

Μαθηματική Ανάλυση
ΣΑΤΜ 21/1/ 2019

Θέμα 1. (α) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (0,5 \text{ μον.}) \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{10^n} \quad (0,5 \text{ μον.})$$
$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^5 + 1} \quad (0,5 \text{ μον.}) \quad (iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \quad (0,5 \text{ μον.})$$

(β) Να υπολογισθεί το άθροισμα των συγκλινουσών σειρών του παραπάνω ερωτήματος (0,5 μον.)

Θέμα 2. (α) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor, $T_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, τέταρτης τάξης της $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ με κέντρο το $x_0 = 0$ και δείξτε ότι

$$|\cos x - T_4(x)| \leq \frac{x^5}{5!}.$$

(1 μον.)

(β) Με βάση το ανάπτυγμα της $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots$, για κάθε $t \in (-1, 1)$ αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τις συναρτήσεις (i) $\frac{1}{(1-t)^2}$, $t \in (-1, 1)$, (ii) $\frac{1}{1+t^2}$, $t \in (-1, 1)$ και (iii) $\arctan x$, $x \in (-1, 1)$. (1,5 μ)

Θέμα 3. (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{-4x+1}{(x+3)(x^2+4)} dx$. (1,5 μον.)

(β) Αν $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ διατυπώστε τον ορισμό των μερικών παραγώγων της f σε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Στην συνέχεια εξετάστε αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της $f(x, y) = |x| + |y|$ στο σημείο $(0, 0)$. (1 μον.)

Θέμα 4. (α) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^3 - 12xy + y^3$. (1,5 μον.)

(β) Αν $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_D e^{-x^2} dx dy.$$

(1 μον.)

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 30'
Κ α λ ή Ε π ι τ υ χ ί α!