

ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΑΤΜ, 1/9/2021
ΟΜΑΔΑ Α (Ο ΑΜ λήγει σε 0, 2, 4, 6, 8)

Οι απαντήσεις των θεμάτων να υποβληθούν σκαναρισμένες, με ονοματεπώνυμο και ΑΜ.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 1 h και 20 min

I. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές είναι λάθος. Να δικαιολογηθούν οι τρεις από τις έξι απαντήσεις σας:

(1) (0,5 μον) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f(x) \geq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x.$$

(2) (0,5 μον) Για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\arccos(\cos x) = x$.

(3) (0,5 μον) Αν $0 \leq n^2 a_n \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(4) (0,5 μον) Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο μηδέν. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(5) (0,5 μον) Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει στο $x = 2$ τότε συγκλίνει και στο $x = -1$.

(6) (0,5 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ένα κρίσιμο σημείο της f . Αν $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ και $f_{xy}(x_0, y_0) \neq 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της f .

II. Να γράψετε την λύση των επόμενων ασκήσεων :

ΑΣΚΗΣΗ 1. (α) (0,5 μον.) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n} (x-2)^n$.

(β) (1,5 μον) Σε ποια $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και σε ποιά αποκλίνει;

ΑΣΚΗΣΗ 2. (α) (1 μον.) Βρείτε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης $f(x, y) = x^y$ με $x, y > 0$.

(β) (1,5 μον.) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 + 5$$

ΑΣΚΗΣΗ 3. (α) (1 μον.) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_5^6 \frac{x}{x^2 - 10x + 26} dx$.

(β) (1,5 μον.) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ συνεχής και γνησίως αύξουσα με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Αν $\int_0^1 f(x) dx = 1/3$ υπολογίστε το $\int_0^1 f^{-1}(y) dy$, όπου με f^{-1} συμβολίζουμε την αντίστροφη της f .