ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΑΤΜ, 7/9/2022
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α (**3 μον**) *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι σωστές και ποιές είναι λάθος*:

(**Α1**) (0,5 μον) Ισχύει ότι $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **ΣΩΣΤΗ**

(**Α2**) (0,5 μον) Ισχύει ότι $1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \cdots = \sqrt{e}$. **ΣΩΣΤΗ: από το Α1 για** $x = 1/2$

(**Α3**) (0,5 μον) Αν (a_n) ακολουθία με $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. **ΛΑΘΟΣ:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

(**Α4**) (0,5 μον) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ συγκλίνει. **ΛΑΘΟΣ: είναι η αρμονική σειρά που ως γνωστόν αποκλίνει**

(**Α5**) (0,5 μον) Η ακολουθία $\frac{(n+1)^n}{n^n}$ συγκλίνει στο 1. **ΛΑΘΟΣ: συγκλίνει στον αριθμό** e

(**Α6**) (0,5 μον) Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = 1$ τότε αποκλίνει και για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $|x| > 1$. **ΣΩΣΤΗ: Η δυναμοσειρά απολίνει για** $|x| > R$ **και από την υπόθεση** $R \leq 1$.

<u>**ΘΕΜΑ Β**</u> (**3 μον**) Δίνεται η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n} x^n$.

(**Β1**) (1 μον) Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς και εξετάστε την σύγκλιση της δυναμοσειράς στα σημεία $x = \pm R$. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και για ποιά αποκλίνει?

(**Β2**) (1 μον) Θέτουμε $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n} x^n$, $x \in (-R, R)$. Δείξτε ότι $f'(x) = \dfrac{1}{3-x}$.

(**Β3**) (1 μον) Βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

Απόδειξη. (Β1) Έχουμε $a_n = \dfrac{1}{3^n n}$ και άρα $\varrho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3\sqrt[n]{n}} = \dfrac{1}{3}$. Συνεπώς, η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1/\varrho = 3$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < 3$ και αποκλίνει για $|x| > 2$. Ελέγχουμε τώρα τη σύγκλιση στα σημεία -2 και 2. Για $x = -3$ παίρνουμε την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία είναι η εναλλάσσουσα αρμονική που ως γνωστόν συγκλίνει (κριτήριο Dirichlet). Για $x = 3$ παίρνουμε την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική σειρά που ως γνωστόν αποκλίνει. Άρα η δψναμοσειρά συγκλίνει για $x \in [-3, 3)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(Β2) Για κάθε $x \in (-3, 3)$, από το Θεώρημα Παραγώγισης δυναμοσειράς, έχουμε $f'(x) = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{3^3} + \cdots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{1}{3-x}$.

(Β3) Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, έχουμε $f(x) - f(0) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{3-t}\, dt = -\int_3^{3-x} \frac{1}{u}\, du = \ln 3 - \ln(3-x) = \ln\frac{3}{3-x}$. Επειδή $f(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n} x^n|_{x=0} = 0$, έχουμε $f(x) = \ln\dfrac{3}{3-x}$, για κάθε $x \in (-3, 3)$. □

<u>ΘΕΜΑ Γ</u> (4 μον) (**Γ1**) (1,5 μον) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+10}\,dx$.

(**Γ2**) (1,5 μον) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$$

(**Γ3**) (1 μον) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Απόδειξη. (**Γ1**) Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{x}{x^2+6x+9+1}\,dx = \int \frac{x}{(x+3)^2+1}\,dx.$$

Θέτουμε $t = x+3$ και $dt = dx$. Οπότε

$$\int \frac{x}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{t-3}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t}{t^2+1}\,dt - 3\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = t^2+1$ και άρα $du = 2tdt \Rightarrow tdt = du/2$. Συνεπώς,

$$\int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \ln\sqrt{t^2+1} = \ln\sqrt{(x+3)^2+1}.$$

Για το δεύτερο έχουμε

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t = \arctan(x+3).$$

Τελικά,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \ln\sqrt{(x+3)^2+1} - \frac{\arctan(x+3)}{3}.$$

(**Γ2**) Έχουμε $f_x(x,y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x,y) = 4y^3 - 4x$. Άρα $f_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^3 = y$ και $f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow y^3 = x$. Συνεπώς

$$x^9 = x \Leftrightarrow x^9 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^8-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Συνεπώς αφού $y = x^3$ έχουμε τα εξής τρία κρίσιμα σημεία

$$(0,0),\ (1,1) \text{ και } (-1,-1)$$

Είναι $f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_{xy}(x,y) = -4$ και $f_{yy}(x,y) = 12y^2$. Άρα $\Delta(x,y) = 144x^2y^2 - 16$.
Επειδή $\Delta(0,0) = -16 < 0$ το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.
Επειδή $\Delta(1,1) > 0$ και $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ στο $(1,1)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.
Ομοίως στο $(-1,-1)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

(**Γ3**) Θα χρησιμοποιήσουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης με την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\arctan x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2} = 1$$

και άρα αφού η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει, θα αποκλίνει και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.

□