+1)\ .
\end{aligned}$$

Για $p = 1/2$ έχουμε

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\,, \qquad (\text{αντικατάσταση } x = t^2)$$

οπότε $\Gamma(5/2) = (3/2)\,\Gamma(3/2) = (3/2)\,(1/2)\,\Gamma(1/2) = 3\sqrt{\pi}/4$.

■

Θ5. (α΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{3n}}{3^n n^4}\,.$$

(1,3 μον.)

(β΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης καθώς επίσης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+2}{n!}\,x^n\,.$$

(1,2 μον.)

Απόδειξη. (α΄) Αν $c_n = (x-2)^{3n}/3^n n^4$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|x-2|^3}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^4}} = \frac{|x-2|^3}{3}\,.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} < 1$, αν και μόνο αν $|x-2|^3 < 3$ και ισοδύναμα $|x-2| < \sqrt[3]{3}$. Δηλαδή η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = \sqrt[3]{3}$.

(i) Αν $x-2=\sqrt[3]{3}$, έχουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ η οποία ως γνωστόν συγκλίνει.

(ii) Αν $x-2=-\sqrt[3]{3}$, έχουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^4}$ η οποία συγκλίνει από το κριτήριο του Leibniz για εναλλάσσουσες σειρές.

Άρα, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I=\left[2-\sqrt[3]{3},\,2+\sqrt[3]{3}\right]$.

(β΄) Αν $a_n=(3n+2)/n!$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{(n+1)(3n+2)}=0$$

και επομένως η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=\infty$, δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+2}{n!}x^n &= 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\ &= 3x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}+2\mathrm{e}^x\\ &= 3x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)'+2\mathrm{e}^x\\ &= 3x\left(\mathrm{e}^x\right)'+2\mathrm{e}^x=3x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x\,.\end{aligned}$$

□

Επαναληπτικές Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

29 Αυγούστου, 2005

Θ1. (α΄) Έστω η ακολουθία (a_n) με $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $a_1>\sqrt{2}$. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(2-a_n)$. (1,5 μον.)

(β΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{n^2-1}}\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι $a_n > \sqrt{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, $a_1 > \sqrt{2}$ και αν υποθέσουμε ότι $a_n > \sqrt{2}$, τότε

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2}\,.$$

Αν $b_n = 2 - a_n$,

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{2 - a_{n+1}}{2 - a_n}\right| = \left|\frac{2 - \sqrt{2 + a_n}}{2 - a_n}\right| = \frac{|2 - a_n|}{\left(2 + \sqrt{2 + a_n}\right)|2 - a_n|} < \frac{1}{2 + \sqrt{2}}\,.$$

Επειδή

$$\overline{\lim}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \le \frac{1}{2 + \sqrt{2}} < 1\,,$$

από το κριτήριο του λόγου (κριτήριο σύγκλισης του D'Alembert) η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

Σημείωση. Αν $a_{n_0} = 2$, για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, τότε θα είναι $a_n = 2$ για κάθε $n \ge n_0$. Σ' αυτή την περίπτωση οι όροι της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(2 - a_n)$ είναι μηδέν για κάθε $n \ge n_0$ και η σειρά προφανώς θα συγκλίνει.

(β΄) *1ος τρόπος*. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $\sqrt{n^2 - 1} \ge n - 1$ και επομένως

$$0 < \mathrm{e}^{-\sqrt{n^2-1}} \le \mathrm{e}^{-(n-1)}\,.$$

Όμως από το κριτήριο της ρίζας η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(n-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n}$ συγκλίνει. Πράγματι, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e}^{-1} < 1$. Άρα, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{n^2-1}}$ θα συγκλίνει.

2ος τρόπος. Αν $a_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n^2-1}}$ και $b_n = 1/n^2$, επειδή

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{x/\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} = 0\,,$$

είναι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{2\ln n - \sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sqrt{n^2-1}\left(2\ln n/\sqrt{n^2-1} - 1\right)} = 0\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^2\right)$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{n^2-1}}$ θα συγκλίνει.

■

Θ2. (α΄) Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0 \tag{2.25}$$

με την αντικατάσταση $u = xy$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της σ' ένα διάστημα I που δεν περιέχει το μηδέν. (1 μον.)

(β΄) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = \frac{y}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{και} \quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\,.$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + u = 0\,. \tag{2.26}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2.26) είναι: $r^2 + 1 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \pm\mathrm{i}$. Επομένως, η γενική λύση της (2.26) είναι

$$u\,(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.25) σ' ένα διάστημα I που δεν περιέχει το μηδέν είναι

$$y\,(x) = \frac{1}{x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(β΄) Είναι

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x\,, \text{ οπότε } \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Επομένως,

$$\ln|y| = \int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = \sqrt{1+\mathrm{e}^x} \Leftrightarrow x = \ln\left(t^2-1\right)$, είναι $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 2t/\left(t^2-1\right)$ οπότε

$$\begin{aligned}\ln|y| &= \int \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t\\ &= -\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\\ &= \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + C = \ln\left(\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}\right) + C\,.\end{aligned}$$

Ισοδύναμα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = C\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

■

Θ3. Έστω το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\arctan x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει. (0,8 μον.)

(β΄) Να αποδειχθεί ότι $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2,\ x>0$. (0,5 μον.)

(γ΄) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα. (1,2 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\int_0^\infty \frac{x\arctan x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \frac{x\arctan x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{x\arctan x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x}_{I_2},$$

όπου το I_1 είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2. Επειδή

$$\int_1^\infty \frac{x\arctan x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{x}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \left(1/x^3\right)\mathrm{d}x$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{x\arctan x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$ θα συγκλίνει. Επομένως το I_2 συγκλίνει. Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{x\arctan x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει.

(β΄) Για κάθε $x>0$,

$$\left(\arctan x + \arctan(1/x)\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1/x)'}{1+(1/x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0\,.$$

Επομένως, $\arctan x + \arctan(1/x) = c$, $x \in (0,\infty)$. Επειδή $\arctan 1 + \arctan 1 = 2\arctan 1 = \pi/2 = c$, για κάθε $x > 0$ είναι $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$.

(γ΄) Είναι

$$\int_0^\infty \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_\infty^0 \frac{(1/t)\arctan(1/t)}{\left(1+(1/t)^2\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t\arctan(1/t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

(αντικατάσταση $t = 1/x$)

και επομένως

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{x\arctan(1/x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x\left(\arctan x + \arctan(1/x)\right)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} -\frac{\pi}{8}\left(1+x^2\right)^{-1}\Big|_{x=0}^{x=R} = \frac{\pi}{8}\,.\end{aligned}$$

<u>*Σημείωση*</u>. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί και με παραγοντική ολοκλήρωση.

■

Θ4. (α΄) Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά, να αναπτυχθεί η συνάρτηση $y = 1/\left(1+t^a\right)$, $a > 0$, σε δυναμοσειρά και να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}\,.$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+3}$. (1,5 μον.)

(β΄) Να βρεθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^\infty (n+1)\,3^{-n}$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή ως γνωστόν $1/\left(1+x\right) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^n$, $|x| < 1$, είναι

$$\frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{na}\,, \quad |t| < 1\,.$$

Επομένως, για $|x| < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{na}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{na}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left.\frac{t^{na+1}}{na+1}\right|_{t=0}^{t=x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{na+1}}{na+1}\,.\end{aligned}$$

Επειδή η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(na+1)$ συγκλίνει, είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na+1}\,.$$

Για $a = 1/3$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 1 + t^{1/3} \Leftrightarrow t = (u-1)^3$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+t^{1/3}}\,\mathrm{d}t &= \int_1^2 \frac{3(u-1)^2}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= 3\int_1^2\left(u - 2 + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u \\ &= 3\left.\left(\frac{u^2}{2} - 2u + \ln u\right)\right|_{u=1}^{u=2} \\ &= 3\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right)\,.\end{aligned}$$

Άρα
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n/3+1} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+t^{1/3}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2} + \ln 2\,.$$

(β') Ως γνωστόν $1/\left(1-x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$. Παραγωγίζοντας, για $|x| < 1$ έχουμε

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\,.$$

Επομένως για $x = 1/3$ προκύπτει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)3^{-n} = \frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{9}{4}\,.$$

■

2.11 Ακαδημαϊκό έτος 2003–4

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

1 Μαρτίου, 2004

Θ1. (α′) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+1/n)}$. (0,5 μον.)

(β′) (i) Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά να βρεθούν τα αναπτύγματα των

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ και } g(x) = \ln\left(1-x^2\right)$$

σε σειρές Maclaurin. (0,8 μον.)

(ii) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n+1)} .$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α′) Αν $a_n = n^{-(1+1/n)} = n^{-1/n}/n$ και $b_n = 1/n$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^{-1/n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\ln n}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1 .$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$, θα είναι και $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+1/n)} = \infty$, δηλαδή η σειρά αποκλίνει.

(β′) (i) Ως γνωστόν $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ και $\frac{1}{1+t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$, $|t| < 1$. Ολοκληρώνοντας, για $|x| < 1$ έχουμε

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

και

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} .\end{aligned}$$

Επομένως για $|x| < 1$ είναι

$$g(x) = \ln(1 - x^2) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1}$$

και

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

(ii) Αν $c_n = \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n+1)}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{\sqrt[n]{(n+1)(2n+1)}} = |x|^2\,.$$

Είναι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$ αν και μόνο αν $|x| < 1$. Επομένως η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$ και το άθροισμά της:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n+1)} &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1} \\
&= \frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} - \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{x^2}\ln(1-x^2) & \text{αν } |x| < 1,\ x \neq 0\,, \\ 1 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Θ2. (α΄) Αν η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και θετική, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$

(1,2 μον.)

(β΄) Να βρεθεί η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in (-3, 1)$, αν

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,, \quad f(-1) = 0.$$

(1,3 μον.)

Λύση.

(α΄) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/2} \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,\mathrm{d}x - \int_{1/2}^0 \frac{f(1-t)}{f(1-t)+f(t)}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \text{(αντικατάσταση } x = 1-t\text{)} \\
&= \int_0^{1/2} \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^{1/2} \frac{f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} \frac{f(x)+f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}
f(x) = \int_{-1}^x f'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^x \frac{t}{\sqrt{3-2t-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^x \frac{t}{\sqrt{4-(t+1)^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{x+1} \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{(αντικατάσταση } u = t+1\text{)} \\
&= \int_0^{x+1} \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\,\mathrm{d}u - \int_0^{x+1} \frac{1}{\sqrt{2^2-u^2}}\,\mathrm{d}u \\
&= -\sqrt{4-u^2}\Big|_{u=0}^{u=x+1} - \arcsin\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_{u=0}^{u=x+1} \\
&= 2 - \sqrt{3-2x-x^2} - \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right).
\end{aligned}$$

■

Θ3. (α΄) Αν η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και

$$F(x) := \int_0^1 |x-t|\, f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad x\in[0,1]\,,$$

να υπολογιστεί η $F''(x)$. (1,2 μον.)

(β΄) Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0\,, \qquad x>0\,,$$

με την αντικατάσταση $x = \mathrm{e}^t$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της.

(1,3 μον.)

Λύση.

(α') Είναι

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t - x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x t f(t)\,\mathrm{d}t\,, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) \\ &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Άρα, $F''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$.

(β') Για $x > 0$ είναι $x = \mathrm{e}^t \Leftrightarrow t = \ln x$. Έχουμε

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

και

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\ &= \left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{1}{\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση προκύπτει ότι

$$\mathrm{e}^{2t}\left(\mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) - 3\mathrm{e}^t\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + 4y = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4y = 0\,. \tag{2.27}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2.27) είναι: $r^2 - 4r + 4 = 0$ με ρίζες $r_1 = r_2 = 2$. Επομένως, η γενική λύση της (2.27) είναι

$$y^*(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2 t\mathrm{e}^{2t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = x^2(c_1 + c_2\ln x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

Θ4. (α΄) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 |\ln x| \,\mathrm{d}x \quad \text{και} \quad \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}x\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2 \ln x \,\mathrm{d}x$$

συγκλίνει και στη συνέχεια να υπολογιστεί. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\ln x| \,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x &= -\ln 1 + \lim_{x\to 0^+} x \ln x + \int_0^1 \mathrm{d}x \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} + 1 \\
&= -\lim_{x\to 0^+} x + 1 \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= 1\,,
\end{aligned}$$

δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 |\ln x| \,\mathrm{d}x$ συγκλίνει.

Αν $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ και $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$, είναι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x/x^2}{1/x^{3/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} 2 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0\,.$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} \,\mathrm{d}x$ συγκλίνει, από γνωστό κριτήριο και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}x$ θα συγκλίνει.

(β΄) Είναι

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2 \ln x \,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2 \ln x \,\mathrm{d}x}_{I_2}\,.$$

Αν $f(x) = \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2 \ln x$ και $g_1(x) = |\ln x|$, τότε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|f(x)|}{g_1(x)} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2 = 1\,.$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 |\ln x|\, \mathrm{d}x$ συγκλίνει, από γνωστό κριτήριο το I_1 θα συγκλίνει απόλυτα και επομένως θα συγκλίνει.

Αν τώρα $g_2(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, είναι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2 = 1\,.$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, \mathrm{d}x$ συγκλίνει, από γνωστό κριτήριο θα συγκλίνει και το I_2. Άρα, το I συγκλίνει. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $t = 1/x$, οπότε

$$I = -\int_\infty^0 \left(\frac{1/t+1}{1/t^2+1}\right)^2 \ln(1/t)\, \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\int_0^\infty \frac{1}{t^2}\left(\frac{t^2+t}{t^2+1}\right)^2 \ln t\, \mathrm{d}t = -I\,.$$

Άρα, $I = 0$.

■

Θ5. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} A_n x^n$, όπου $A_n = \sum_{k=1}^n (1/k)$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι $A_{n+1}/A_n = 1 + 1/(n+1)A_n$ και στη συνέχεια ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$. (0,5 μον.)

(β΄) Να αποδειχθεί ότι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = (-1, 1)$. (0,5 μον.)

(γ΄) Να αποδειχθεί ότι η $y = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} A_n x^n$, $x \in (-1, 1)$, είναι η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(1+x)y' + y = \frac{1}{1+x}\,, \quad y(0) = 0\,,\ -1 < x < 1\,.$$

Λύνοντας τη διαφορική εξίσωση να βρεθεί η y, δηλαδή το άθροισμα της δυναμοσειράς. (2 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι $A_{n+1} = A_n + \frac{1}{n+1}$, οπότε $\frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)A_n}$. Αν $c_n = (-1)^{n-1} A_n$, επειδή $\lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{(n+1)A_n}\right) = 1\,.$$

Επομένως η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

(β') Για $x = 1$ έχουμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}A_n$, ενώ για $x = -1$ προκύπτει η σειρά $-\sum_{n=0}^{\infty} A_n$. Επειδή $\lim_{n\to\infty}|(-1)^{n-1}A_n| = \lim_{n\to\infty} A_n = \infty$, $(-1)^{n-1}A_n \nrightarrow 0$ και επομένως η πρώτη σειρά δεν συγκλίνει. Επειδή $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$ και η δεύτερη σειρά δεν συγκλίνει. Άρα, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = (-1, 1)$.

(γ') Έστω $y = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}A_n x^n$, $x \in (-1,1)$. Τότε $y(0) = 0$ και

$$\begin{aligned}
(1+x)y' + y &= (1+x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nA_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}A_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nA_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nA_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}A_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(n+1)A_{n+1} x^{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)A_n x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(n+1)\left[A_{n+1} - A_n\right] x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} x^n \quad \text{(επειδή από την (α') είναι } (n+1)\left[A_{n+1} - A_n\right] = 1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n} x^n = \frac{1}{1+x}\,.
\end{aligned}$$

Δηλαδή η $y = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}A_n x^n$, $x \in (-1,1)$, είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(1+x)y' + y = \frac{1}{1+x}\,, \quad y(0) = 0\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

Η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης: $(1+x)\,y' + y = 0$ είναι

$$y = c\mathrm{e}^{-\int(1/(1+x))\,\mathrm{d}x} = c\mathrm{e}^{-\ln(1+x)} = \frac{c}{1+x}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Αναζητούμε τώρα μία λύση της διαφορικής εξίσωσης της μορφής $y_\varepsilon(x) = \frac{c(x)}{1+x}$. Η y_ε πρέπει να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση, οπότε

$$\begin{aligned}
(1+x)\left[\frac{c(x)}{1+x}\right]' + \frac{c(x)}{1+x} &= \frac{1}{1+x} \\
\Leftrightarrow c'(x) - \frac{c(x)}{1+x} + \frac{c(x)}{1+x} &= \frac{1}{1+x} \\
\Leftrightarrow c'(x) &= \frac{1}{1+x}\,.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, $c(x) = \ln(1+x)$. Επομένως, $y_\varepsilon(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ και η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = \frac{c}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Όμως $y(0) = 0$ συνεπάγεται ότι $c = 0$ και κατά συνέπεια $y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}A_n x^n = \frac{\ln(1+x)}{1+x}\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

■

Να επιλέξετε τέσσερα(4) από τα πέντε(5) θέματα

Επαναληπτικές Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

30 Αυγούστου, 2004

Θ1. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$$

και να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, με $a_n = \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right)$. (1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{-1/\sqrt{1-x^2}}{-1/2\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\,.$$

Επομένως, αν $a_n = \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right)$ και $b_n = \sqrt{1-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}\,.$$

Επειδή $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης για σειρές με θετικούς όρους θα είναι και $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, δηλαδή η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

■

Θ2. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\mathrm{e}^y - 1}{\mathrm{e}^y - 2}\,y' = \frac{1}{x}\,, \quad x > 0\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$\frac{\mathrm{e}^y - 1}{\mathrm{e}^y - 2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,, \quad x > 0\,,$$

οπότε

$$\int \frac{\mathrm{e}^y - 1}{\mathrm{e}^y - 2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{e}^y - 1}{\mathrm{e}^y - 2}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{u-1}{(u-2)\,u}\,\mathrm{d}u && \text{(αντικατάσταση } u = \mathrm{e}^y\text{)} \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2}\ln|u-2| = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\ln|\mathrm{e}^y - 2|\,, \end{aligned}$$

η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\ln|\mathrm{e}^y - 2| = \ln x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

και ισοδύναμα

$$y + \ln|\mathrm{e}^y - 2| - 2\ln x = C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

■

Θ3. Υποθέτουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε

$$f(x) + \int_0^x (x-t)\,f(t)\;\mathrm{d}t = 1\,,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η $y = f(x)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$y'' + ay = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\; y'(0) = 0\,,$$

για κατάλληλο $a \in \mathbb{R}$. Λύνοντας τη διαφορική εξίσωση να βρεθεί η $y = f(x)$.

(1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$f(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,f(t)\;\mathrm{d}t = 1 - x\int_0^x f(t)\;\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\;\mathrm{d}t\,,$$

οπότε

$$f'(x) = -\int_0^x f(t)\;\mathrm{d}t - xf(x) + xf(x) = -\int_0^x f(t)\;\mathrm{d}t$$

και $f''(x) = -f(x)$. Επομένως η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$. Δηλαδή, η $y = f(x)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$y'' + ay = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\; y'(0) = 0\,,$$

με $a = 1$. Η χαρακτηριστική εξίσωση της $y'' + y = 0$ είναι: $r^2 + 1 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \pm\mathrm{i}$. Επομένως, η γενική λύση της $y'' + y = 0$ είναι

$$y\,(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Όμως $y\,(0) = 1$ συνεπάγεται ότι $c_1 = 1$, ενώ $y'\,(0) = 0$ συνεπάγεται ότι $c_2 = 0$. Άρα,

$$y = f\,(x) = \cos x\,.$$

■

Θ4. Να βρεθεί η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \leq -1$, αν

$$f'\,(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,, \quad f\,(-1) = 0\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} f\,(x) = \int_{-1}^{x} f'\,(t)\;\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{x} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{x} \left(-t^{-1}\right)' \sqrt{t^2-1}\;\mathrm{d}t \\ &= -\left.\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right|_{t=-1}^{t=x} + \int_{-1}^{x} \frac{\left(\sqrt{t^2-1}\right)'}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \int_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \ln\left|t + \sqrt{t^2-1}\right|\Big|_{t=-1}^{t=x} \\ &= -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \ln\left(-x - \sqrt{x^2-1}\right)\,. \end{aligned}$$

■

Θ5. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I_\alpha = \int_1^\infty \frac{x^{2-\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $\alpha > 1$. (0,5 μον.)

(β΄) Αν $\alpha > 1$ και

$$J_\alpha = \int_1^\infty \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,,$$

να προσδιοριστούν, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση, οι πραγματικοί αριθμοί λ_α και μ_α τέτοιοι ώστε

$$J_\alpha = \lambda_\alpha + \mu_\alpha I_\alpha\,.$$

Εφαρμογή. Να υπολογιστεί το J_2. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $f(x) = \frac{x^{2-\alpha}}{1+x^2}$ και $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, είναι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1\,.$$

Όμως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\alpha > 1$. Επομένως από γνωστό κριτήριο και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{x^{2-\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ θα συγκλίνει αν και μόνο αν $\alpha > 1$.

(β΄) Αν $\alpha > 1$, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t &= \int_1^x \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)'\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\ln(1+t^2)\Big|_{t=1}^{t=x} - \frac{1}{1-\alpha}\int_1^x t^{1-\alpha}\left(\ln(1+t^2)\right)'\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha-1}} + \frac{\ln 2}{\alpha-1} - \frac{2}{1-\alpha}\int_1^x \frac{t^{2-\alpha}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Όμως

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha-1}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \frac{2}{\alpha-1}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha-3}(1+x^2)} = \frac{2}{\alpha-1}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}(1+x^{-2})} = 0\,.$$

Επομένως

$$J_\alpha = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{\alpha-1} + \frac{2}{\alpha-1}I_\alpha\,.$$

Δηλαδή

$$J_\alpha = \lambda_\alpha + \mu_\alpha I_\alpha \text{ με } \lambda_\alpha = \frac{\ln 2}{\alpha-1} \text{ και } \mu_\alpha = \frac{2}{\alpha-1}\,.$$

Εφαρμογή. Επειδή $I_2 = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty}\arctan x - \arctan 1 = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$, θα είναι $J_2 = \ln 2 + 2I_2 = \ln 2 + \pi/2$.

■

Θ6. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά η συνάρτηση $y = \arctan x$ και να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\,.$$

(1 μον.)

Λύση. Επειδή $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$, $|t| < 1$, είναι $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$, $|t| < 1$. Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Επομένως

$$\frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}\,, \quad |x| < 1\,,$$

οπότε

$$\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\,x^{2n+1}\,.$$

Επειδή η τελευταία δυναμοσειρά συγκλίνει για $x = 1$ (κριτήριο του Leibniz), τελικά έχουμε

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\,x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\,.$$

■

Θ7. Έστω οι δυναμοσειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n x^{2n} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^{2n}}{n}\,.$$

(α΄) Να υπολογιστούν οι ακτίνες και τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών. (1 μον.)

(β΄) Να υπολογιστούν τα αθροίσματα των δυναμοσειρών.

Εφαρμογή. Να αποδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $a_n = (-3)^n x^{2n}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 3x^2$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ αν και μόνο αν $|x| < 1/\sqrt{3}$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^{2n}$ είναι $R_1 = 1/\sqrt{3}$.

Για $x = \pm 1/\sqrt{3}$ παίρνουμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ η οποία αποκλίνει(ο γενικός όρος της σειράς $(-1)^n \nrightarrow 0$). Επομένως το διάστημα σύγκλισης της πρώτης δυναμοσειράς είναι $I_1 = (-1/\sqrt{3},\, 1/\sqrt{3})$.

Αν $b_n = \frac{(-3)^n x^{2n}}{n}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3x^2}{\sqrt[n]{n}} = 3x^2$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$ αν και μόνο αν $|x| < 1/\sqrt{3}$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{2n}}{n}$ είναι $R_2 = 1/\sqrt{3}$.

Για $x = \pm 1/\sqrt{3}$ παίρνουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ η οποία συγκλίνει (κριτήριο του Leibniz). Επομένως το διάστημα σύγκλισης της δεύτερης δυναμοσειράς είναι $I_2 = [-1/\sqrt{3},\, 1/\sqrt{3}]$.

(β΄) Επειδή $1/(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$, $|t| < 1$, για $t = 3x^2$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^{2n} = \frac{1}{1+3x^2}\,, \quad |x| < 1/\sqrt{3}\,.$$

Αν $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{2n}}{n}$, $|x| < 1/\sqrt{3}$, τότε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-3)^n x^{2n-1}}{n} \\ &= \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n x^{2n} \\ &= \frac{2}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^{2n} - 1 \right) \\ &= \frac{2}{x} \left(\frac{1}{1+3x^2} - 1 \right) = \frac{-6x}{1+3x^2}\,. \end{aligned}$$

Επειδή $f(0) = 0$, έχουμε

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{-6t}{1+3t^2}\,\mathrm{d}t = -\ln(1+3x^2)\,.$$

Επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{2n}}{n} = -\ln(1+3x^2)\,, \quad |x| < 1/\sqrt{3}\,.$$

Εφαρμογή. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\frac{x^{2n}}{n}$ συγκλίνει για $x=1/\sqrt{3}$ οπότε

$$\lim_{x\to(1/\sqrt{3})^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln(1+3/3)=-\ln 2\,.$$

■

2.12 Ακαδημαϊκό έτος 2002–3

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

10 Φεβρουαρίου, 2003

Θ1. (α΄) Να αποδειχθεί ότι η (a_n), με $a_n = 1/4 + 2^2/4^2 + 3^2/4^3 + \cdots + n^2/4^n$, είναι ακολουθία Cauchy.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Είναι $4^n \geq n^4$, για κάθε $n \geq 4$. (1 μον.)

(β΄) Αν $b_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{x}\,dx$, να αποδειχθεί ότι

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)} - \frac{1}{\pi}\int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{x^2}\,dx$$

και στη συνέχεια να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. (1,5 μον.)

Απόδειξη. (α΄) <u>*1ος τρόπος*</u>. Είναι $n^4 \leq 4^n$, $\forall n \geq 4$. Για $p \in \mathbb{N}^*$ και $n \geq 3$ έχουμε

$$\begin{aligned}
a_{n+p} - a_n &= \frac{(n+1)^2}{4^{n+1}} + \frac{(n+2)^2}{4^{n+2}} + \cdots + \frac{(n+p)^2}{4^{n+p}} \\
&\leq \frac{(n+1)^2}{(n+1)^4} + \frac{(n+2)^2}{(n+2)^4} + \cdots + \frac{(n+p)^2}{(n+p)^4} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \left\{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$|a_{n+p} - a_n| = a_{n+p} - a_n < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Επομένως η ακολουθία (a_n) είναι Cauchy (άρα συγκλίνει).

<u>*2ος τρόπος*</u>. Το a_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2/4^k\right)$. Αν $c_k = k^2/4^k$, τότε

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+1)^2}{4^{k+1}} \cdot \frac{4^k}{k^2} = \frac{(k+1)^2}{4k^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{4} < 1\,.$$

Από το κριτήριο του λόγου η σειρά συγκλίνει. Ισοδύναμα, η ακολουθία (a_n) συγκλίνει. Άρα, η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, d\left(-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right) \\
&= -\left.\frac{\cos(\pi x)}{\pi x}\right|_{x=n}^{x=n+1} - \frac{1}{\pi}\int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{x^2}\, dx \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n\pi)}{n} - \frac{\cos((n+1)\pi)}{n+1}\right] - \frac{1}{\pi}\int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right] - \frac{1}{\pi}\int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{x^2}\, dx \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right] - \frac{1}{\pi}\int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{x^2}\, dx \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{2n+1}{n\,(n+1)} - \frac{1}{\pi}\int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{x^2}\, dx\,.
\end{aligned}$$

Αν $c_n := \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$, από το κριτήριο του Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ συγκλίνει. Αν $d_n := -\frac{1}{\pi}\int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{x^2}\, dx$, είναι

$$|d_n| \le \frac{1}{\pi}\int_n^{n+1} \frac{|\cos(\pi x)|}{x^2}\, dx \le \frac{1}{\pi n^2}\int_n^{n+1} dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\,.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|$ θα συγκλίνει. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n$ συγκλίνει.

□

Θ2. (α΄) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Να αποδειχθεί ότι η $y = \int_0^x f(t)\sinh(x-t)\, dt$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = f(x)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

(1,2 μον.)

(β΄) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - y = \sin x\,.$$

(1,3 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή

$$y = \int_0^x f(t)\sinh(x-t)\,dt = \int_0^x f(t)\frac{e^{x-t} - e^{-(x-t)}}{2}\,dt$$
$$= \frac{e^x}{2}\int_0^x f(t)e^{-t}\,dt - \frac{e^{-x}}{2}\int_0^x f(t)e^{t}\,dt\,,$$

παραγωγίζοντας έχουμε

$$y' = \frac{e^x}{2}\int_0^x f(t)e^{-t}\,dt + \frac{e^{-x}}{2}\int_0^x f(t)e^{t}\,dt$$

και

$$y'' = f(x) + \frac{e^x}{2}\int_0^x f(t)e^{-t}\,dt - \frac{e^{-x}}{2}\int_0^x f(t)e^{t}\,dt\,.$$

Επομένως $y'' - y = f\,(x)$. Επίσης παρατηρούμε ότι $y(0) = y'(0) = 0$.

(β΄) Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y''-y = 0$ είναι $r^2-1 = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = \pm 1$. Επομένως η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Επειδή $f(x) = \sin x = 0 \cdot e^{0\cdot x}\cos x + e^{0\cdot x}\sin x$ και το $0 + i = i$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής $r^2 - 1 = 0$, αναζητούμε λύση της μορφής $y_\mu = a\cos x + b\sin x$. Αντικαθιστώντας την y_μ στην $y'' - y = \sin x$ έχουμε $-2a\cos x - 2b\sin x = \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $-2a = 0$, $-2b = 1$ και ισοδύναμα $a = 0$, $b = -1/2$. Δηλαδή $y_\mu = -\frac{1}{2}\sin x$. Άρα η γενική λύση της $y'' - y = \sin x$ είναι

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{x} - \frac{1}{2}\sin x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

Θ3. (α΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\ln n}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n.$$

(1 μον.)

(β΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n\,(2n-1)}\,.$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $a_n := \frac{(-1)^n}{1+\ln n} \cdot \frac{1}{3^n}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\,(1+\ln n)}{3^{n+1}\,(1+\ln{(n+1)})}$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{1+\ln{(n+1)}}$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\frac{1+\ln t}{1+\ln{(t+1)}} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\frac{1/t}{1/(t+1)} = \frac{1}{3}\,.$$

Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 3$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x-1| < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4$.

(ι) <u>Για $x = -2$</u> παίρνουμε τη σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\ln n}$. Επειδή $\frac{1}{1+\ln n} \geq \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$ και ως γνωστόν $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$, θα είναι και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\ln n} = \infty$ (η σειρά αποκλίνει).

(ιι) <u>Για $x = 4$</u> παίρνουμε την εναλλάσσουσα σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+\ln n}$ η οποία συγκλίνει (κριτήριο του Leibniz).

Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = (-2, 4]$.

(β΄) Αν $c_n = (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{\sqrt[n]{2n(2n-1)}} = x^2$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ αν και μόνο αν $|x| < 1$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ είναι $R = 1$.
Αν $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$, $|x| < 1$, τότε

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \arctan x\,, \quad |x| < 1\,.$$

Επομένως

$$f(x) = \int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int\frac{x}{1+x^2}\,dx \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\,.$$

Επειδή $f(0) = 0$, θα είναι $C = 0$. Δηλαδή $f(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,, \quad |x| < 1\,.$$

Εφαρμογή. Επειδή από το κριτήριο του Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n(2n-1)}$$

συγκλίνει, είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n(2n-1)} &= \lim_{x\to 1^-}\left(x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\\ &= \arctan 1-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\,.\end{aligned}$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{\pi}{2}-\ln 2\,.$$

■

Θ4. (α΄) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$, τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(1,2 μον.)

(β΄) Να υπολογιστεί το

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/n}e^{-x^2}\sqrt{n^2-x^2}\,dx\,.$$

(1,3 μον.)

Απόδειξη. (α΄) Είναι το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [27].

(β΄) Αν $f(x)=e^{-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{n^2-x^2}$, από το (α΄) έχουμε

$$\int_0^{1/n}e^{-x^2}\sqrt{n^2-x^2}\,dx=e^{-\xi_n^2}\int_0^{1/n}\sqrt{n^2-x^2}\,dx\,,\quad \text{όπου}\,\xi_n\in[0,\,1/n]\,.$$

Όμως

$$\int \sqrt{n^2 - x^2}\, dx = \int n\sqrt{1-\sin^2\theta} \cdot n\cos\theta\, d\theta$$

(αντικατάσταση $x = n\sin\theta$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$)

$$\begin{aligned} &= n^2 \int \cos^2\theta\, d\theta \\ &= \frac{n^2}{2}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{n^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \\ &= \frac{n^2}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) = \frac{n^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{n} + \frac{x}{n}\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}\right) \end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \int_0^{1/n} e^{-x^2}\sqrt{n^2-x^2}\, dx &= e^{-\xi_n^2}\cdot\frac{n^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{n} + \frac{x}{n}\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1/n} \\ &= \frac{e^{-\xi_n^2}}{2}\left(n^2\arcsin\frac{1}{n^2} + \sqrt{1-\frac{1}{n^4}}\right). \end{aligned}$$

Επειδή $0 \le \xi_n \le 1/n$, είναι $\lim_{n\to\infty}\xi_n = 0$ και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty} e^{-\xi_n^2} = 1$. Επίσης

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \arcsin\frac{1}{n^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x^2}{x^2} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x/\sqrt{1-x^4}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = 1\,.$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/n} e^{-x^2}\sqrt{n^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2}(1+1) = 1\,.$$

□

Θ5. (α΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\sin x)^{2/3}(\cos x)^{1/2}}\, dx\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{n!}\int_1^\infty t^n e^{-t}\, dt = e^{-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \qquad (*)$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_1^\infty t^n e^{-t}\, dt$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\sin x)^{2/3}(\cos x)^{1/2}}\,dx\\ &\quad= \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{(\sin x)^{2/3}(\cos x)^{1/2}}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\pi/2} \frac{1}{(\sin x)^{2/3}(\cos x)^{1/2}}\,dx}_{I_2}\,.\end{aligned}$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)^{-2/3}(\cos x)^{-1/2}}{x^{-2/3}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{2/3} \frac{1}{(\cos x)^{1/2}} = 1$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^{-2/3}\,dx = 3$ συγκλίνει, από γνωστό κριτήριο θα συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_1.

Επειδή τώρα

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\sin x)^{-2/3}(\cos x)^{-1/2}}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{-1/2}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)^{1/2} \frac{1}{(\sin x)^{2/3}} = 1$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\pi/2} (\pi/2-x)^{-1/2}\,dx = 2\left(\pi/2-1\right)$ συγκλίνει, από γνωστό κριτήριο θα συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα I_2. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\sin x)^{2/3}(\cos x)^{1/2}}\,dx$$

θα συγκλίνει.

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} te^{-t}\,dt &= \lim_{x\to\infty} \int_1^x te^{-t}\,dt\\ &= \lim_{x\to\infty}\left[-\,te^{-t}\Big|_{t=1}^{t=x} + \int_1^x e^{-t}\,dt\right] \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\ &= -\lim_{x\to\infty} xe^{-x} + e^{-1} - \lim_{x\to\infty} e^{-x} + e^{-1} = 2e^{-1} = e^{-1}\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

και η $(*)$ ισχύει για $n = 1$. Αν υποθέσουμε ότι η $(*)$ ισχύει για $n = N$, τότε

$$\begin{aligned}\frac{1}{(N+1)!}\int_1^{\infty} t^{N+1}e^{-t}\,dt &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(N+1)!}\int_1^{x} t^{N+1}e^{-t}\,dt\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(N+1)!}\left[-\,t^{N+1}e^{-t}\Big|_{t=1}^{t=x} + (N+1)\int_1^{x} t^{N}e^{-t}\,dt\right]\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\ &= -\frac{1}{(N+1)!}\lim_{x\to\infty} x^{N+1}e^{-x} + \frac{e^{-1}}{(N+1)!} + \frac{1}{N!}\int_1^{\infty} t^{N}e^{-t}\,dt\\ &= e^{-1}\frac{1}{(N+1)!} + e^{-1}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!} = e^{-1}\sum_{k=0}^{N+1}\frac{1}{k!}\,,\end{aligned}$$

δηλαδή η $(*)$ ισχύει για $n = N+1$. Ας σημειωθεί ότι

$$\lim_{x\to\infty} x^{N+1}e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{N+1}}{e^x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(N+1)\,x^{N}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{(N+1)!}{e^x} = 0\,.$$

Άρα η $(*)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επειδή ως γνωστόν $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\left(x^k/k!\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $\sum_{k=0}^{\infty}(1/k!) = e$ και από την $(*)$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_1^{\infty} t^{n}e^{-t}\,dt = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e^{-1}\cdot e = 1\,.$$

■

Να επιλέξετε τέσσερα(4) από τα πέντε(5) θέματα

Επαναληπτικές Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

25 Αυγούστου, 2003

Θ1. (α΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}}\,.$$

(0,8 μον.)

(β΄) Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης με εξίσωση $y = \arcsin e^x$, $-\ln 2 \le x \le 0$.

(1,7 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $a_n = 3/\left(\sqrt{n} + 2^{(-1)^n}\right)$ και $b_n = 1/\sqrt{n}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1 + 2^{(-1)^n}/\sqrt{n}} = 3\,.$$

Ας σημειωθεί ότι

$$0 < \frac{2^{(-1)^n}}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ και επομένως } \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(-1)^n}}{\sqrt{n}} = 0\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1/n^{1/2}\right)$ αποκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3/\left(\sqrt{n} + 2^{(-1)^n}\right)\right)$ θα αποκλίνει.

(β΄) Το μήκος της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\right)^2}\, dx = \int_{-\ln 2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx \\
&= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{t\sqrt{1 - t^2}}\, dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t\text{)} \\
&= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{t^2\sqrt{(1/t)^2 - 1}}\, dt \\
&= -\int_{2}^{1} \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}\, du = \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}\, du \qquad \text{(αντικατάσταση } u = 1/t \Leftrightarrow t = 1/u\text{)} \\
&= \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)\Big|_{u=1}^{u=2} = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

<u>*Σημείωση*</u>. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{1/2}^{1} \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}\, dt$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την αντικατάσταση $t = \sin\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Τότε

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{t\sqrt{1 - t^2}}\, dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\, d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\sin\theta}\, d\theta \\
&= -\ln\left(\frac{1}{\sin\theta} + \cot\theta\right)\Bigg|_{\theta=\pi/6}^{\theta=\pi/2} = -\ln 1 + \ln(2 + \sqrt{3}) = \ln(2 + \sqrt{3})\,.
\end{aligned}$$

■

Θ2. (α΄) Υποθέτουμε ότι η φραγμένη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

(1,2 μον.)

(β΄) Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{k^2-2kn+2n^2}}\ .$$

(1,3 μον.)

Λύση.

(α΄) Έστω $P_n = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ακολουθία διαμερίσεων του διαστήματος $[0,1]$, όπου $x_k = k/n$, $0 \le k \le n$. Επειδή $x_k - x_{k-1} = k/n - (k-1)/n = 1/n$, είναι $\lim_{n\to\infty}\|P_n\| = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Αν $\sigma = (\xi_k)_{k=1}^{n}$, με $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$ $(1 \le k \le n)$, τότε το άθροισμα του Riemann

$$S\left(f, P_n, \sigma\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\ .$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann

$$\int_0^1 f\left(x\right)\,dx = \lim_{n\to\infty} S\left(f, P_n, \sigma\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\ . \tag{2.28}$$

Αν επιλέξουμε το $\xi_k = k/n$, $1 \le k \le n$, τότε από τη (2.28) προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f\left(x\right)\,dx\,. \tag{2.29}$$

(β΄) Είναι

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{k^2-2kn+2n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{\sqrt{(k/n)^2-2(k/n)+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

όπου $f\left(x\right) = x/\sqrt{x^2-2x+2}$. Επομένως, από τη (2.29) έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{k^2-2kn+2n^2}} &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+\left(x-1\right)^2}}\,dx \\
&= \int_{-1}^0 \frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t = x-1\text{)} \\
&= \int_{-1}^0 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt + \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \\
&= \left[\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]\Big|_{t=-1}^{t=0} \\
&= 1 - \sqrt{2} - \ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\ .
\end{aligned}$$

■

Θ3. (α΄) Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-t^2}\cos tx\,dt$, $x\in\mathbb{R}$, συγκλίνει. (0,6 μον.)

(β΄) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_0^\infty e^{-t^2}\cos tx\,dt$, $x\in\mathbb{R}$, με παράγωγο

$$f'(x)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t^2}\cos tx\right)\,dt\,.$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$f'(x)+\frac{x}{2}f(x)=0\,,\quad f(0)=\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Να βρεθεί η f. (1,9 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι $\int_0^\infty |e^{-t^2}\cos tx|\,dt\le\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$. Αν αποδείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ συγκλίνει, τότε από το κριτήριο σύγκρισης το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-t^2}\cos tx\,dt$ θα συγκλίνει απόλυτα και επομένως θα συγκλίνει. Όμως για κάθε $t\ge 1$ είναι $e^{-t^2}\le e^{-t}$ οπότε

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\int_0^1 e^{-t^2}\,dt+\int_1^\infty e^{-t^2}\,dt\le\int_0^1 e^{-t^2}\,dt+\int_1^\infty e^{-t}\,dt\,,$$

όπου το $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα και το $\int_1^\infty e^{-t}\,dt$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\int_1^\infty e^{-t}\,dt=\lim_{r\to\infty}\int_1^r e^{-t}\,dt=\lim_{r\to\infty}\left(-e^{-r}+e\right)=e\,.$$

Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ συγκλίνει (αποδεικνύεται ότι $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}/2$).

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\int_0^\infty -te^{-t^2}\sin tx\,dt\\
&=\lim_{r\to\infty}\int_0^r (e^{-t^2}/2)'\sin tx\,dt\\
&=\lim_{r\to\infty}\left[\frac{e^{-t^2}}{2}\sin tx\Bigg|_{t=0}^{t=r}-\frac{x}{2}\int_0^r e^{-t^2}\cos tx\,dt\right]\qquad\text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\
&=\lim_{r\to\infty}\frac{e^{-r^2}}{2}\sin rx-\frac{x}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos tx\,dt\,.
\end{aligned}$$

Όμως

$$\left|\frac{e^{-r^2}}{2}\sin rx\right| \le \frac{e^{-r^2}}{2} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \quad \text{και επομένως} \lim_{r\to\infty}\frac{e^{-r^2}}{2}\sin rx = 0\,.$$

Άρα,

$$f'(x) = -\frac{x}{2}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos tx\,dt = -\frac{x}{2}f(x)\,,$$

δηλαδή η f είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$f'(x) + \frac{x}{2}f(x) = 0\,, \quad f(0) = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Ως γνωστόν, η γενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι

$$f(x) = ce^{-\int (x/2)\,dx} = ce^{-x^2/4}\,.$$

Επειδή $f(0) = \sqrt{\pi}/2$, θα είναι $c = \sqrt{\pi}/2$. Άρα,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2/4}\,.$$

■

Θ4. (α΄) Έστω η συνάρτηση $f : [n,\infty) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι θετική και φθίνουσα. Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_n^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει. Αν η σειρά $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει, να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \le \int_n^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{k=n}^{\infty} f(k)\,. \qquad (*)$$

(1,2 μον.)

(β΄) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1/\left(e^{k+1}+e^{3-k}\right)\right)$ συγκλίνει και ότι

$$\frac{\pi}{4e^2} \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{e^{k+1}+e^{3-k}} \le \frac{\pi}{4e^2} + \frac{1}{2e^2}\,.$$

(1,3 μον.)

Απόδειξη. (α΄) Για κάθε $x \in [k,k+1]$ με $k \in \mathbb{N}^*$, $k \ge n$, έχουμε $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$. Επομένως

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\;dx \le \int_k^{k+1} f(x)\;dx \le \int_k^{k+1} f(k)\;dx$$

και ισοδύναμα

$$f\,(k+1) \le \int_k^{k+1} f\,(x)\;dx \le f\,(k)\;. \tag{2.30}$$

Στη συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες που προκύπτουν από τη (2.30) για $k = n, n+1, \ldots, N-1$, οπότε

$$\sum_{k=n}^{N-1} f(k+1) \le \sum_{k=n}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=n}^{N-1} f\,(k)\;.$$

Ισοδύναμα,

$$\sum_{k=n+1}^{N} f(k) \le \int_n^N f(x)\,dx \le \sum_{k=n}^{N-1} f(k)\,. \tag{2.31}$$

Υποθέτουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, έστω $\int_n^\infty f(x)\,dx = A$. Τότε, από την αριστερή ανισότητα της (2.31) προκύπτει ότι $\sum_{k=n+1}^{N} f(k) \le A$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$. Δηλαδή τα μερικά αθροίσματα της σειράς θετικών όρων $\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ είναι φραγμένα. Κατά συνέπεια η σειρά $\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ θα συγκλίνει. Άρα και η σειρά $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ θα συγκλίνει.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, αρκεί να αποδείξουμε ότι η απόκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_n^\infty f(x)\,dx$ συνεπάγεται την απόκλιση της σειράς $\int_n^\infty f(x)\,dx$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει, δηλαδή

$$\lim_{N\to\infty} \int_n^N f(x)\,dx = \infty\,.$$

Τότε, από τη δεξιά ανισότητα της (2.31) θα είναι και $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=n}^{N-1} f(k) = \infty$. Δηλαδή $\sum_{k=n}^{\infty} f(k) = \infty$ (η σειρά αποκλίνει). Τέλος, αν η σειρά $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει, από τη (2.31) έπεται ότι

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \le \lim_{N\to\infty} \int_n^N f(x)\,dx \le \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n}^{N-1} f(k)$$

που είναι ισοδύναμη με την $(*)$.

(β΄) Αν $f(x) := \frac{1}{e^{x+1}+e^{3-x}}$, η συνάρτηση f είναι θετική και φθίνουσα στο διάστημα $[1,\infty)$.

Πράγματι, $f'(x) = -\frac{e^{x+1}-e^{3-x}}{e^{x+1}+e^{3-x}} \geq 0$, $\forall x \geq 1$. Είναι

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{e^{x+1}+e^{3-x}}\,dx &= \int_1^\infty \frac{1}{e^{x+1}+e^4\cdot e^{-(x+1)}}\,dx \\
&= \int_{e^2}^\infty \frac{1}{t^2+e^4}\,dt \qquad (\text{αντικατάσταση } t = e^{x+1} \Leftrightarrow x = \ln t - 1) \\
&= \lim_{r\to\infty}\int_{e^2}^r \frac{1}{t^2+(e^2)^2}\,dt = \frac{1}{e^2}\lim_{r\to\infty} \arctan\left(\frac{t}{e^2}\right)\Bigg|_{t=e^2}^{t=r} \\
&= \frac{1}{e^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4e^2}\,.
\end{aligned}
$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, από την (α΄) και η σειρά

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{e^{k+1}+e^{3-k}}$$

θα συγκλίνει. Από τη διπλή ανισότητα $(*)$ έχουμε

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{e^{k+1}+e^{3-k}} \leq \frac{\pi}{4e^2} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{e^{k+1}+e^{3-k}} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4e^2} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{e^{k+1}+e^{3-k}} \leq \frac{\pi}{4e^2}+\frac{1}{2e^2}\,.$$

□

Θ5. (α΄) Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $y = \arctan x$. (0,6 μον.)

(β΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}\,.$$

Εφαρμογή. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$. (1,9 μον.)

Λύση.

(α΄) Από τη γεωμετρική σειρά $1/(1+t) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n t^n$, $|t|<1$, συνεπάγεται ότι $1/\left(1+t^2\right) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n t^{2n}$, $|t|<1$. Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,, \quad |x|<1\,.$$

(β΄) Αν $c_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2+1/n}}{\sqrt[n]{4n^2-1}} = x^2$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$ αν και μόνο αν $|x| < 1$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$ είναι $R = 1$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $y = \arctan x$ σε δυναμοσειρά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{2n+1} - \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - x\right\} \\
&= -\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - x\right\} \\
&= -\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(\arctan x - x)\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\arctan x\,.$$

Εφαρμογή. Επειδή από το κριτήριο του Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n^2-1}$$

συγκλίνει, είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\arctan x\right) = \frac{1}{2} - \arctan 1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\,.$$

■

Να επιλέξετε τέσσερα(4) από τα πέντε(5) θέματα

2.13 Ακαδημαϊκό έτος 2001–2

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

11 Φεβρουαρίου, 2002

Θ1. (α΄) Έστω η ακολουθία (a_n) με

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n}\,, \; n \in \mathbb{N}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι η (a_n) συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της. (1 μον.)

(β΄) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές :

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$. (0,8 μον.)

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$. (0,7 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή $a_n \geq 1$, $\forall n \geq 1$, είναι

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{2 + a_n}{1 + a_n} - \frac{2 + a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1 + a_n)(1 + a_{n-1})} \leq \frac{1}{4}\,|a_n - a_{n-1}|\;,$$

με $0 < 1/4 < 1$. Δηλαδή η (a_n) είναι συστολική ακολουθία και επομένως συγκλίνει, έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 1$. Επειδή και $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, από τη σχέση $a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n}$ προκύπτει ότι $a = \frac{2+a}{1+a}$. Ισοδύναμα, $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$. Όμως είναι $a \geq 1$, οπότε $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

(i) Αν $a_n := \left(\dfrac{an}{n+1}\right)^n$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\,|a| = |a|\;.$$

Από το κριτήριο της ρίζας η σειρά συγκλίνει απόλυτα για $|a| < 1$ και αποκλίνει για $|a| > 1$. Για $|a| = 1$ είναι $|a_n| = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1 + 1/n)^n} = \frac{1}{e} \neq 0\,.$$

Επειδή $a_n \nrightarrow 0$, η σειρά αποκλίνει για $|a| = 1$.

(ii) Ως γνωστόν $\ln n < n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και επομένως

$$0 < \frac{1}{n^2 - \ln n} < \frac{1}{n^2 - n} < \frac{2}{n^2}\,, \quad \forall n \geq 2\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$ θα συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$ συγκλίνει.

■

Θ2. (α΄) Αν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(x) = \displaystyle\int_0^x tg(t-x)\,dt$, να αποδειχθεί ότι

$$f''(x) + f'(x) = g(-x) + \int_{-x}^{0} g(t)\, dt\,, \quad f(0) = f'(0) = 0\,.$$

(1,5 μον.)

(β΄) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + y' = e^{-x}\,, \quad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή

$$f(x) = \int_0^x tg(t-x)\, dt = \int_{-x}^{0} (u+x)\, g(u)\, du \qquad (\text{αντικατάσταση } u = t - x)$$

$$= -\int_0^{-x} ug(u)\, du - x\int_0^{-x} g(u)\, du\,,$$

παραγωγίζοντας έχουμε

$$f'(x) = -xg(-x) - \int_0^{-x} g(u)\, du + xg(-x) = -\int_0^{-x} g(u)\, du$$

και

$$f''(x) = g(-x)\,.$$

Επομένως,

$$f''(x) + f'(x) = g(-x) + \int_{-x}^{0} g(t)\, dt\,, \quad f(0) = f'(0) = 0\,.$$

(β′) Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y''+y'=0$ είναι $r^2+r=0$, με ρίζες $r_1=-1$ και $r_2=0$. Επομένως, η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y\,(x)=c_1e^{-x}+c_2\,,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

Επειδή $f\,(x)=e^{-x}$ και το -1 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής $r^2+r=0$, αναζητούμε λύση της μορφής $y_\mu=axe^{-x}$. Αντικαθιστώντας την y_μ στην $y''+y'=e^{-x}$ έχουμε

$$\left(axe^{-x}\right)''+\left(axe^{-x}\right)'=e^{-x}\,,\quad \text{οπότε } -ae^{-x}=e^{-x}\Leftrightarrow a=-1\,.$$

Δηλαδή $y_\mu=-xe^{-x}$. Άρα, η γενική λύση της $y''+y'=e^{-x}$ είναι

$$y=-xe^{-x}+c_1e^{-x}+c_2\,,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\,.$$

Από τις αρχικές συνθήκες $y(0)=y'(0)=0$ προκύπτει ότι

$$\{c_1+c_2=0,\quad -c_2-1=0\}\Leftrightarrow\{c_1=1,\quad c_2=-1\}\ .$$

Η ζητούμενη λύση του προβλήματος είναι

$$y=1-(1+x)\,e^{-x}\,.$$

■

Θ3. (α′) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι $\lim_{x\to\infty}xf(x)=2$, $\lim_{x\to\infty}xf''(x)=0$. Αν $x>0$, να αποδειχθεί ότι για κάποιο $\xi\in(x,\,x+1)$ είναι

$$xf'(x)=\frac{x}{x+1}(x+1)f(x+1)-xf(x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\xi}\cdot\xi f''(\xi)$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί το $\lim_{x\to\infty}xf'(x)$. (1,2 μον.)

(β′) Να διατυπωθεί το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{a\to0^+}\int_0^{\sqrt{a}}\frac{af(x)}{a^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}f(0)\,.$$

(1,3 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $x > 0$, από τον τύπο του Taylor είναι

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!} f''(\xi) \\ \Leftrightarrow x f'(x) &= \frac{x}{x+1}(x+1) f(x+1) - x f(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\xi} \cdot \xi f''(\xi) \ , \end{aligned}$$

για κάποιο ξ με $x < \xi < x+1$. Επειδή $\frac{x}{x+1} < \frac{x}{\xi} < 1$, είναι $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi} = 1$. Επίσης, από την υπόθεση έχουμε ότι $\lim_{x\to\infty} (x+1) f(x+1) = \lim_{x\to\infty} x f(x) = 2$ και $\lim_{x\to\infty} \xi f''(\xi) = 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x f'(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \cdot \lim_{x\to\infty} (x+1) f(x+1) - \lim_{x\to\infty} x f(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi} \cdot \lim_{x\to\infty} \xi f''(\xi) \\ &= 2 - 2 - 0 = 0 \, . \end{aligned}$$

(β΄) Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η συνάρτηση $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη με $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$\int_\alpha^\beta f(x) g(x) \, dx = f(\xi) \int_\alpha^\beta g(x) \, dx \, .$$

Επομένως αν $g(x) = \frac{a}{a^2+x^2}$, από τον προηγούμενο τύπο έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{a}} \frac{a f(x)}{a^2+x^2} \, dx &= f(\xi(a)) \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{a^2+x^2} \, dx \\ &= f(\xi(a)) \arctan(x/a) \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{a}} = f(\xi(a)) \arctan(1/\sqrt{a}) \, , \end{aligned}$$

όπου $0 \leq \xi(a) \leq \sqrt{a}$. Επειδή $\lim_{a\to 0^+} \xi(a) = 0$ και η f είναι συνεχής, είναι $\lim_{a\to 0^+} f(\xi(a)) = f(0)$. Άρα

$$\lim_{a\to 0^+} \int_0^{\sqrt{a}} \frac{a f(x)}{a^2+x^2} \, dx = \lim_{a\to 0^+} f(\xi(a)) \arctan(1/\sqrt{a}) = \frac{\pi}{2} f(0) \, .$$

■

Θ4. (α΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt[3]{\tan x}} \, dx \, .$$

(1 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $|x| < 1$, να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $y = \ln(1+x)$. Στη συνέχεια να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\frac{x^3}{1\cdot 3} - \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 5} - \frac{x^6}{4\cdot 6} + \cdots \ .$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\tan x}}$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $0 < x \leq \pi/4$, είναι $f(x), g(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, \pi/4]$. Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\cos x}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{1/3} = 1$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/4} (1/\sqrt[3]{x})\, dx = \int_0^{\pi/4} x^{-1/3}\, dx$ συγκλίνει, από γνωστό κριτήριο για γενικευμένα ολοκληρώματα μη αρνητικών συναρτήσεων και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/4} \left(1/\sqrt[3]{\tan x}\right) dx$ θα συγκλίνει.

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad |x| < 1\,.\end{aligned}$$

Ο n-οστός όρος της δυναμοσειράς είναι $a_n := (-1)^{n-1}\dfrac{1}{(n-2)n}$. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)n}{(n-1)(n+1)} = 1\,,$$

η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$. Αν

$$f(x) = \frac{x^3}{1\cdot 3} - \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 5} - \frac{x^6}{4\cdot 6} + \cdots, \quad |x| < 1\,,$$

τότε

$$f'(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \cdots = x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right) = x\ln(1+x)\ ,\ |x| < 1\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt &= \int_0^x t\ln(1+t)\,dt \\
&= \frac{t^2}{2}\ln(1+t)\Big|_{t=0}^{t=x} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt \quad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{(1-t^2)-1}{1+t}\,dt \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\int_0^x (1-t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=x} - \frac{1}{2}\ln(1+t)|_{t=0}^{t=x} \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(1+x)\ .
\end{aligned}$$

Άρα

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x) + \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)\ .$$

■

Θ5. Έστω η συνάρτηση $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι θετική και παραγωγίσιμη με $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ συγκλίνει.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{f(t)}\,dt$ συγκλίνει.

(β΄) Αν $x > 0$, να αποδειχθεί ότι

$$0 < \frac{x}{f(2x)} < \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt$$

και στη συνέχεια ότι $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{f(x)} = 0$.

(γ΄) Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη της f, να αποδειχθεί ότι

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{f(t)}\,dt = -\frac{1}{f(1)} + \int_{f(1)}^{\infty} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\,dt\,,$$

δηλαδή ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\,dt$ συγκλίνει.

(δ΄) Να αποδειχθεί πρώτα ότι

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2} < \int_1^{N+1} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\,dt$$

και στη συνέχεια ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ συγκλίνει. (2,5 μον.)

Απόδειξη. Επειδή η $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα, από γνωστό θεώρημα η f^{-1} θα είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα. Επίσης οι f και f^{-1} είναι θετικές. Η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} = 0$ και επομένως $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$. Άρα $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(α΄) Επειδή η συνάρτηση $y = 1/f(x)$ είναι θετική, γνήσια φθίνουσα και από την υπόθεση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ συγκλίνει, από το κριτήριο του γενικευμένου ολοκληρώματος για σειρές και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{1}{f(t)}\, dt$ θα συγκλίνει.

(β΄) Αν $0 < x \le t \le 2x$, τότε $0 < f(t) \le f(2x)$ και κατά συνέπεια $0 < \frac{1}{f(2x)} \le \frac{1}{f(t)}$. Από την τελευταία ανισότητα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & 0 < \int_x^{2x} \frac{1}{f(2x)}\, dt < \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt \\ & \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{f(2x)} < \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2}\frac{2x}{f(2x)} < \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt\,. \end{aligned}$$

Επομένως αν αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt = 0$, τότε θα είναι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{f(2x)} = 0 \text{ και κατά συνέπεια } \lim_{x\to\infty} \frac{x}{f(x)} = 0\,.$$

Όμως, επειδή από την (α΄) το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{1}{f(t)}\, dt$ συγκλίνει, είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt &= \lim_{x\to\infty} \left[\int_x^{1} \frac{1}{f(t)}\, dt + \int_1^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt\right] \\ &= -\int_1^{\infty} \frac{1}{f(t)}\, dt + \int_1^{\infty} \frac{1}{f(t)}\, dt = 0\,. \end{aligned}$$

(γ΄) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{f(x)} = 0$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{f(t)}\, dt &= \lim_{r\to\infty} \int_1^{r} \frac{1}{f(t)}\, dt \\ &= \lim_{r\to\infty} \left.\frac{t}{f(t)}\right|_{t=1}^{t=r} - \lim_{r\to\infty} \int_1^{r} t \left(\frac{1}{f(t)}\right)' dt \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{r}{f(r)} - \frac{1}{f(1)} + \lim_{r\to\infty} \int_1^{r} \frac{t f'(t)}{f(t)^2}\, dt \\ &= -\frac{1}{f(1)} + \lim_{r\to\infty} \int_1^{r} \frac{t f'(t)}{f(t)^2}\, dt \\ &= -\frac{1}{f(1)} + \lim_{r\to\infty} \int_{f(1)}^{f(r)} \frac{f^{-1}(x)}{x^2}\, dx \qquad \text{(αντικατάσταση } x = f(t)\text{)} \\ &= -\frac{1}{f(1)} + \int_{f(1)}^{\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x^2}\, dx \end{aligned}$$

και επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt$ συγκλίνει.

(δ΄) Επειδή για $n \le t \le n+1$ είναι

$$\frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2} < \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\,,$$

ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[n, n+1]$ έχουμε

$$\frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2} = \int_n^{n+1} \frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2}\, dt < \int_n^{n+1} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt\,.$$

Αν $N \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2} &< \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt \\ &= \int_1^2 \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt + \int_2^3 \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt + \cdots + \int_N^{N+1} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt \\ &= \int_1^{N+1} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt \le \int_1^\infty \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt\,.\end{aligned}$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\, dt$ συγκλίνει, τα μερικά αθροίσματα της σειράς θετικών όρων $\sum_{n=1}^\infty \frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2}$ είναι άνω φραγμένα και επομένως η σειρά θα συγκλίνει. Όμως

$$0 < \frac{f^{-1}(n)}{4n^2} \le \frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2}\,, \quad n \ge 1\,,$$

οπότε από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{f^{-1}(n)}{4n^2}$ θα συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ συγκλίνει.

□

Να επιλέξετε τέσσερα(4) από τα πέντε(5) θέματα

Επαναληπτικές Εξετάσεις στα Μαθηματικά Ια

16 Σεπτεμβρίου, 2002

Θ1. (α΄) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με

$$x_n = \frac{\arctan 1}{2} + \frac{\arctan 2}{2^2} + \cdots + \frac{\arctan n}{2^n}$$

είναι ακολουθία Cauchy. (1 μον.)

(β΄) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ σειρά θετικών όρων με

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = \lambda\,.$$

Αν $\lambda > 1$, να αποδειχθεί ότι η σειρά συγκλίνει (να θεωρήσετε και την περίπτωση $\lambda = +\infty$). (1,5 μον.)

Απόδειξη. (α΄) *1ος τρόπος*. Για $p \in \mathbb{N}$ και $n \geq 3$ έχουμε

$$\begin{aligned} x_{n+p} - x_n &= \frac{\arctan(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\arctan(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\arctan(n+p)}{2^{n+p}} \\ &< \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2^{n+2}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2^{n+2}} \cdot \frac{1 - 1/2^p}{1 - 1/2} < \frac{\pi}{2^{n+1}}\,. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$|x_{n+p} - x_n| = x_{n+p} - x_n < \frac{\pi}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Επομένως η ακολουθία (x_n) είναι Cauchy (άρα συγκλίνει).

2ος τρόπος. Το x_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{2^k}$. Επειδή

$$0 < \frac{\arctan k}{2^k} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^k}$$

και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{2^k}$ θα συγκλίνει. Ισοδύναμα, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει. Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.

(β΄) Έστω $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda - \varepsilon > 1$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = \lambda$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall n \geq n_0 : \left|\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} - \lambda\right| < \varepsilon \Longrightarrow \forall n \geq n_0 :\ 1 < \lambda - \varepsilon < \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}\,.$$

Δηλαδή

$$\forall n \geq n_0 :\ \ln n^{\lambda-\varepsilon} < \ln(1/a_n) \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} > n^{\lambda-\varepsilon} \Leftrightarrow a_n < \frac{1}{n^{\lambda-\varepsilon}}\,.$$

Άρα

$$\forall n \geq n_0 :\ 0 < a_n < \frac{1}{n^{\lambda-\varepsilon}}\,.$$

Επειδή $\lambda-\varepsilon>1$, η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda-\varepsilon}}$ συγκλίνει. Επομένως από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ θα συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Έστω τώρα $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=\infty$. Αν $a>1$, τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall n\geq n_0:\ \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}>a\Leftrightarrow \ln(1/a_n)>\ln n^a\Leftrightarrow 1/a_n>n^a\Leftrightarrow a_n<1/n^a\,.$$

Άρα

$$\forall n\geq n_0:\ 0<a_n<\frac{1}{n^a}\,.$$

Επειδή $a>1$, η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ συγκλίνει. Επομένως από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ θα συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει. □

Θ2. (α΄) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n x^n\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Να μετασχηματισθεί η διαφορική εξίσωση:

$$(x-2)^2\,y''-3\,(x-2)\,y'+4y=0\,,\qquad x>2$$

με την αντικατάσταση $x=2+e^t$ και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της.

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $a_n=\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n$, τότε

$$a_n=\begin{cases}\left(\frac{3}{4}\right)^{2k} & \text{αν } n=2k,\\ \left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1} & \text{αν } n=2k+1\,.\end{cases}$$

Επομένως,

$$\sqrt[2k]{a_{2k}}=\frac{3}{4}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{3}{4}\quad\text{και}\quad \sqrt[2k+1]{a_{2k+1}}=\frac{1}{6}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{6}\,.$$

Κατά συνέπεια, $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n}=\max\{3/4\,,1/6\}=3/4$. Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=4/3$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για

$$|x|<4/3\Leftrightarrow -4/3<x<4/3\,.$$

Για $x = \pm 4/3$ παίρνουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, με

$$c_n = \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n \left(\pm\frac{4}{3}\right)^n .$$

Τότε, $c_{2k} = (3/4)^{2k}\,(\pm 4/3)^{2k} = 1$. Επομένως, επειδή η ακολουθία c_n δεν συγκλίνει στο μηδέν, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ αποκλίνει. Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = (-4/3,\, 4/3)$.

(β΄) Επειδή $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t$, είναι

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

και

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\ &= \left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{1}{\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} . \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση προκύπτει ότι

$$\mathrm{e}^{2t}\cdot\left(\mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) - 3\mathrm{e}^t\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + 4y = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4y = 0 . \tag{2.32}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2.32) είναι $r^2 - 4r + 4 = 0$, με ρίζες $r_1 = r_2 = 2$. Επομένως, η γενική λύση της (2.32) είναι

$$y^*(t) = (c_1 + c_2 t)\,\mathrm{e}^{2t} , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $(x-2)^2\, y'' - 3\,(x-2)\,y' + 4y = 0$, $x > 2$, είναι

$$y(x) = [c_1 + c_2 \ln(x-2)]\,(x-2)^2 , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

■

Θ3. (α΄) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx$. (1 μον.)

(β΄) Να διατυπωθεί το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα και να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1/(n+3)^2}^{1/n^2} x^{-3/2}e^{x^2}\,dx\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned} I=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2 x+4\cos^2 x}\,dx &= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos^2 x\,(\tan^2 x+4)}\,dx \\ &= \int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+4}\,dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t=\tan x\text{)} \\ &= \lim_{r\to\infty}\int_0^{r}\frac{1}{t^2+2^2}\,dt=\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\arctan(t/2)\Big|_{t=0}^{t=r}=\frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

(β΄) Αν η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και η συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, με $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Επομένως αν $f(x)=e^{x^2}$ και $g(x)=x^{-3/2}$, από τον προηγούμενο τύπο έχουμε

$$\int_{1/(n+3)^2}^{1/n^2} x^{-3/2}e^{x^2}\,dx=e^{\xi_n^2}\int_{1/(n+3)^2}^{1/n^2} x^{-3/2}\,dx=-e^{\xi_n^2}\,2x^{-1/2}\Big|_{x=1/(n+3)^2}^{1/n^2}=6e^{\xi_n^2}\,,$$

για κάποιο ξ_n, με $1/(n+3)^2\leq\xi_n\leq 1/n^2$. Τότε $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$ και επειδή η $y=e^{x^2}$ είναι συνεχής συνάρτηση, $\lim_{n\to\infty}e^{\xi_n^2}=e^0=1$. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1/(n+3)^2}^{1/n^2} x^{-3/2}e^{x^2}\,dx=6\,.$$

■

Θ4. Έστω (a_n) γνήσια αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $a_{n+1}-a_n\leq M,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

(α΄) Αν η συνάρτηση $f:[a_1,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, θετική και φθίνουσα και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a_1}^{\infty}f(t)\,dt$ αποκλίνει, δείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)$ θα αποκλίνει.

(1,7 μον.)

(β΄) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$. (0,8 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή η f είναι φθίνουσα, για κάθε $t \in [a_n, a_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$, είναι $f(t) \le f(a_n)$ και κατά συνέπεια

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt \le \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(a_n)\,dt = f(a_n)(a_{n+1}-a_n)\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{a_1}^{a_{n+1}} f(t)\,dt &= \int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt + \int_{a_2}^{a_3} f(t)\,dt + \cdots + \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt \\ &\le f(a_1)(a_2-a_1) + f(a_2)(a_3-a_2) + \cdots + f(a_n)(a_{n+1}-a_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(a_k)(a_{k+1}-a_k)\,.\end{aligned}$$

Επειδή $a_{n+1} - a_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ και η f είναι θετική, από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε

$$\int_{a_1}^{a_{n+1}} f(t)\,dt \le M \sum_{k=1}^{n} f(a_k)\,.$$

Από την υπόθεση το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a_1}^{\infty} f(t)\,dt$ αποκλίνει, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_1}^{a_{n+1}} f(t)\,dt = \int_{a_1}^{\infty} f(t)\,dt = \infty\,.$$

Επομένως, από την τελευταία ανισότητα προκύπτει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(a_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a_k) = \infty\,.$$

Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ αποκλίνει.

(β΄) Αν $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$, τότε $f'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$. Επομένως, αν επιλέξουμε το $k \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε $a_k > 1$, η συνεχής συνάρτηση f είναι θετική και φθίνουσα στο διάστημα $[a_k, \infty)$. Επειδή

$$\begin{aligned}\int_{a_k}^{\infty} \frac{t}{1+t^2}\,dx &= \lim_{x\to\infty} \int_{a_k}^{x} \frac{t}{1+t^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \ln(1+t^2)\Big|_{t=a_k}^{t=x} \\ &= \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\infty} \ln(1+x^2) - \ln(1+a_k^2)\right] = \infty\,,\end{aligned}$$

από την (α΄) θα είναι και $\sum_{n=k}^{\infty} f(a_n) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2} = \infty$. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2} = \infty\,. \qquad \text{(η σειρά αποκλίνει)}$$

■

Θ5. (α΄) Αν $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, να αποδειχθεί ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ και στη συνέχεια ότι

$$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}\,. \qquad (*)$$

Να συμπεράνετε ότι

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

(1,2 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας τη διωνυμική σειρά να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)4^n (n!)^2}\, x^{2n+1}\,, \quad |x| < 1\,.$$

(1 μον.)

(γ΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

και να βρεθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$. (0,8 μον.)

Λύση.

(α΄) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx &= -\int_0^{\pi/2} (\cos x)' \sin^{n-1} x\,dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x (\sin^{n-1} x)'\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x) \sin^{n-2} x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx \\
&= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n\,.
\end{aligned}$$

Επομένως $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ και ισοδύναμα

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \tag{2.33}$$

Από τη (2.33) είναι

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\frac{2}{3}\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{2}{3} = \frac{4}{3!}\,,$$

δηλαδή η $(*)$ ισχύει για $n=1$. Υποθέτουμε ότι η $(*)$ ισχύει για $n=k$. Τότε από τη (2.33) για $n = 2k+3$ έχουμε

$$\begin{aligned} I_{2k+3} &= \frac{2k+2}{2k+3} I_{2k+1} \\ &= \frac{2k+2}{2k+3}\cdot\frac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!} && \text{(από την $(*)$ για $n=k$)} \\ &= \frac{(2k+2)^2}{(2k+2)(2k+3)}\cdot\frac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!} \\ &= \frac{4^{k+1}[(k+1)!]^2}{(2k+3)!}\,, \end{aligned}$$

δηλαδή η $(*)$ ισχύει για $n = k+1$. Άρα η $(*)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \sin\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, έχουμε

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

(β΄) Από τη διωνυμική σειρά

$$(1+t)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}\,t^n\,, \quad |t|<1\,,$$

για $t = -x^2$ και $a = -1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{-1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-1)^n x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}(-1)^n x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}(-1)^n x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot 2n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot 2^n\cdot n!} x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!\cdot 2^n\cdot n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} x^{2n}\,, \quad |x|<1\,. \end{aligned}$$

Επομένως, για $|x| < 1$ είναι

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)4^n(n!)^2}\, x^{2n+1}\,.$$

(γ′) Είναι

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} t\,dt = \frac{\pi^2}{8}\,, \qquad \text{(αντικατάσταση } x = \sin t\text{)}$$

ενώ από τις (α′) και (β′) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)4^n(n!)^2} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)4^n(n!)^2} \cdot \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

■

Να επιλέξετε τέσσερα(4) από τα πέντε(5) θέματα

Βιβλιογραφία

[1] A. G. Aksoy, M. A. Khamsi, *A Problem Book in Real Analysis*, Problem Books in Mathematics, Springer–Verlag, New York, 2010.

[2] P. Biler, A. Witkowski, *Problems in Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

[3] G. W. Bluman, *Problem book for first year calculus*, Springer–Verlag, New York, 1984.

[4] F. Burk, *A Garden of Integrals*, Mathematical Association of America, 2007.

[5] B. F. Butuzov(editor), *Mathematical Analysis in Questions and Problems (English translation from the 1984 Russian edition)*, Mir Publishers, Moscow, 1988.

[6] W. J. Caczor and M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis I : Real Numbers, Sequences and Series* , Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2000.

[7] W. J. Caczor and M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis II : Continuity and Differentiation*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2001.

[8] W. J. Caczor and M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis III : Integration* , Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2003.

[9] C. H. Edwards, Jr. , *The historical development of the calculus* (3rd printing), Springer–Verlag, 1994.

[10] J. Franchini, J.-C. Jacquens, *Exercises Corriges de Maths Supérieures Analyse*, Ellipses, Paris, 1993.

[11] J. Franchini, J.-C. Jacquens, *Analyse 1*, Ellipses, Paris, 1996.

[12] S. Francinu, H. Gianella and S. Nicolas, *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures : Analyse. Tome I*, Cassini, Paris, 2007.

[13] S. Francinu, H. Gianella and S. Nicolas, *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures : Analyse. Tome II*, Cassini, Paris, 2009.

[14] R. Gelca, T. Andreescu, *Putnam and beyond*, Springer, New York, 2007.

[15] L. Girard, *Maths PTSI-PT Exercises Corriges*, Ellipses, Paris, 1998.

[16] M. Hata, *Problems and solutions in real analysis*, Series on Number Theory and its Applications, 4. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007.

[17] L. B. W. Jolley, *Summation of Series*, Dover Publications(Phoenix Edition), 2004.

[18] G. Klambauer, *Problems and Propositions in Analysis* , Marcel Dekker, Inc., New York, 1979.

[19] K. Knopp, *Theory and applications of infinite series*, Dover Publications, 1990.

[20] B. M. Makarov, M. G. Goluzina, A. A. Lodkin, A. N. Podkorytov, *Selected Problems in Real Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1998.

[21] J.-M. Monier, *Analyse 1 (cours et 300 exercises corriges)*, Dunod, Paris, 1996.

[22] J.-M. Monier, *Analyse 2 (cours et 600 exercises corriges) (2nd ed.)*, Dunod, Paris, 1996.

[23] J.-M. Monier, *Analyse*, Dunod, Paris, 1997.

[24] G. Pólya, G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.

[25] T.-L. T. Radulescu, V. D. Radulescu, T. Andreescu, *Problems in real analysis. Advanced calculus on the real axis*, Springer, New York, 2009.

[26] A. R. Rajwade and A. K. Bhandari, *Surprises and Counterexamples in Real Function Theory*, Hindustan Book Agency (India), 2007.

[27] Γ. Σαραντόπουλος, *Μαθηματική Ανάλυση Ι(Μια εισαγωγή με παραδείγματα και ασκήσεις)*, Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2014.

[28] P. N. de Souza, J.-N. Silva, *Berkeley problems in mathematics* (3rd. ed.), Springer–Verlag, New York, 2004.

[29] M. Spivak, *Calculus* (3rd. ed.), Publish or Perish Inc, Houston, Texas, 2006.

[30] M. Spivak, *Answer book for Calculus* (3rd. ed.), Publish or Perish Inc, Houston, Texas, 1994.

[31] J. M. Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An introduction to the art of inequalities*, Cambridge University Press, 2004.

[32] A. M. Gleason; R. E. Greenwood; L. M. Kelly, *The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and solutions: 1938-1964.* Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1980.

[33] *The William Lowell Putnam mathematical competition. Problems and solutions: 1965-1984*, Edited by Gerald L. Alexanderson, Leonard F. Klosinski and Loren C. Larson. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1985.

[34] K. S. Kedlaya; B. Poonen; R. Vakil, *The William Lowell Putnam Mathematical Competition, 1985-2000. Problems, solutions, and commentary*, MAA Problem Books Series. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2002.

[35] P. Walker, *Examples and Theorems in Analysis*, Springer–Verlag, 2004.