

Μαθηματική Ανάλυση
ΣΑΤΜ 5/9/ 2018

Θέμα 1. (α) Βρείτε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$ (1 μον.)

(β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις επόμενες σειρές

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n^8 + 1} \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad (1,5 \text{ μον.})$$

Θέμα 2. Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} = 1$. (1 μον.)

(β) Με βάση το ανάπτυγμα $\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\dots$, $t \in (-1, 1)$, αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τις επόμενες συναρτήσεις (i) $\frac{1}{(1-t)^2}$, $t \in (-1, 1)$ και (ii) $\arctan x$, $x \in (-1, 1)$. (1,5 μον.)

Θέμα 3. (α) Υπολογίστε το ολοκληρώματα $\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} dx$. (Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα σταθερές A, B, Γ τέτοιες ώστε $\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+9}$) (1,5 μον.)

(β) Υπολογίστε το μήκος $L = \int_1^2 \sqrt{1+(y'(x))^2} dx$ της καμπύλης με τύπο

$$y(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

(1 μον.)

Θέμα 4. (α) Αν $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ διατυπώστε τον ορισμό των μερικών παραγώγων της f σε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. (0,5 μον.)

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \frac{2x^3 + 5y^3}{3x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$. Βρείτε τις μερικές παραγώγους της f στο σημείο $(0,0)$. (0,5 μον.)

(γ) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

Βρείτε και χαρακτηρίστε τα τοπικά ακρότατα της f . (1,5 μον.)

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 30'
Κ α λ ή Ε π ι τ υ χ ί α!