Δέντρα

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**

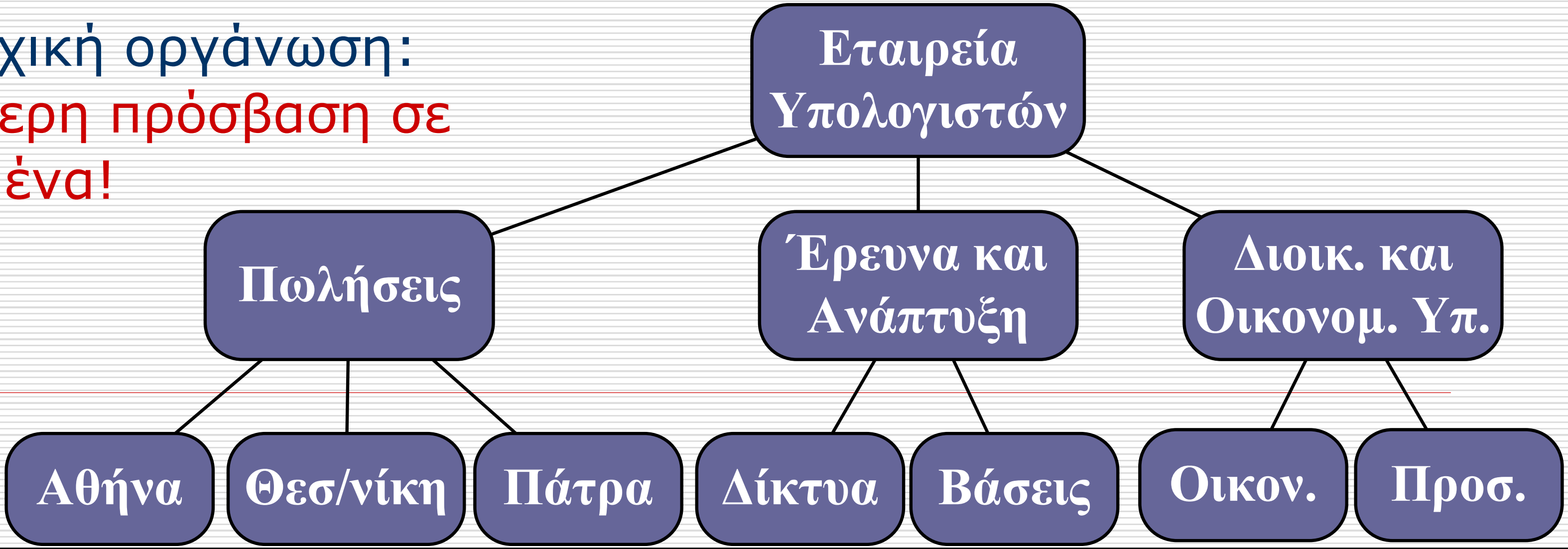
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

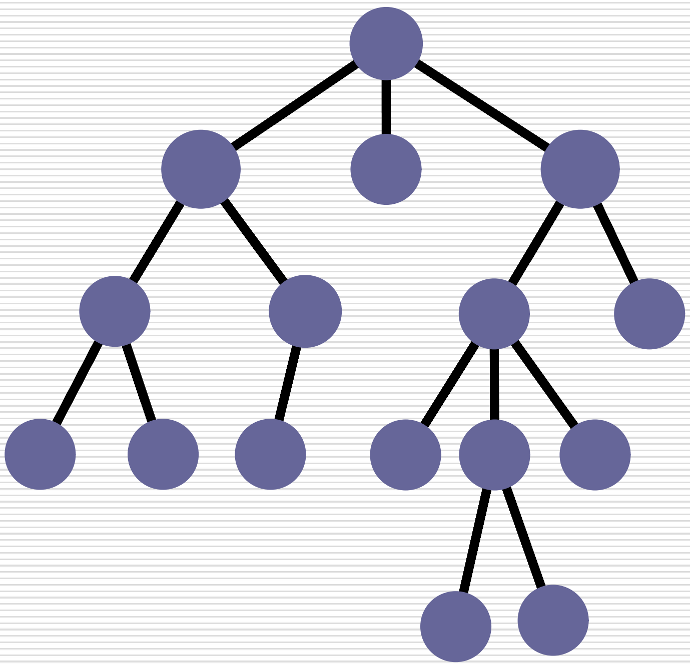
Δέντρα

- **Δέντρο:** πρότυπο ιεραρχικής δομής.
  - Αναπαράσταση (ιεραρχικών) σχέσεων: προγόνου-απογόνου, προϊσταμένου-υφισταμένου, όλου-μέρους, …
- Εφαρμογές:
  - Γενεαλογικά δέντρα.
  - Οργανόγραμμα επιχείρησης, ιεραρχία διοίκησης.
  - User interfaces, web sites, module hierarchy, δέντρα απόφασης, …
  - Ιεραρχική οργάνωση: ταχύτερη πρόσβαση σε δεδομένα!



Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

- Γράφημα **ακυκλικό** και **συνεκτικό.**
- Τα παρακάτω είναι **ισοδύναμα** για κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E):
  - G είναι δέντρο.
  - Κάθε ζευγάρι κορυφών του G συνδέεται με μοναδικό μονοπάτι.
  - G ελαχιστικά συνεκτικό.
  - G συνεκτικό και |E| = |V|-1.
  - G ακυκλικό και |E| = |V|-1.
  - G μεγιστικά ακυκλικό.
- Άθροισμα βαθμών = 2(|V| – 1)



Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

- Αν G δέντρο, τότε κάθε ζευγάρι κορυφών του G συνδέεται με μοναδικό μονοπάτι.
  - Αφού G συνεκτικό, κάθε ζευγάρι κορυφών συνδέεται με μονοπάτι.
  - Αν για κάποιο ζευγάρι κορυφών είχαμε δύο εναλλακτικά μονοπάτια, θα είχαμε κύκλο.
- Αν κάθε ζευγάρι κορυφών του G συνδέεται με μοναδικό μονοπάτι, τότε το G ελαχιστικά συνεκτικό.
  - Συνεκτικό γιατί όλες οι κορυφές συνδέονται.
  - Ελαχιστικά συνεκτικό γιατί τα μονοπάτια είναι μοναδικά.

Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

- Αν G είναι ελαχιστικά συνεκτικό, τότε το G είναι συνεκτικό και έχει $m = n - 1$.
  - Επαγωγή για το πλήθος των ακμών.
  - Βάση $n = 1$, τετριμμένη περίπτωση (μεμονωμένη κορυφή).
  - Βήμα: αφαίρεση ακμής δημιουργεί δύο συνεκτικές συνιστώσες με k και $n - k$ κορυφές.
  - Οι συνιστώσες είναι ελαχιστικά συνεκτικές: από επαγωγική υπόθεση έχουν $k - 1$ και $n - k - 1$ ακμές.
  - Άρα $(k - 1) + (n - k - 1) + 1 = n - 1$ ακμές συνολικά.

Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

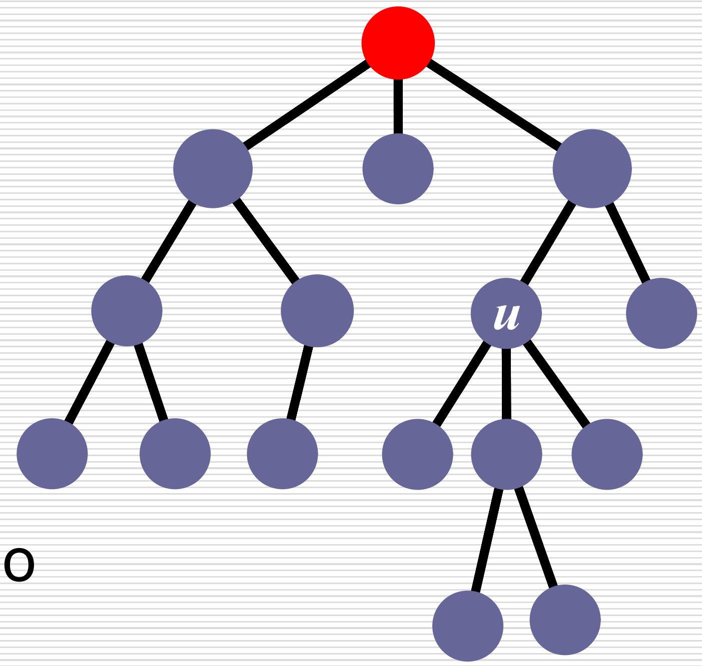
- Αν G είναι συνεκτικό και έχει $m = n - 1$, τότε το G είναι ακυκλικό και έχει $m = n - 1$.
  - Αν G έχει κύκλο, αφαιρούμε ακμή και παραμένει συνεκτικό.
  - Άτοπο, δεν υπάρχει συνεκτικό γράφημα με $< n - 1$ ακμές.
- Αν G είναι ακυκλικό και έχει $m = n - 1$, τότε το G είναι μεγιστικά ακυκλικό.
  - Αρκεί να δείξουμε ότι το G είναι συνεκτικό (μετά η προσθήκη μιας ακμής δημιουργεί κύκλο με μονοπάτι στα άκρα της).
  - Αν G μη συνεκτικό, κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι ακυκλική, άρα δέντρο (και άρα έχει $n_p - 1$ ακμές).
  - Αν k συνεκτικές συνιστώσες, $n - k$ ακμές συνολικά.
  - Άρα έχουμε $k = 1$ συνεκτική συνιστώσα.

Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

- Αν G είναι μεγιστικά ακυκλικό, τότε το G είναι ακυκλικό και συνεκτικό (δέντρο).
  - Αν G μη συνεκτικό, προσθήκη ακμής μεταξύ συνεκτικών συνιστωσών δεν δημιουργεί κύκλο, αντίφαση!
- Ένα γράφημα με n κορυφές και $< n - 1$ ακμές δεν είναι συνεκτικό.
- Απλό γράφημα με n κορυφές και τουλάχιστον n ακμές έχει τουλάχιστον έναν κύκλο.
- Μη συνεκτικό ακυκλικό γράφημα είναι **δάσος**.
  - Συνεκτικές συνιστώσες ενός δάσους είναι δέντρα.
- **Φύλλο**: κορυφή (δέντρου) με βαθμό 1.
  - Κάθε δέντρο έχει τουλάχιστον 2 φύλλα.

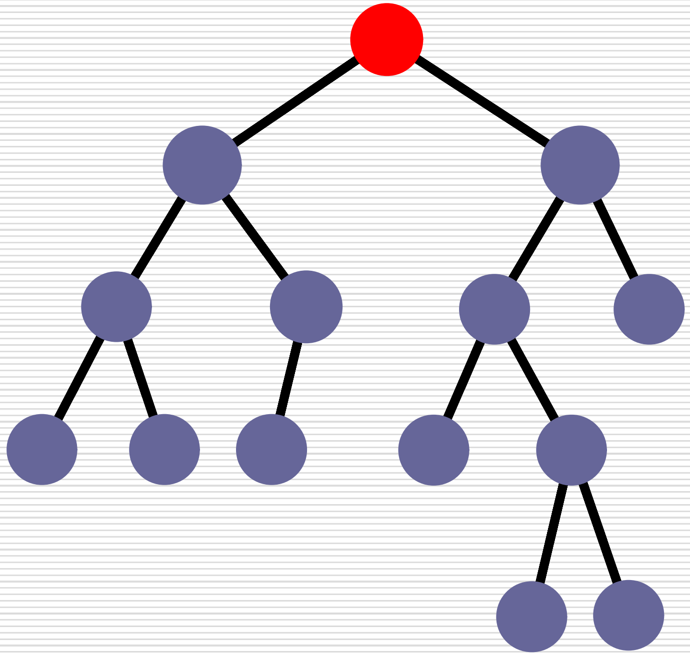
Δέντρα (με Ρίζα): Ορολογία

- **Ρίζα** : κόμβος χωρίς πρόγονο.
  - Δέντρο με **ρίζα** : **ιεραρχία**
- **Πρόγονοι u**: κόμβοι στο (μοναδικό) μονοπάτι u προς ρίζα.
- **Απόγονοι u**: κόμβοι σε μονοπάτια από u προς φύλλα.
- **Υποδέντρο u** : Δέντρο αποτελούμενο από u και απόγονούς του.

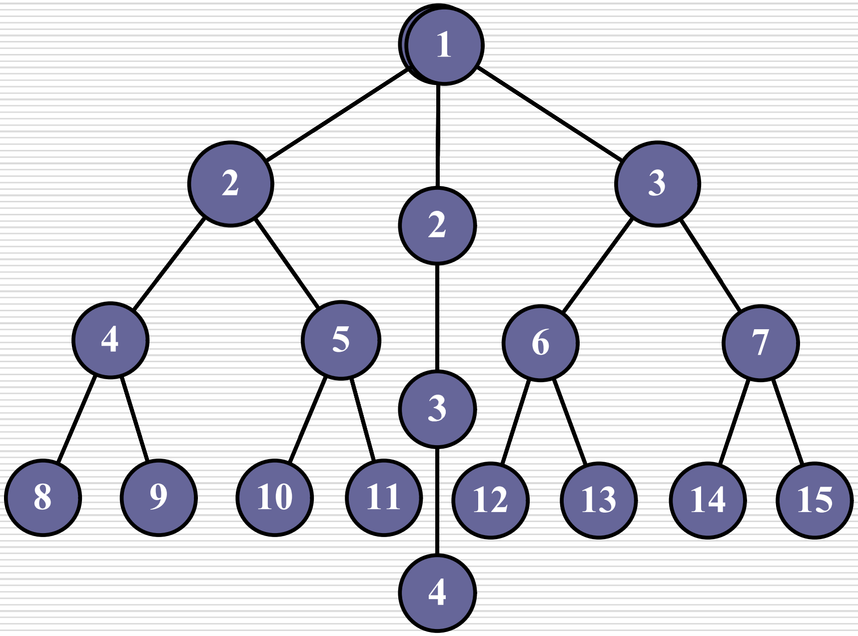


Δέντρα (με Ρίζα): Ορολογία

- **Επίπεδο u :** μήκος μονοπατιού από u προς ρίζα.
- **Ύψος :** μέγιστο επίπεδο κόμβου (φύλλου).
  - Μέγιστη απόσταση φύλλου από ρίζα.
- **Δυαδικό δέντρο** :
  κάθε κορυφή ≤ **2 παιδιά**
  - Αριστερό και δεξιό.
- Κάθε **υποδέντρο** είναι δυαδικό δέντρο.

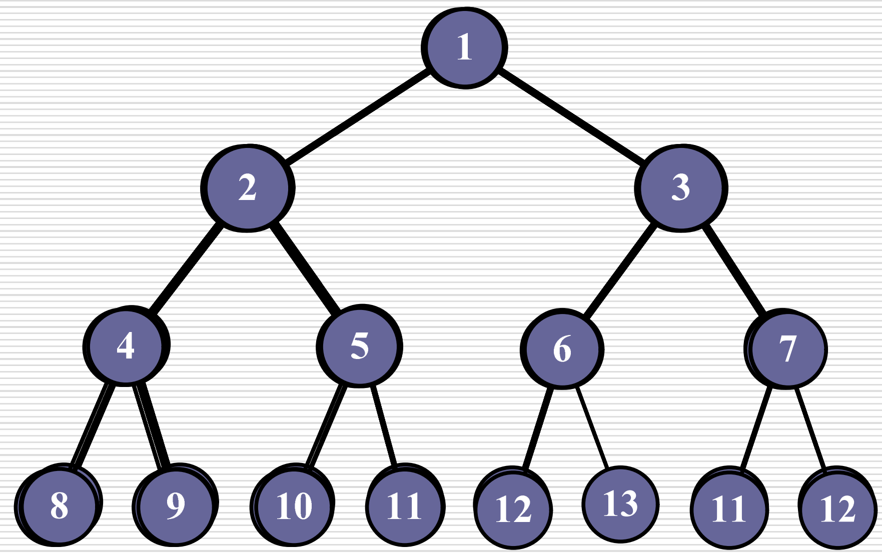


Δυαδικά Δέντρα



- #κορυφών για ύψος = h:
  $h+1 \le$ #κορυφών $\le 2^{h+1} - 1$
  - $h+1$ επίπεδα, ≥ 1 κορ. / επίπ.
  - $\le 2^i$ κορυφές στο επίπεδο i .
    $1 + 2 + \ldots + 2^h = 2^{h+1} - 1$
- Ύψος για #κορυφών = n:
  $\log_2(n+1) - 1 \le$ ύψος $\le n - 1$
- **Γεμάτο** (full):
  - Κάθε κορυφή είτε φύλλο είτε 2 παιδιά.
- **Πλήρες** (complete) :
  - Όλα τα επίπεδα συμπληρωμένα (εκτός ίσως τελευταίο).
- **Τέλειο** (perfect) : $n = 2^{h+1} - 1$

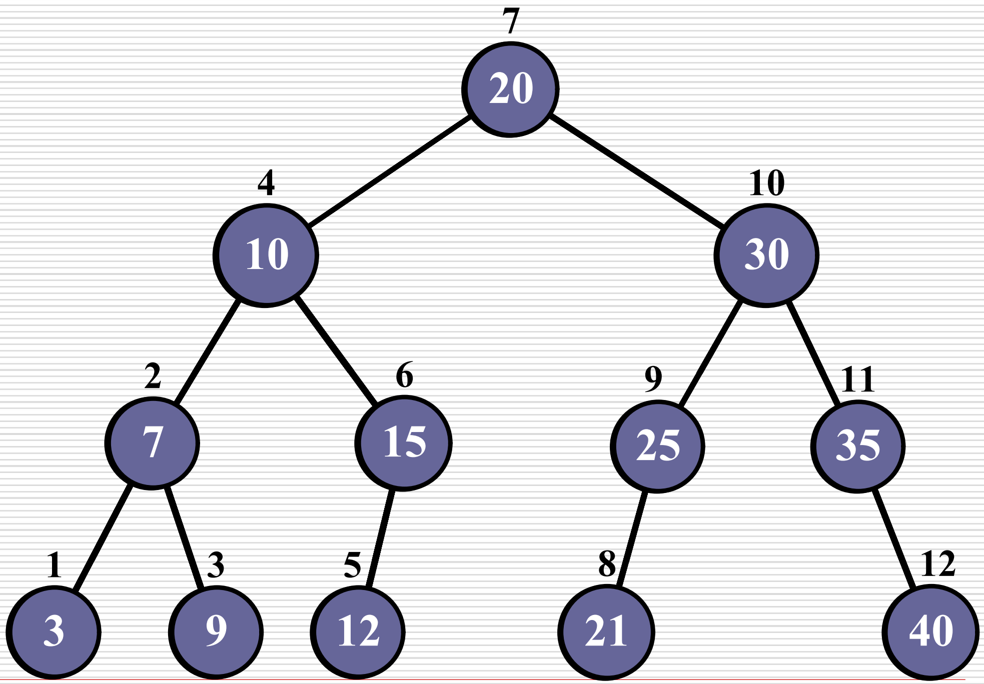
Πλήρες



- Όλα τα επίπεδα συμπληρωμένα εκτός ίσως από τελευταίο που γεμίζει από αριστερά προς τα δεξιά.
- $n(h)$: #κορυφών για ύψος h:
  $2^h \le n(h) \le 2^{h+1} - 1$
  - τέλειο(h) : $2^{h+1} - 1$
  - τέλειο($h - 1$) + 1 : $(2^h - 1) + 1 = 2^h$.
- $h(n)$: ύψος για n κορυφές:
  $\log_2(n+1) - 1 \le h(n) \le \log_2 n$
- Ύψος : $h(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$
- #φύλλων $= \lceil n / 2 \rceil$

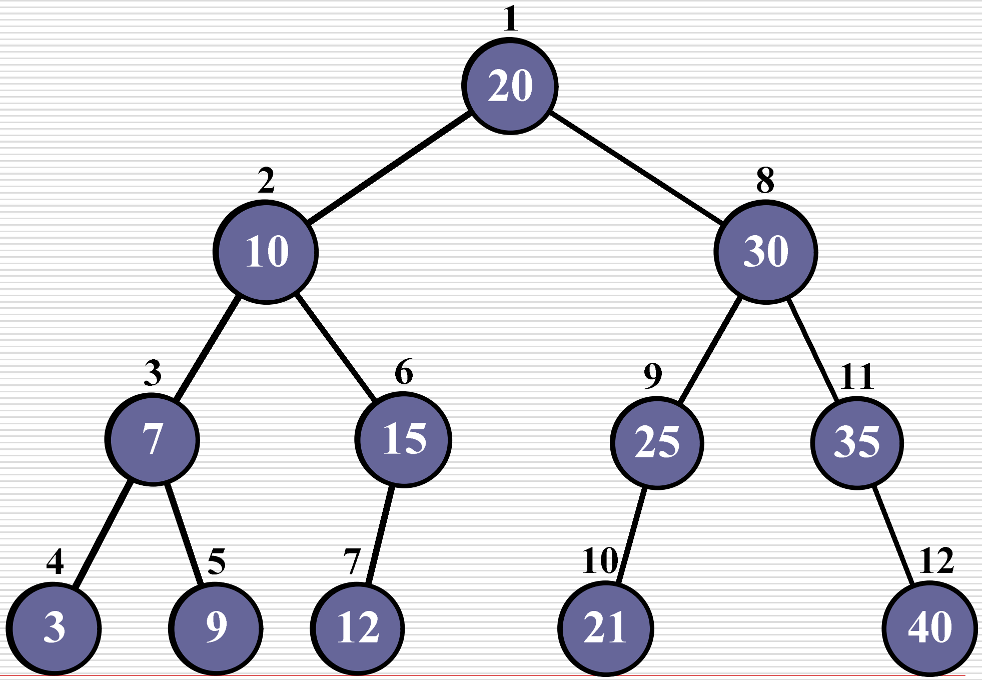
Inorder

- Ενδο-διατεταγμένη (inorder) διέλευση:
  - Αριστερό – Ρίζα – Δεξί.
  - Κόμβος εξετάζεται μετά από κόμβους αριστερού υποδέντρου και πριν από κόμβους δεξιού υποδέντρου.



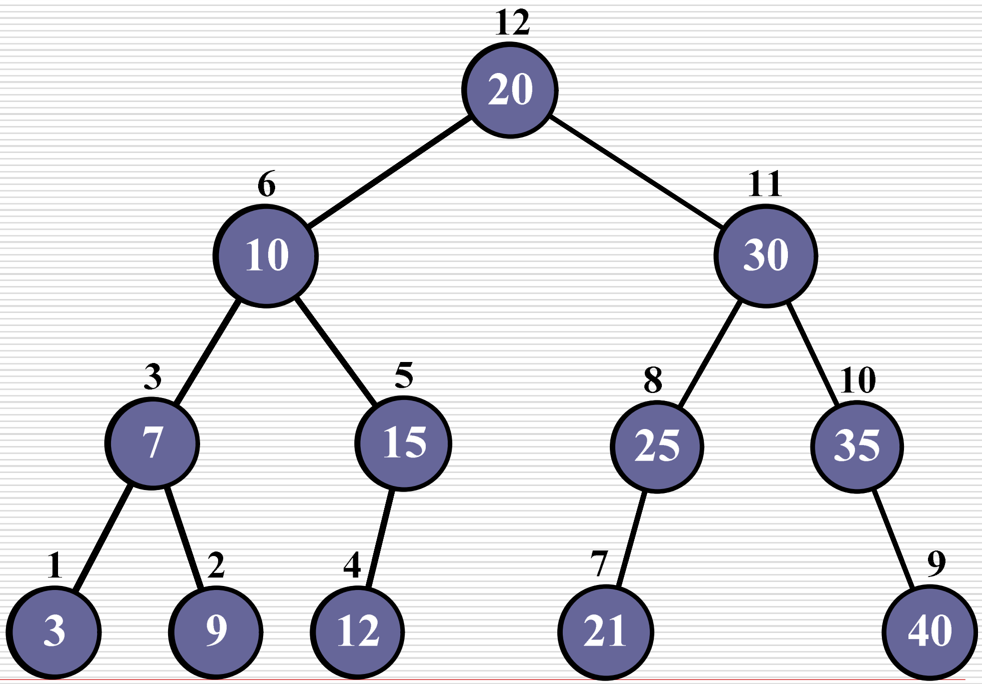
Preorder

- Προ-διατεταγμένη (preorder) διέλευση:
  - Ρίζα – Αριστερό – Δεξί.
  - Κόμβος εξετάζεται πριν από κόμβους αριστερού και δεξιού υποδέντρου.



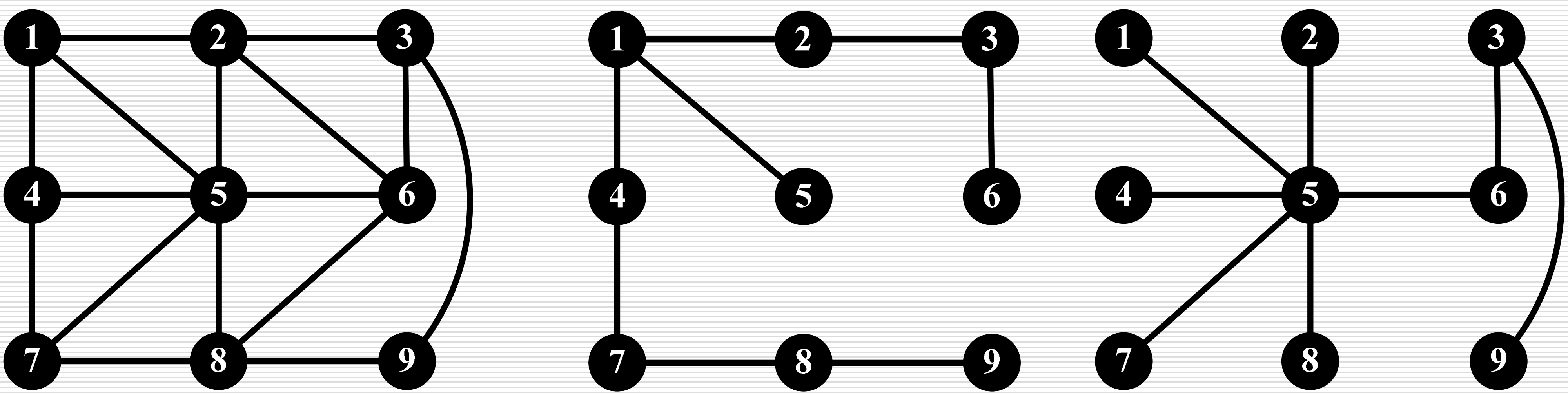
Postorder

- Μετα-διατεταγμένη (preorder) διέλευση:
  - Αριστερό – Δεξί – Ρίζα
  - Κόμβος εξετάζεται μετά από κόμβους αριστερού και δεξιού υποδέντρου.



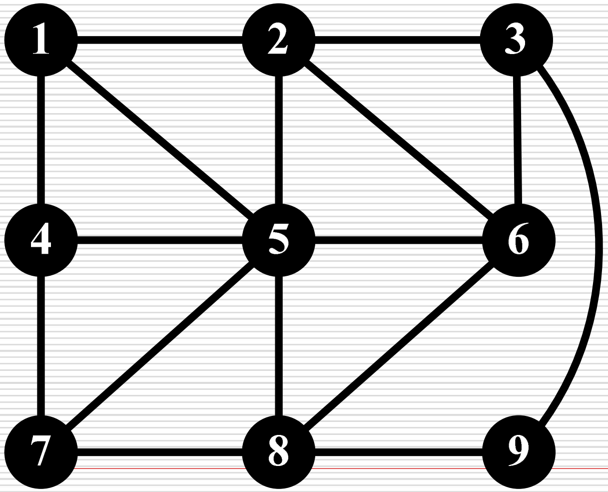
Συνδετικό (Επικαλύπτον) Δέντρο (Spanning Tree)

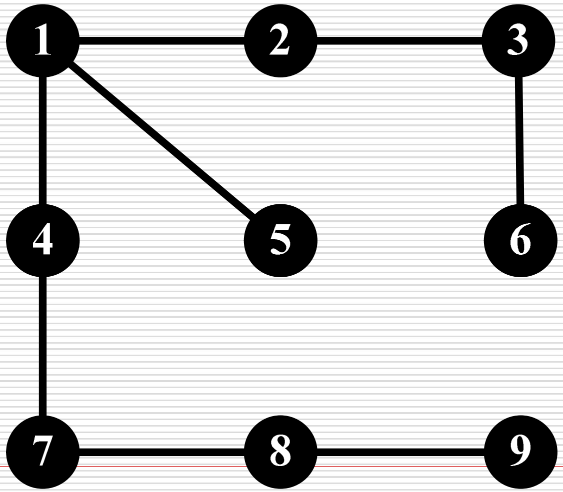
- Έστω συνεκτικό γράφημα G(V, E):
  - Κάθε δέντρο T(V, E’), με $E' \subseteq E$, που «καλύπτει» όλες τις κορυφές είναι **επικαλύπτον** (ή συνδετικό, spanning) δέντρο του G.
  - Γράφημα G συνεκτικό ανν έχει συνδετικό δέντρο.
  - Υπολογισμός ενός συνδετικού δέντρου με Αναζήτηση κατά Πλάτος ή Αναζήτηση κατά Βάθος.

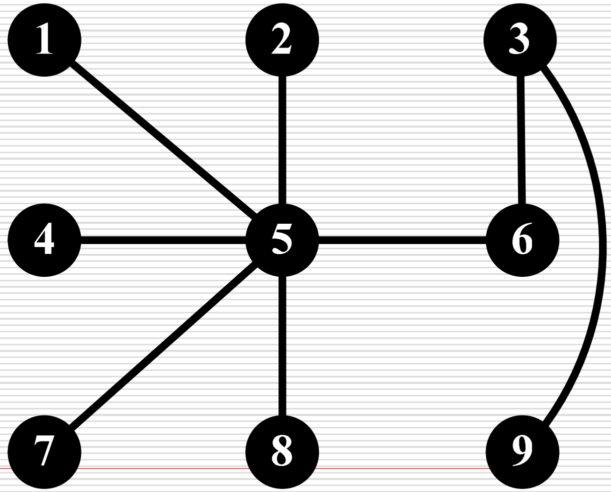


Συνδετικό (Επικαλύπτον) Δέντρο (Spanning Tree)

- Συνεκτικό G μπορεί να έχει πολλά συνδετικά δένδρα.
  - Πότε G έχει μοναδικό συνδετικό δέντρο;
  - Θεώρημα Cayley (1889): K_n έχει n^{n-2} συνδετικά δένδρα

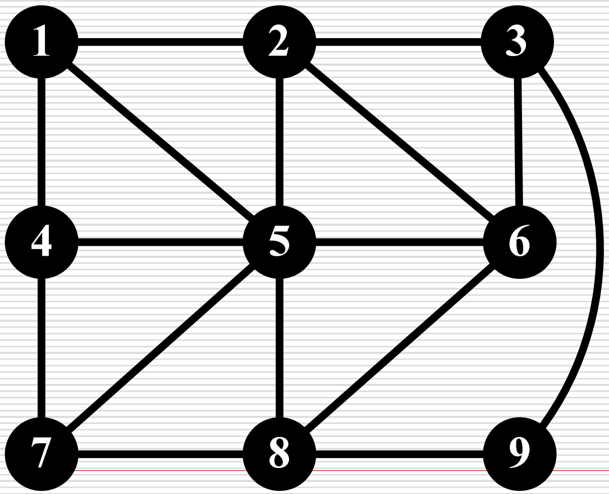


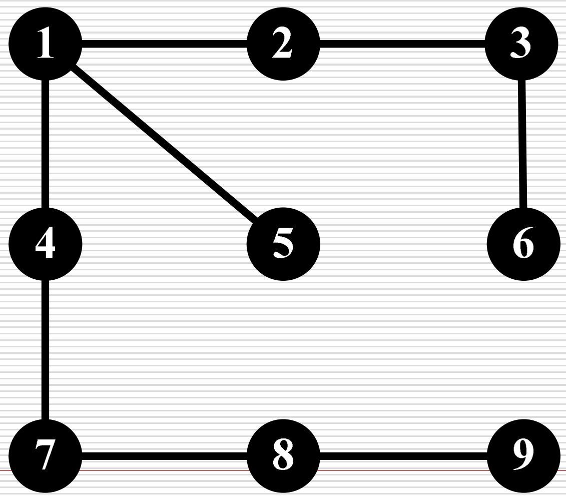


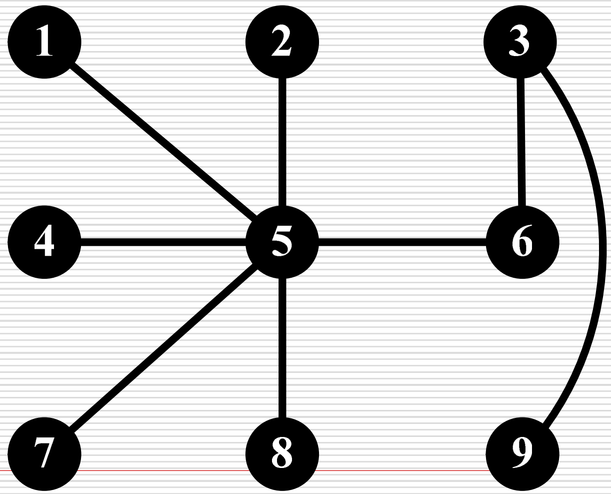


Συνδετικό (Επικαλύπτον) Δέντρο (Spanning Tree)

- Έστω T και T′ συνδετικά δέντρα G. Για κάθε ακμή $e \in T \setminus T'$, υπάρχει ακμή $e' \in T' \setminus T$, τ.ω. $(T'+e) - e'$ είναι συνδετικό δέντρο.
  - Για κάθε e εκτός του T′, το T′+e περιέχει μοναδικό κύκλο C.
  - Αφαιρούμε οποιαδήποτε ακμή e′ του C που δεν ανήκει στο T.
    - Υπάρχει τέτοια ακμή e′ γιατί κύκλος C δεν σχηματίζεται στο T.
    - Η e′ είναι διαφορετική της e γιατί $e \in T$.
  - $(T'+e) - e'$ συνδετικό δέντρο: συνεκτικό, ακυκλικό όλες τις κορυφές.

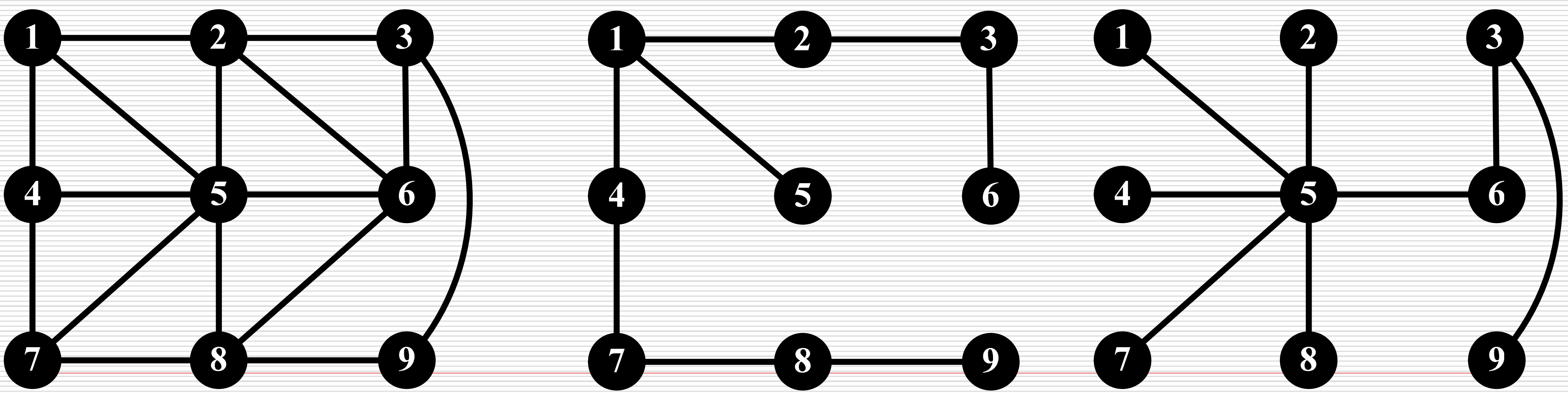






Συνδετικό (Επικαλύπτον) Δέντρο (Spanning Tree)

- Έστω T και T′ συνδετικά δέντρα G. Για κάθε ακμή $e \in T \setminus T'$, υπάρχει ακμή $e' \in T' \setminus T$, τ.ω. $(T-e)+e'$ είναι συνδετικό δέντρο.
- Από οποιοδήποτε συνδετικό δέντρο T μπορούμε να «μεταβούμε» σε οποιοδήποτε άλλο T′ με διαδοχικές «ανταλλαγές» ακμών.
  - Χρειάζονται ακριβώς $|T \setminus T'|$ «ανταλλαγές» ακμών.
Από κάθε ανταλλαγή προκύπτει συνδετικό δέντρο.
  - (Διακριτό) σύνολο ΣΔ έχει παρόμοια δομή με (συνεχή) κυρτά σύνολα!

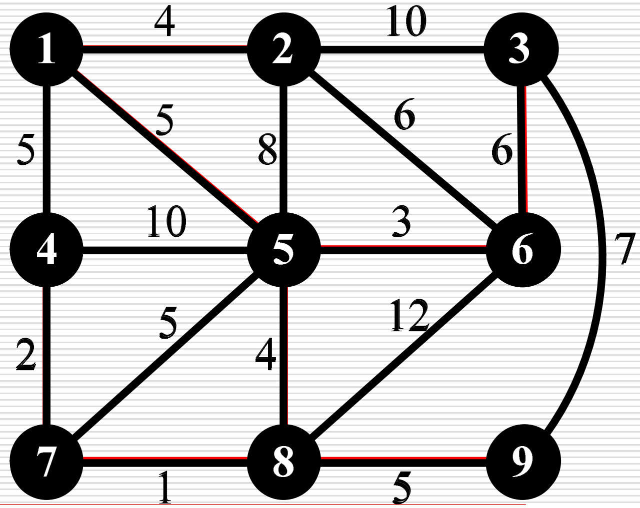


Παραδείγματα

- Νδο κάθε δέντρο με n ≥ 2 κορυφές έχει τουλ. 2 κορυφές που δεν είναι σημεία κοπής.
  - Τα φύλλα δεν είναι σημεία κοπής.
- Νδο κάθε συνεκτικό γράφημα με n ≥ 2 κορυφές έχει τουλ. 2 κορυφές που δεν είναι σημεία κοπής.
  - Τα φύλλα του συνδετικού δέντρου δεν είναι σημεία κοπής.
- Να διατυπώσετε αλγόριθμο για την εύρεση 2 κορυφών που δεν είναι σημεία κοπής.
  - Βρίσκουμε φύλλα στο δέντρο της Αναζ. κατά Πλάτος (ή Βάθος).

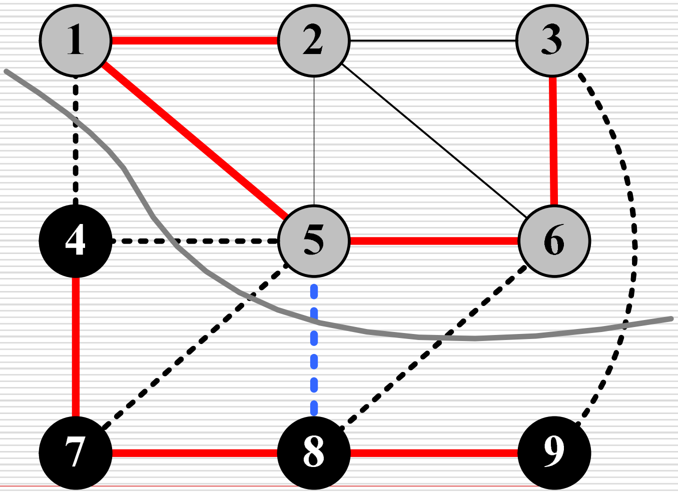
Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (MST)

- Συνεκτικό μη-κατευθ. G(V, E, w) με βάρη $w : E \mapsto \mathbb{R}_{>0}$
  - Βάρος υπογραφήματος $T(V, E_T)$: $w(T) = \sum_{e \in E_T} w(e)$
- Ζητούμενο: ελάχιστου βάρους **συνεκτικό** υπογράφημα που καλύπτει όλες τις κορυφές.
  - Συνεκτικό (εξ' ορισμού) + ακυκλικό (ελάχιστο) $\Rightarrow$ Δέντρο.
  - Minimum Spanning Tree (MST, ΕΣΔ).
- Πρόβλημα συνδυαστ. βελτιστοποίησης με πολλές και σημαντικές εφαρμογές.
  - Σχεδιασμός συνδετικού δικτύου (οδικού, τηλεπ/κου, ηλεκτρικού) με ελάχιστο κόστος.



Τομές, Σύνολα Τομής και Συνδετικά Δέντρα

- **Τομή (S, V \ S):** διαμέριση κορυφών σε 2 σύνολα S, V \ S.
- **Σύνολο τομής δ(S, V \ S):** σύνολο ακμών με ένα άκρο στο S και το άλλο άκρο στο V \ S.
  - δ(S, V \ S): όλες οι ακμές που **διασχίζουν** τομή (S, V \ S).
- Σύνολο E′ **διασχίζει** τομή (S, V \ S): $E' \cap \delta(S, V \setminus S) \neq \emptyset$
- Γράφημα G(V, E) συνεκτικό ανν E διασχίζει κάθε τομή.
  - Για κάθε (μη κενό) $S \subseteq V$, υπάρχει ακμή με ένα άκρο στο S και άλλο άκρο στο V \ S.
  - Συνδετικό δέντρο: ελαχιστικό σύνολο ακμών που διασχίζει κάθε τομή.

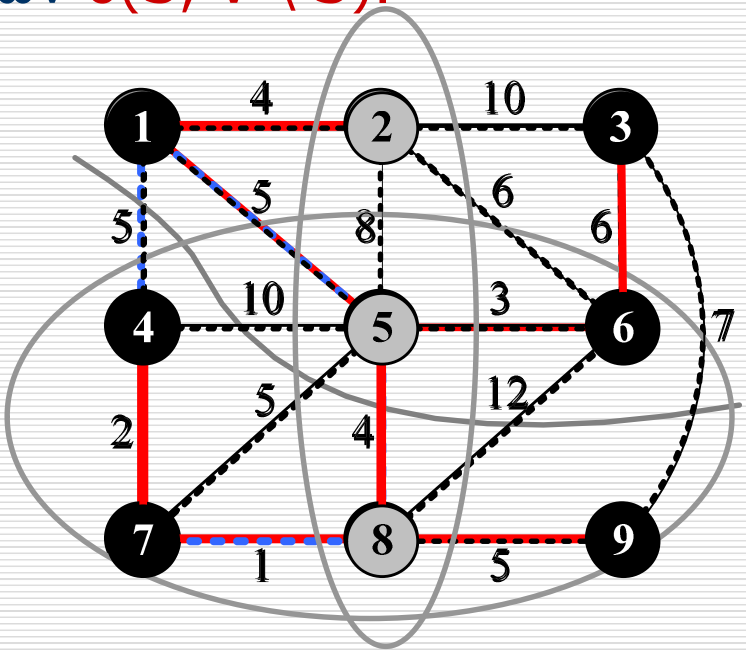


Κανόνες Σχηματισμού ΕΣΔ

- Ακμή e που για κάποια τομή (S, V \ S), αποτελεί ελάχιστου βάρους ακμή που διασχίζει τομή (S, V \ S):
  - e **ανήκει** σε κάποιο ΕΣΔ.
- Ακμή e που για κάποιον κύκλο C αποτελεί μέγιστου βάρους ακμή κύκλου C:
  - Αν βάρος e μεγαλύτερο από βάρος άλλων ακμών του C, e **δεν ανήκει** σε κανένα ΕΣΔ.
  - Αν όλες οι ακμές του C έχουν ίδιο βάρος, e **δεν ανήκει** σε κάποιο ΕΣΔ.
  - Ενόσω υπάρχει κύκλος C, **αποκλεισμός** (μιας) βαρύτερης ακμής C.

Άπληστος Αλγόριθμος για ΕΣΔ

- Έστω Δ δάσος (σύνολο ακμών χωρίς κύκλους).
- Ακμή $e \notin$ Δ είναι **ακμή επαύξησης** για Δ αν:
  - e διασχίζει μια τομή (S, V \ S) που δεν διασχίζει το Δ, και
  - e είναι ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών δ(S, V \ S).
- Ακμή επαύξησης για δάσος Δ οδηγεί σε ΕΣΔ έπειτα από |V|-1 βήματα:
  - Αν Δ δάσος και e ακμή επαύξησης για Δ, Δ $\cup$ { e } δάσος.
    - e δεν δημιουργεί κύκλο.
  - Αν Δ $\subset$ ΕΣΔ και e ακμή επαύξησης Δ, Δ $\cup$ { e } $\subseteq$ ΕΣΔ.



Άπληστος Αλγόριθμος για ΕΣΔ

$\text{MST}(G(V, E, w))$

$\quad \Delta \leftarrow \emptyset;$

$\quad$ **while** $|\Delta| < |V| - 1$ **do**

$\qquad$ **Υπολόγισε** μια **ακμή επαύξησης** e για Δ;

$\qquad \Delta \leftarrow \Delta \cup \{e\};$

$\quad$ **return**(Δ);

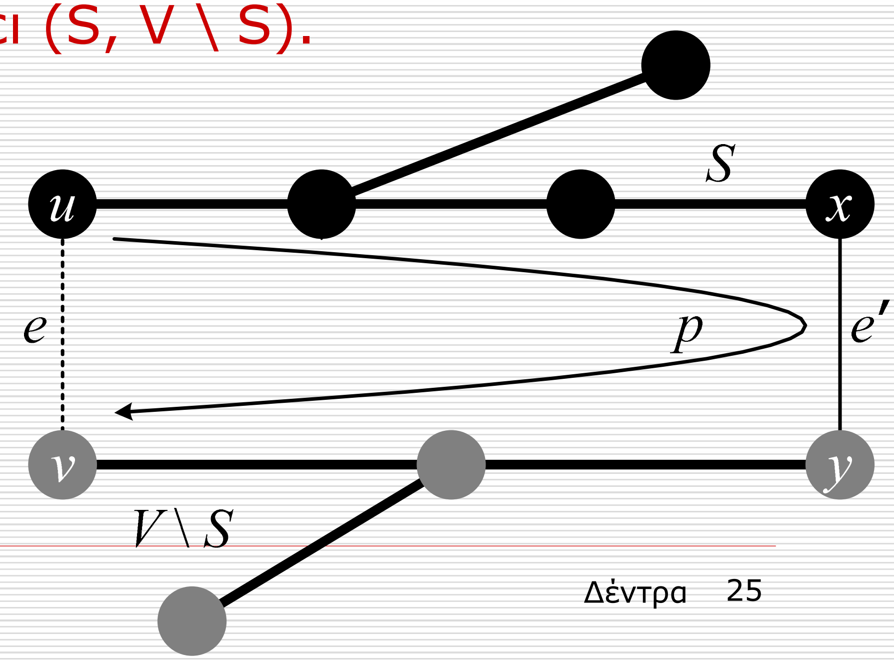
- Αρχικά $\Delta = \emptyset$ **δάσος** και **υποσύνολο** κάθε ΕΣΔ.
- Επαγωγικά, e ακμή επαύξησης για Δ:
  - $\Delta \cup \{ e \}$ **δάσος** και **υποσύνολο** κάποιου ΕΣΔ.
- Όταν $|\Delta| = |V| - 1$, Δ δέντρο, άρα και **ΕΣΔ**.

Ορθότητα

- Έστω δάσος Δ ⊂ ΕΣΔ και e = {u, v} **ακμή επαύξησης** Δ. Τότε Δ ∪ { e } ⊆ ΕΣΔ.
  - (S, V \ S) τομή που δεν διασχίζει Δ και διασχίζει η ακμή e.
  - e ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών του δ(S, V \ S).
  - Έστω T ΕΣΔ τ.ω. Δ ⊆ T. Υποθέτουμε ότι $\Delta \cup \{e\} \not\subseteq T$
  - Έστω p μονοπάτι u – v στο T, και e′ = {x, y} ακμή T που διασχίζει (S, V \ S).
  - Αφού w(e) ≤ w(e′), και το $T' = (T \cup \{e\}) \setminus \{e'\}$ είναι **ΕΣΔ**:

$$w(T') = w(T) + w(e) - w(e') \leq w(T)$$

  - Έχουμε ότι Δ ⊆ T και e′ ∉ Δ. Άρα $\Delta \subseteq T \setminus \{e'\} = T' \setminus \{e\}$
  - ... και $\Delta \cup \{e\} \subseteq T'$



Αλγόριθμος Kruskal

MST-Kruskal$(G(V, E, w))$

Ταξινόμησε ακμές σε αύξουσα σειρά βάρους, $w(e_1) \le \cdots \le w(e_m)$.

$\Delta \leftarrow \emptyset;\ i \leftarrow 1;$

while $|\Delta| < |V| - 1$ **and** $i \le m$ **do**

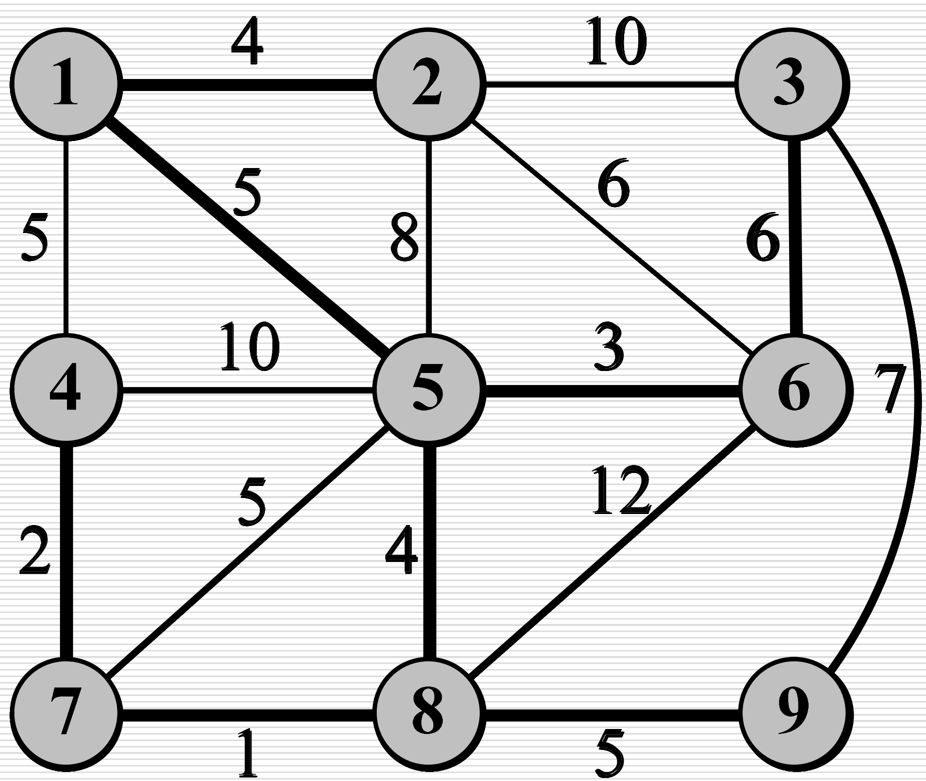
  if $\Delta \cup \{e_i\}$ δεν έχει κύκλο **then**

    $\Delta \leftarrow \Delta \cup \{e_i\};$

  $i \leftarrow i + 1;$

- **Ορθότητα**: αν e_i προστεθεί τότε:
  - Όχι κύκλος, άρα e_i διασχίζει μια τομή που δεν διασχίζει το Δ.
  - Αύξουσα σειρά βάρους: e_i ελάχιστου βάρους (πρώτη που ελέγχεται) από όσες ακμές διασχίζουν συγκεκριμένη τομή.

Αλγόριθμος Kruskal: Παράδειγμα

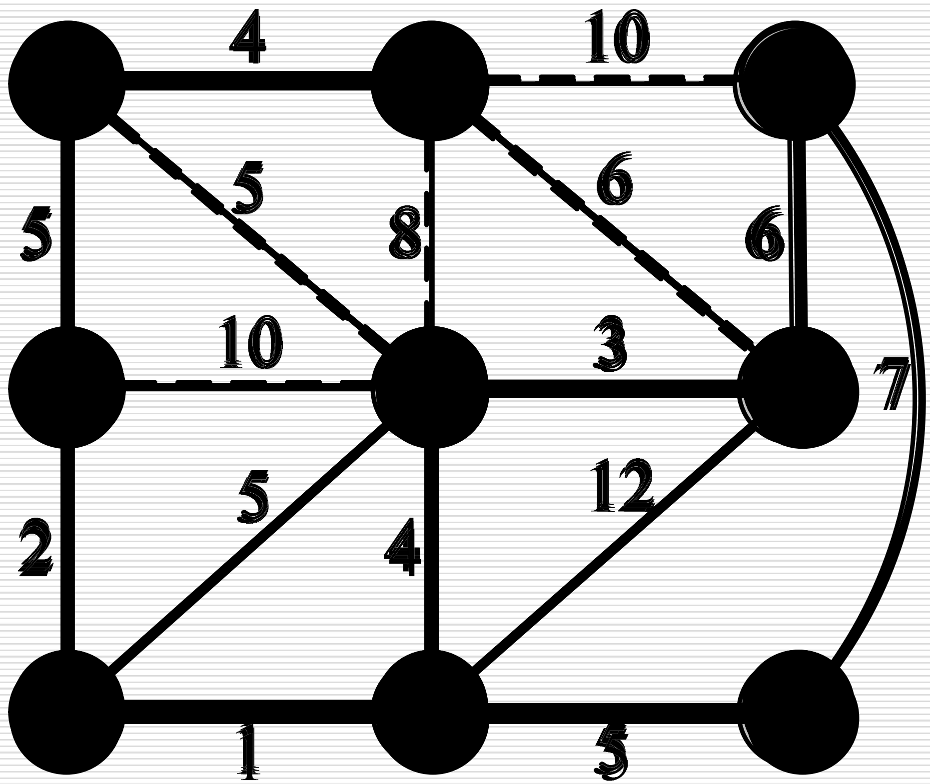


Αλγόριθμος Prim

- **Ορθότητα**:
  - Ακμή {v, p[v]}:
    - Διασχίζει τομή (S, V \ S).
    - Ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών του δ(S, V \ S).

MST-Prim$(G(V,E,w),s)$
  for all $u \in V$ **do**
    $c[u] \leftarrow \infty;\ p[u] \leftarrow \text{NULL};$
  $c[s] \leftarrow 0;\ S \leftarrow \emptyset;\ \Delta \leftarrow \emptyset;$
  while $|S| < |V|$ **do**
    $u \notin S : c[u] = \min_{v \notin S}\{c[v]\};$
    $S \leftarrow S \cup \{u\};$
    for all $v \in \text{AdjList}[u]$ **do**
      if $v \notin S$ **and** $w(u,v) < c[v]$ **then**
        $c[v] \leftarrow w(u,v);$
        $p[v] \leftarrow u;$
    if $p[u] \neq \text{NULL}$ **then**
      $\Delta \leftarrow \Delta \cup \{u, p[u]\};$

Αλγόριθμος Prim: Παράδειγμα



Ασκήσεις

- Έστω γράφημα G με διαφορετικά βάρη στις ακμές.
  - Νδο κάθε ΕΣΔ του G περιέχει την ακμή ελάχιστου βάρους.
  - Νδο G έχει μοναδικό ΕΣΔ.
  - Αληθεύει ότι η ακμή μέγιστου βάρους δεν ανήκει στο ΕΣΔ;
- Μεταβολή (αύξηση ή μείωση) βάρους ακμής μετά τον υπολογισμό ενός ΕΣΔ;
- Έστω γράφημα G με κύκλο C.
  - Νδο η ακμή μέγιστου βάρους του C (αν είναι μοναδική) δεν ανήκει σε κανένα ΕΣΔ του G.
- Έστω T ΕΣΔ για γράφημα G(V, E, w).
  - Να δείξετε ότι T παραμένει ΕΣΔ για G(V, E, w/2).
  - Αληθεύει ότι το T παραμένει ΕΣΔ για G(V, E, w+k);

Ασκήσεις

- Υπολογισμός ΕΣΔ T υπό περιορισμούς ότι κάποιες ακμές πρέπει να (μην) ανήκουν στο T;
- Υπολογισμός ΕΣΔ T (αν υπάρχει) όταν δεδομένο σύνολο κορυφών L πρέπει να είναι φύλλα του T;
- Υπολογισμός ΣΔ με μέγιστο βάρος;