

Μαθηματική Ανάλυση ΣΑΤΜ (7/9/ 2016)

Θέμα 1. (α) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \leq a_n \leq 2n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

Υπολογίστε το $\lim \sqrt[n]{a_n}$ και εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (1 μον).

(β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5} \quad (a > 0) \quad (0,5 \text{ μον}) \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad (0,5 \text{ μον})$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \quad (0,5 \text{ μον})$$

Θέμα 2. (α) Με βάση το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της συνάρτησης $\frac{1}{1-t}$ με $|t| < 1$, αναπτύξτε σε δυναμοσειρά την $\frac{1}{(1-t)^2}$, $|t| < 1$ και την $\ln \left(\frac{1}{1-x} \right)$, $|x| < 1$. (1,5 μον)

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{cx}$, όπου $c \neq 0$ σταθερά. Βρείτε τον τύπο για την n -οστή παράγωγο της f και στην συνέχεια γράψτε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της $f(x)$ βαθμού n με κέντρο το 0. Ποιό είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού n με κέντρο το 0 της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[4]{e^x}$? (1 μον)

Θέμα 3. (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{1 + e^{-2x}} dx \quad (1,2 \text{ μον})$$

(β) Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης του επιπέδου με παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = t - \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (1,3 \text{ μον}).$$

(Δίνεται ότι $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ και $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

Θέμα 4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

(α) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της f έως και δεύτερης τάξης.

(β) Βρείτε τα στάσιμα (κρίσιμα) σημεία της f .

(γ) Βρείτε και χαρακτηρίστε τα τοπικά ακρότατα της f . (Δίνεται ότι $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$).

(δ) Έχει η f ολικά ακρότατα ; (2,5 μον)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2 ΩΡΕΣ ΚΑΙ 30 ΛΕΠΤΑ
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!