

ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΑΤΜ, 1/9/2021  
ΟΜΑΔΑ Β (Ο ΑΜ λήγει σε 1, 3, 5, 7, 9)

Οι απαντήσεις των θεμάτων να υποβληθούν σκαναρισμένες, με ονοματεπώνυμο και ΑΜ.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 1 h και 20 min

**I. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές είναι λάθος. Να δικαιολογηθούν οι τρεις από τις έξι απαντήσεις σας:**

(1) (0,5 μον) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 2-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με  $f''(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Τότε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι

$$f(x) \leq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x.$$

(2) (0,5 μον) Για όλα τα  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $\arcsin(\sin x) = x$ .

(3) (0,5 μον) Αν  $na_n \geq 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  τότε η  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  αποκλίνει.

(4) (0,5 μον) Έστω  $(a_n)$  φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο μηδέν. Τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει.

(5) (0,5 μον) Αν η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  αποκλίνει στο  $x = 2$  τότε αποκλίνει και στο  $x = -3$ .

(6) (0,5 μον) Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και έστω  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  ένα κρίσιμο σημείο της  $f$ . Αν  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  και  $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$  τότε το  $(x_0, y_0)$  είναι σαγματικό σημείο της  $f$ .

**II. Να γράψετε την λύση των επόμενων ασκήσεων :**

**ΑΣΚΗΣΗ 1.** (α) (0,5 μον.) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} (x-1)^n$ .

(β) (1,5 μον) Σε ποια  $x \in \mathbb{R}$  η δυναμοσειρά συγκλίνει και σε ποιά αποκλίνει;

**ΑΣΚΗΣΗ 2.** (α) (1 μον.) Βρείτε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης  $f(x, y) = y^x$  με  $x, y > 0$ .

(β) (1,5 μον.) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - 2y^2 + 1$$

**ΑΣΚΗΣΗ 3.** (α) (1 μον.) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_6^7 \frac{x}{x^2 - 12x + 37} dx$ .

(β) (1,5 μον.) Έστω  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  γνησίως αύξουσα συνεχής με  $f(0) = 0$  και  $f(1) = 1$ . Υποθέτουμε επίσης ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Αν  $\int_0^1 f(x) dx = 2/3$  υπολογίστε το  $\int_0^1 f^{-1}(y) dy$ , όπου με  $f^{-1}$  συμβολίζουμε την αντίστροφη της  $f$ .