Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών

1η σειρά φροντιστηριακών ασκήσεων

(εαρινό 2022)

Επιμέλεια Διαφανειών: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

Σύνολα - Διμελείς Σχέσεις - Λογική

αριθμήσιμα - μη αριθμήσιμα σύνολα,
διαγωνιοποίηση,

προτασιακή - κατηγορηματική λογική

Να χρησιμοποιήσετε κανόνες συνεπαγωγής προκειμένου να αποδείξετε πως αν οι προτάσεις:

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
2. $\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$
3. $\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$
4. $\exists x(\neg P(x))$ είναι αληθείς τότε η πρόταση

$\exists x(\neg R(x))$ είναι αληθής

Ξεκινάμε από την 4. Υπάρχει στοιχείο a που δεν έχει την P. Το στοιχείο αυτό έχει την Q και την S λόγω των 1 και 2. Λόγω της 3 και δεδομένου του ότι έχει την S δεν μπορεί να έχει την R.

(α) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων και το σύμβολο P ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) τα οποία είναι γειτονικά.

Σε αυτή την ερμηνεία, να διατυπώσετε:

1. Τύπο $\varphi_1(x)$ που δηλώνει ότι η κορυφή x συνδέεται με όλες τις άλλες κορυφές
2. Τύπο $\varphi_2(x)$ που δηλώνει ότι η κορυφή x έχει βαθμό ίσο με 2
3. Πρόταση φ που δηλώνει όλες οι κορυφές του γραφήματος έχουν βαθμό ίσο με 2, εκτός από δύο κορυφές που είναι απομονωμένες (έχουν βαθμό ίσο με το 0)

1. $\varphi_1(x) = \forall y(x \neq y \to P(x, y))$
2. $\varphi_2(x) = \exists y \exists z(y \neq z \wedge P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge \forall w(P(x, w) \to (w = y) \vee (w = z)))$
3. Αρχικά διατυπώνουμε τύπο $\varphi_3(x)$ που δηλώνει ότι η κορυφή x έχει βαθμό 0.

$\varphi_3(x) = \forall y(\neg P(x, y))$ Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε την πρόταση ως εξής:

$\varphi = \exists y \exists z(\varphi_3(y) \wedge \varphi_3(z) \wedge (y \neq z) \wedge \forall w((w \neq y) \wedge (w \neq z) \to \varphi_2(w)))$

β) Θεωρούμε τις παρακάτω προτάσεις τις οποίες ερμηνεύουμε στην ερμηνεία του (α):

$$\psi_1 = \exists x \exists y \exists z [P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x) \wedge \forall w (\neg P(w,x) \wedge \neg P(w,y) \rightarrow P(w,z))]$$
$$\psi_2 = \exists x \exists y \exists z [P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x) \wedge \forall w (P(w,x) \vee P(w,y) \vee P(w,z) \rightarrow w = x \vee w = y \vee w = z)]$$
$$\psi_3 = \exists x \exists y [x \neq y \wedge \neg P(x,y) \wedge \forall z (x \neq y \wedge y \neq z \rightarrow P(x,z) \wedge P(y,z))]$$

α) Να δώσετε ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με 6 κορυφές και μέγιστο βαθμό κορυφής 3 που ικανοποιεί την πρόταση ψ_1

β) Να δώσετε ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με 6 κορυφές που ικανοποιεί την πρόταση ψ_2

γ) Να δώσετε ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα G με 5 κορυφές τέτοιο ώστε τόσο το ίδιο το G όσο και το συμπληρωματικό του γράφημα να ικανοποιούν την πρόταση $\psi_2 \vee \psi_3$

α) Το μη κατευθυνόμενο απλό γράφημα $G(V,E)$ με κορυφές $V = \{x, y, z, a, b, c\}$ και ακμές $\mathrm{E} = \{(x,y),(x,z),(z,y),(x,a),(y,b),(z,c)\}$ ικανοποιεί την ψ_1.

β) Το μη κατευθυνόμενο απλό γράφημα $G(V,E)$ με κορυφές $V = \{x, y, z, a, b, c\}$ και ακμές $\mathrm{E} = \{(x,y),(x,z),(z,y)\}$ ικανοποιεί την ψ_2.

γ) Το μη κατευθυνόμενο απλό γράφημα $G(V,E)$ με κορυφές $V = \{x, y, z, a, b\}$ και ακμές $\mathrm{E} = \{(x,y),(x,z),(z,y),(a,b)\}$ ικανοποιεί την ψ_2. Το συμπληρωματικό του ικανοποιεί την ψ_3. Συμπληρωματικό είναι το γράφημα με τις ίδιες κορυφές και ακμές τις: $\mathrm{E} = \{(x,a),(x,b),(y,a),(y,b),(z,a),(z,b)\}$.

(α) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα κατηγορηματικό σύμβολο P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων και το σύμβολο P ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) τα οποία είναι γειτονικά.

Να γράψετε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής που (στη συγκεκριμένη ερμηνεία) εκφράζουν ότι:

i) Κάθε μη μεμονωμένη κορυφή έχει τουλάχιστον δύο γείτονες.

ii) Κάθε κορυφή με βαθμό τουλάχιστον δύο περιέχεται σε μία κλίκα 3 κορυφών.

iii) Υπάρχει συνεκτική συνιστώσα με δύο ακριβώς κορυφές.

(β) Δίνονται οι προτάσεις φ και ψ:

$$\varphi \equiv \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow \neg \forall x(P(x) \wedge Q(x))$$

$$\psi \equiv \exists x \forall y((R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \rightarrow (R(x, x) \leftrightarrow R(y, y))),$$

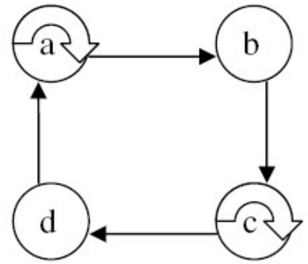
όπου τα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα και το $R(x, y)$ είναι διμελές κατηγορηματικό σύμβολο. Να εξετάσετε τις προτάσεις φ και ψ ως προς τη λογική τους εγκυρότητα. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τους ισχυρισμούς σας.

$$\forall x(\exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \exists z((y \neq z) \wedge P(x, y) \wedge P(x, z)))$$

$$\forall x(\exists y \exists z((y \neq z) \wedge P(x, y) \wedge P(x, z)) \rightarrow \exists y \exists z(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge P(y, z)))$$

$$\exists x \exists y(P(x, y) \wedge \forall z(((z \neq x) \wedge (z \neq y)) \rightarrow (\neg P(x, z) \wedge \neg P(y, z))))$$

Η φ είναι λογικά έγκυρη και λέει ότι αν υπάρχει στοιχείο που έχει την ιδιότητα P και δεν έχει την Q τότε δεν ισχύει πως κάθε στοιχείο του σύμπαντος που έχει την P έχει και την Q.



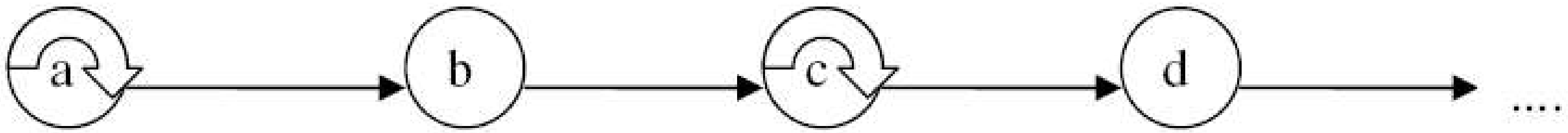
Η ψ δεν είναι λογικά έγκυρη. π.χ. δεν αληθεύει για τη σχέση

$$R = \{(a,a),(a,b),(b,c),(c,c),(c,d),(d,a)\}$$

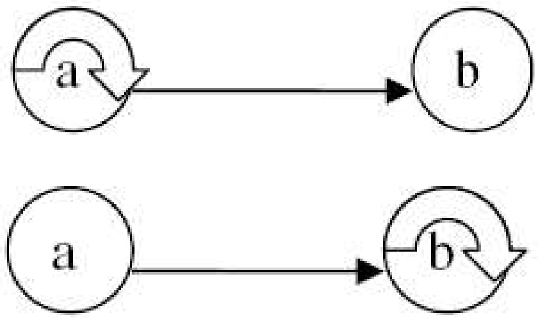
Το πρώτο μέρος της συνεπαγωγής δεν είναι πάντα ψευδές, γιατί ο ποσοδείκτης εφαρμόζεται σε όλη τη συνεπαγωγή. Η πρόταση λέει ότι υπάρχει ένα στοιχείο x, τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο y προς το οποίο υπάρχει ακμή από το x, αλλά δεν υπάρχει ακμή από το y προς το x, τότε αν (το x) σχετίζεται με τον εαυτό του το ίδιο ισχύει και για το y και αντίστροφα. Στην περίπτωση της σχέσης R αυτό δεν συμβαίνει. Τα στοιχεία που έχουν ανακύκλωση (π.χ. το a και το c) έχουν ακμή προς στοιχείο που δεν έχει ανακύκλωση (το b και d αντίστοιχα) και έτσι επαληθεύουν την υπόθεση της συνεπαγωγής αλλά όχι το συμπέρασμα. Το a επαληθεύει την υπόθεση της συνεπαγωγής με το b αλλά όχι το συμπέρασμα. Τα b και d δεν έχουν ανακύκλωση. Το b επαληθεύει την υπόθεση της συνεπαγωγής με το d αλλά όχι το συμπέρασμα. Επομένως δεν υπάρχει αυτό το στοιχείο που να επαληθεύει την πρόταση.

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα

Η πρόταση επίσης δεν αληθεύει σε αντίστοιχες δομές που έχουμε **άπειρη** διαδοχή από στοιχείο με ανακύκλωση σε στοιχείο χωρίς ανακύκλωση.



Αντίθετα όταν έχουμε πεπερασμένη διαδοχή από στοιχείο με ανακύκλωση σε στοιχείο χωρίς ανακύκλωση η συνεπαγωγή είναι αληθής είτε η δομή τελειώνει σε στοιχείο με ανακύκλωση είτε όχι. Το τελευταίο στοιχείο πάντα επαληθεύει την πρόταση.



Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P.

(α) Θεωρούμε την πρόταση:

$$\varphi \equiv \neg\exists x P(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)) \wedge \forall x \exists y P(x,y).$$

(i) Να ερμηνεύσετε το P στο σύνολο N των φυσικών αριθμών ώστε να ικανοποιείται η φ.

Αν στο σύμπαν των φυσικών αριθμών η σχέση P είναι τη σχέση μικρότερο (<) τότε δεν θα χρειαστεί να έχω ανακύκλωση διότι για κάθε στοιχείο του σύμπαντος υπάρχει πάντα κάποιο μεγαλύτερο.

(ii) Να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία που ικανοποιεί την φ έχει άπειρο σύμπαν.

Η πρόταση αληθεύει σε κάποια ερμηνεία στην οποία ισχύει η μεταβατική ιδιότητα και κανένα στοιχείο δεν σχετίζεται με τον εαυτό του και όλα τα στοιχεία σχετίζονται με ("δείχνουν" σε) κάποιο άλλο. Αν όμως κάθε στοιχείο σχετίζεται με κάποιο άλλο και το σύμπαν είναι <u>πεπερασμένο</u> κάποια στιγμή υποχρεωτικά θα έχω κύκλο και λόγω μεταβατικής ιδιότητας θα έχω ανακύκλωση σε κάποιο στοιχείο το οποίο δεν επιτρέπεται διότι κανένα στοιχείο δεν σχετίζεται με τον εαυτό του.

(β) Να διερευνήσετε αν η παρακάτω πρόταση είναι λογικά έγκυρη

$$\psi_1 \equiv \forall x \exists y \left[P(x, y) \wedge \left(P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow x = y\right)\right] \rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$$

Δεν είναι λογικά έγκυρη π.χ. έστω ερμηνεία με σύμπαν $S = \{x_1, x_2\}$ και οι συσχετίσεις $P(x_{1,} x_1)$, $P(x_{2,} x_2)$. Σε αυτή την ερμηνεία η ψ_1 δεν είναι αληθής διότι δεν υπάρχει στοιχείο που να σχετίζεται με όλα τα άλλα αν και η υπόθεση είναι αληθής.

Έστω τύπος $\psi(x)$ με μία ελεύθερη μεταβλητή x, και φ πρόταση. Να δείξετε ότι η παρακάτω πρόταση είναι λογικά έγκυρη:

$$(\exists x\psi(x)\rightarrow\varphi)\leftrightarrow\forall x(\psi(x)\rightarrow\varphi)$$

Αρκεί να αποδειχθεί πως για αυθαίρετη ερμηνεία το $(1)\rightarrow(2)$ και $(2)\rightarrow(1)$

Για την πρώτη συνεπαγωγή:

Αν υπάρχει στοιχείο του σύμπαντος που ικανοποιεί το $\psi(x)$ τότε ο φ είναι αληθής.

Επομένως αν το $\psi(x)$ είναι αληθές για κάθε στοιχείο του σύμπαντος τότε φ αληθής.

Αν δεν ισχύει η συνεπαγωγή είναι αληθής ανεξάρτητα από το αν το συμπέρασμα είναι αληθές ή ψευδές.

Για την αντίστροφη συνεπαγωγή:

Για κάθε στοιχείο του σύμπαντος που ικανοποιείται το $\psi(x)$ το φ είναι αληθής.

Άρα αν υπάρχει στοιχείο του σύμπαντος που ικανοποιεί το $\psi(x)$ το φ είναι αληθής.

Αν δεν υπάρχει η συνεπαγωγή είναι αληθής ανεξάρτητα από την αποτίμηση του συμπεράσματος.

Δίνονται οι προτάσεις:

1. $\psi_1 \equiv \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$
2. $\psi_2 \equiv \forall x \forall y (P(x,y) \wedge P(y,x) \to x = y)$
3. $\psi_3 \equiv \forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$

Να διερευνήσετε κατά πόσον

(i) οι ψ_1 και ψ_2 συνεπάγονται λογικά την ψ_3 (δηλ. αν $\{\psi_1, \psi_2\} \models \psi_3$),

(ii) οι ψ_2 και ψ_3 συνεπάγονται λογικά την ψ_1 (δηλ. αν $\{\psi_2, \psi_3\} \models \psi_1$), και

(iii) οι ψ_1 και ψ_3 συνεπάγονται λογικά την ψ_2 (δηλ. αν $\{\psi_1, \psi_3\} \models \psi_2$).

1. Έστω σύμπαν με στοιχεία a, x, y, z και σχέσεις
   $P(a,a), P(x,y), P(y,z), P(x,z), P(z,z)$

Ισχύουν οι ψ_1, ψ_2 αλλά όχι η ψ_3.

2. Έστω σύμπαν με στοιχεία a, b, c και σχέσεις $P(a,b), P(b,c)$

Ισχύουν οι ψ_2, ψ_3 αλλά όχι η ψ_1.

3. Έστω σύμπαν με στοιχεία d, e και σχέσεις $P(d,e), P(e,d), P(d,d), P(e,e)$

Ισχύουν οι ψ_1, ψ_3 αλλά όχι η ψ_2.

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P.
Έστω η πρόταση :

$$\varphi \equiv \forall x \forall y (P(x,y) \wedge P(y,x) \rightarrow x = y) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)) \wedge \forall x \exists y (x \neq y \wedge P(x,y))$$

Να δώσετε μία ερμηνεία στην οποία αληθεύει η φ.

Να δείξετε οτι η φ δεν αληθεύει σε οποιαδήποτε ερμηνεία με πεπερασμένο σύμπαν.

Α)Αναζητούμε διαδρομή που δεν τελειώνει ποτέ. Ουσιαστικά είναι μια άπειρη διαδρομή σε κατευθυνόμενο γράφημα. Αυτό μπορεί να αληθεύει μόνο σε άπειρο σύμπαν.

Β)Όταν το σύμπαν είναι πεπερασμένο για να υπάρχει συσχέτιση κάθε στοιχείου με κάποιο διαφορετικό στοιχείο θα πρέπει να υπάρχει κύκλος. Με αυτό τον τρόπο όμως παύει να ισχύει η αντισυμμετρικότητα.

Δύο φίλοι ο Α και ο Β έχουν μόλις γνωρίσει την Γ και προσπαθούν να μάθουν την ημερομηνία των γενεθλίων της. Η Γ τους δίνει 10 πιθανές ημερομηνίες.

	14	15	16	17	18	19
Μάϊος		√	√			√
Ιούνιος				√	√	
Ιούλιος	√		√			
Αύγουστος	√	√		√		

Η Γ λέει ξεχωριστά στον Α τον μήνα και στον Β την ημερομηνία.
Οι Α και Β κάνουν τις παρακάτω δηλώσεις:
Α: Δεν ξέρω πότε είναι τα γενέθλια της Γ αλλά ξέρω πως ο Β επίσης δεν το γνωρίζει.
Β: Αρχικά δεν γνώριζα πότε ήταν τα γενέθλια της Γ αλλά τώρα γνωρίζω.
Α: Τώρα και εγώ γνωρίζω.

Πότε είναι τα γενέθλια της Γ;

Ο Α δηλώνει με βεβαιότητα πως ο Β δεν γνωρίζει άρα αποκλείονται οι μήνες Μάϊος και Ιούνιος. Διότι διαφορετικά πως θα ήταν βέβαιος πως ο Β δεν θα είχε ως ημερομηνία το 18 ή το 19, οπότε θα μπορούσε να αποφανθεί για τα γενέθλια.
Μετά από αυτή τη δήλωση ο Β δηλώνει πως γνωρίζει άρα η ημερομηνία που έχει δεν είναι το 14.
Στη συνέχεια ο Α δηλώνει πως γνωρίζει άρα αποκλείεται να είναι ο μήνας Αύγουστος.
Απομένει η $16^{η}$ Ιουλίου η οποία είναι και η ημέρα των γενεθλίων της Γ.

Τυπικές αποδείξεις

$\{\varphi \to (\chi \to \psi), \varphi \to \chi\} \vdash \varphi \to \psi$

ΑΣ1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
ΑΣ2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
ΑΣ3 $(\neg \varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$

Υπόθεση (1) $\varphi \to (\chi \to \psi)$
Υπόθεση (2) $\varphi \to \chi$
Από ΑΣ2 αν βάλω όπου χ το ψ και όπου ψ το χ παίρνω
(3) $(\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$
(1), (3) και MP παίρνω (4) $((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$
Από (2), (4) και MP παίρνω $\varphi \to \psi$

Έστω S το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του N. Είναι το S αριθμήσιμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Για κάθε $k \in N$, θεωρούμε το σύνολο των υποσυνόλων του N με k στοιχεία $S_k = \{X \subseteq N : |X| = k\}$. Το S_k είναι αριθμήσιμο για κάθε τιμή του k.

Ισχύει πως $S = \bigcup_{k \in N} S_k$. Άρα το S είναι αριθμήσιμο ως ένωση αριθμήσιμα άπειρης συλλογής αριθμήσιμων συνόλων.

Έστω $\Sigma = \{0, 1\}$ (ή οποιοδήποτε άλλο αλφάβητο), και έστω Σ^* το σύνολο όλων των συμβολοσειρών στο Σ. Να δειχθεί ότι το Σ^* είναι αριθμήσιμο και ότι το 2^{Σ^*} δεν είναι αριθμήσιμο.

Σ^* αριθμήσιμο:
Ξεκινάμε την αρίθμηση με τις συμβολοσειρές μήκους 1.
Είναι οι συμβολοσειρές: 0 και 1.
Συμβολοσειρές μήκους 2 είναι: 00,01,10,11.
Συνεχίζω με τις συμβολοσειρές μήκους 3:
000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.
Με τον ίδιο τρόπο μπορώ να αριθμήσω όλες τις συμβολοσειρές και έτσι το Σ^* είναι αριθμήσιμο.
Η αρίθμηση ακολουθεί την λεξικογραφική διάταξη.
$P(\Sigma^*)$ μη αριθμήσιμο:

Με διαγωνιοποίηση. Στις στήλες έχω όλες τις συμβολοσειρές και στις γραμμές όλα τα σύνολα (στοιχεία του δυναμοσυνόλου). Η αρίθμηση ακολουθεί την λεξικογραφική διάταξη.

	00	01	10	11	000	001	010	101	...
S_0	√		√			√		√	
S_1		√					√		
S_2	√								
S_3				√					
S_4	√				√				
…									

Να δειχθεί ότι το διάστημα (0,1) είναι μη αριθμήσιμο.

Έστω a_0,a_1, a_2, ... οι αριθμοί στο διάστημα 0 – 1. Στις στήλες αποθηκεύω τα ψηφία των δεκαδικών αριθμών. Για παράδειγμα a_0=0,011 a_1=0,32107 κ.λπ.
Πάντα μπορώ να φτιάξω κάποιο αριθμό που διαφέρει σε ένα ψηφίο από τους προηγούμενους.

	1	2	3	4	5	6	7	8	…
a_0	0	1	1						
a_1	3	2	1	0	7				
a_2									
a_3									
a_4									
…									

Μια συνάρτηση $p : N \to N$ είναι πολυωνυμική βαθμού d όταν υπάρχουν φυσικοί $\left(a_d, a_{d-1}, ..., a_0\right)$ τέτοιοι ώστε $p(n) = \sum_{l=0}^{d} a_l n^l$, για κάθε $n \in N$. Συμβολίζουμε με P_d το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού d στους φυσικούς και με $P = \bigcup_{d \in N} P_d$ το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Να εξετάσετε αν τα σύνολα P_d και P είναι αριθμήσιμα.

Οι διαφορετικές τιμές που παίρνει κάθε a_i είναι αριθμήσιμα άπειρες. Τα a_i είναι $d+1$ στο πλήθος επομένως έχουμε αριθμήσιμα άπειρη ένωση πεπερασμένων συνόλων.
Εφόσσον οι πολυωνυμικές βαθμού $d+1$ είναι αριθμήσιμα άπειρες η ένωσή τους για $d = 1,2,...N$ είναι αριθμήσιμα άπειρη ένωση αριθμήσιμων συνόλων και επομένως το σύνολο όλων των πολυωνυμικών συναρτήσεων είναι αριθμήσιμα άπειρο.

Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την πρόταση:

$$\xi = \forall x(P(x,x) \to \forall y(P(x,y) \vee P(y,x))) \to \exists x \forall y P(x,y)$$

Να διερευνήσετε σε ποια από τις παρακάτω ερμηνείες αληθεύει η ξ:

1. Σύμπαν $A = \{a,b,c\}$ και το P ερμηνεύεται με τη σχέση $P^A = \{(a,b),(b,c)\}$.
2. Σύμπαν $A = \{a,b,c\}$ και το P ερμηνεύεται με τη σχέση $P^A = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$.
3. Σύμπαν $A = \{a,b,c\}$ και το P ερμηνεύεται με τη σχέση $P^A = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$.
4. Σύμπαν οι θετικοί φυσικοί αριθμοί, με το $P(x,y)$ να δηλώνει ότι "ο x διαιρεί τον y".

1. Η υπόθεση είναι πάντα αληθής (δεν έχω στοιχείο με ανακύκλωση). Το συμπέρασμα είναι ψευδές (δεν υπάρχει στοιχείο που σχετίζεται με όλα. Επομένως η συνεπαγωγή είναι ψευδής.

2. Η υπόθεση είναι ψευδής. Επομένως η συνεπαγωγή είναι αληθής.

3. Το συμπέρασμα είναι αληθές (το στοιχείο a σχετίζεται με όλα).

4. Η υπόθεση είναι ψευδής. Κάθε αριθμός διαιρεί τον εαυτό του αλλά δεν σχετίζεται κάθε ζεύγος αριθμών με τη σχέση της διαιρετότητας. Το συμπέρασμα είναι αληθές. Το 1 διαιρεί όλους τους αριθμούς. Επομένως η συνεπαγωγή είναι αληθής.