ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

(συγγραφή υπό εξέλιξη)

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΓΡΗΓΟΡΙΑΔΗΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 157 80, Αθήνα

Ηλεκτρονική Διεύθυνση: `vgregoriades@math.ntua.gr`

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1. Ορολογία και συμβολισμοί

Με $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ εννοούμε τα σύνολα των φυσικών, ακεραίων, ρητών και πραγματικών αριθμών αντίστοιχα, όπου στο $\mathbb{N}$ συμπεριλαμβάνουμε και το 0, έτσι που

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Το **δυναμοσύνολο** $\mathcal{P}(X)$ ενός συνόλου X είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X.

Δοσμένων δύο μη κενών συνόλων X και Y συμβολίζουμε με Y^X το **σύνολο όλων των συναρτήσεων** από το X στο Y. Αν $(X_i)_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια μη κενών συνόλων συμβολίζουμε με $\prod_{i \in I} X_i$ την οικογένεια όλων των συναρτήσεων $f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ με $f(i) \in X_i$ για κάθε $i \in I$. Στην περίπτωση όπου $X_i = X$ για κάθε $i \in I$ τότε το σύνολο $\prod_{i \in I} X_i$ είναι προφανώς το X^I. Θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα σύνολα της μορφής $X^{\mathbb{N}}$.

Μια ένα-προς-ένα συνάρτηση θα καλείται και **μονομορφισμός** ενώ μια επί συνάρτηση θα καλείται και **επιμορφισμός**. Με τον όρο **ισομορφισμός** ή **αντιστοιχία** εννοούμε μια συνάρτηση που είναι ένα-προς-ένα και επί. Επίσης συμβολίζουμε

$$\begin{aligned}
f : X \rightarrowtail Y &\iff \text{η } f \text{ είναι μονομορφισμός,} \\
f : X \twoheadrightarrow Y &\iff \text{η } f \text{ είναι επιμορφισμός,} \\
f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Y &\iff \text{η } f \text{ είναι ισομορφισμός.}
\end{aligned}$$

Αν $f \in Y^X$, $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$ συμβολίζουμε με $f[A]$ την **εικόνα** του A κάτω από την f και με $f^{-1}[B]$ την **αντίστροφη εικόνα** του B κάτω από την f, δηλαδή

$$\begin{aligned}
f[A] &= \{y \in Y \mid \text{υπάρχει } x \in X \text{ με } f(x) = y\} \\
f^{-1}[B] &= \{x \in X \mid f(x) \in B\}.
\end{aligned}$$

Ο **περιορισμός** μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ στο σύνολο $A \subseteq X$ συμβολίζεται με $f|A$. Στις συναρτήσεις $f : X \to Y$ συμπεριλαμβάνουμε και τις περιπτώσεις όπου τα X, Y είναι κενά με την προϋπόθεση ότι δεν έχουμε $X \neq \varnothing$ και $Y = \varnothing$. Αν έχουμε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ και τουλάχιστον ένα από τα X, Y είναι το κενό σύνολο τότε θα λέμε ότι η f είναι η **κενή συνάρτηση**. Θεωρούμε ότι η κενή συνάρτηση είναι πάντα μονομορφισμός και πως η $f : \varnothing \to \varnothing$ είναι ισομορφισμός.

Πολλές φορές όταν γράφουμε μαθηματικές προτάσεις θα χρησιμοποιούμε τους λογικούς τελεστές της **διάζευξης** $\vee$, **σύζευξης** $\&$, **άρνησης** $\neg$, και λογικής **συνεπαγωγής** $\longrightarrow$, που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
P(x) \;\vee\; Q(y) &\iff \text{το } x \text{ έχει την ιδιότητα } P \text{ ή το } y \text{ την } Q \\
P(x) \;\&\; Q(y) &\iff \text{το } x \text{ έχει την ιδιότητα } P \text{ και το } y \text{ την } Q \\
\neg P(x) &\iff \text{το } x \text{ δεν έχει την ιδιότητα } P \\
P(x) \;\longrightarrow\; Q(y) &\iff \text{αν το } x \text{ έχει την ιδιότητα } P \text{ τότε το } y \text{ έχει την } Q.
\end{aligned}$$

Με τον όρο "ποσοδείκτης" εννοούμε είτε το $\exists$ (υπαρξιακός ποσοδείκτης) είτε το $\forall$ (καθολικός ποσοδείκτης). Όταν γράφουμε λογικές προτάσεις με σύμβολα θα παραλείπουμε τις παρενθέσεις όσο είναι δυνατόν. Για παράδειγμα με

$$\exists i \in I\ \forall j \in J\ (i, j) \in A$$

εννοούμε ότι υπάρχει ένα στοιχείο i του I έτσι ώστε για κάθε στοιχείο j του J ισχύει $(i, j) \in A$.

Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι ποσοδείκτες με "κενό πεδίο" δηλαδή οι εκφράσεις $\exists i \in I$ και $\forall i \in I$ όπου I είναι το κενό σύνολο. Κάθε έκφραση της μορφής

$$\exists i \in I\ P(i)$$

για $I = \varnothing$ είναι πάντα ψευδής γιατί είναι λογικά ισοδύναμη με την $\exists i\ (i \in \varnothing\ \&\ P(i))$. Από την άλλη κάθε έκφραση της μορφής

$$\forall i \in I\ P(i)$$

για $I = \varnothing$ είναι πάντα αληθής γιατί είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall i\ (i \notin \varnothing\ \vee\ P(i))$.

1.2. Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Δύο σύνολα A, B ονομάζονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $A =_c B$. Αντιλαμβανόμαστε τη σχέση $=_c$ ως μαθηματική έκφραση της διαισθητικής έννοιας "το A έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το B". Η θεώρησή μας ότι η κενή συνάρτηση $f : \varnothing \to \varnothing$ είναι ένα-προς-ένα και επί εκφράζει τη βασική αρχή ότι το κενό σύνολο έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων με τον εαυτό του, συγκεκριμένα καθόλου στοιχεία.

Θα λέμε ότι το σύνολο A έχει **πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο** από το B και θα γράφουμε $A \leqslant_c B$ αν υπάρχει μια ένα-προς-ένα συνάρτηση $f : A \rightarrowtail B$. Αντιλαμβανόμαστε την έκφραση $\leqslant_c$ ως μαθηματική έκφραση της διαισθητικής έννοιας "το A έχει μικρότερο ή ίσο πλήθος στοιχείων από το B". Η θεώρησή μας ότι η κενή συνάρτηση $f : \varnothing \to B$ είναι πάντα ένα-προς-ένα εκφράζει τη βασική αρχή ότι το κενό σύνολο έχει πάντα λιγότερα στοιχεία από οποιοδήποτε μη κενό σύνολο.

Οι πιο πάνω ορισμοί θα είχαν μικρό νόημα αν δεν επαλήθευαν την εξής θεμελιώδη απαίτηση:

> αν
>
> > το A έχει μικρότερο ή ίσο πλήθος στοιχείων από το B και
> >
> > το B έχει μικρότερο ή ίσο πλήθος στοιχείων από το A
>
> τότε
>
> > το A και το B έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Αυτό ικανοποιείται για τους πιο πάνω ορισμούς από το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.2.1 (Schröder-Bernstein)**.** *Για όλα τα σύνολα A, B αν $A \leqslant_c B$ και $B \leqslant_c A$ τότε $A =_c B$.*

Ένα σύνολο A είναι **πεπερασμένο** αν είναι είναι ισοπληθικό με το σύνολο $\{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Όταν $n = 0$ το τελευταίο σύνολο είναι το κενό έτσι που το κενό σύνολο είναι πεπερασμένο. Το A είναι **αριθμήσιμο** αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$. Όπως είναι γνωστό τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- το A είναι αριθμήσιμο,
- $A \leqslant_c \mathbb{N}$,
- $A = \varnothing$ ή υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ (όχι απαραίτητα ένα-προς-ένα).

Ο τελευταίος χαρακτηρισμός λέει ότι τα αριθμήσιμα σύνολα είναι ακριβώς αυτά που επιδέχονται μια απαρίθμηση $A = \{\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(n), \dots\} = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$, χωρίς να μας απασχολεί αν κάποιες τιμές επαναλαμβάνονται, δηλαδή επιτρέπουμε $\pi(n) = \pi(m)$ για $n \neq m$.

Μερικά βασικά αποτελέσματα στα αριθμήσιμα σύνολα είναι τα εξής:

- Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από αριθμήσιμα σύνολα τότε η ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.
- Αν τα $A_0,\dots, A_n$ είναι αριθμήσιμα σύνολα τότε το καρτεσιανό γινόμενο $A_0 \times \cdots \times A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.
- Αν το B είναι αριθμήσιμο σύνολο και $A \leqslant_c B$ τότε το A είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Από τα προηγούμενα προκύπτει εύκολα ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-1) \cdot \mathbb{N}$ και οι ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q} \leqslant_c \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμα σύνολα. Συνεπώς $\mathbb{N} =_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{Q}$. Άλλες γνωστές ισοπληθικότητες είναι:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{N} =_c \text{το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών},\\
&\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\\
&\mathbb{R} =_c (a,b) =_c [a,b) =_c (a,b] =_c [a,b] \quad \text{όπου } a < b,\\
&\mathbb{R} =_c C([0,1]) = \text{το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων } f : [0,1] \to \mathbb{R},\\
&\mathbb{R} =_c \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \text{το σύνολο όλων των άρρητων αριθμών}.
\end{aligned}
$$

Θα λέμε ότι ένα σύνολο A **έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς** αν $A =_c \mathbb{R}$ και ότι το A **έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του συνεχούς** αν $A \leqslant_c \mathbb{R}$.

Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα βλέπουμε ότι όπου έχουμε ένα άπειρο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ισχύει είτε $A =_c \mathbb{N}$ είτε $A =_c \mathbb{R}$. Ο Cantor, θεμελιωτής της θεωρίας συνόλων, έθεσε το ερώτημα κατά πόσον αυτό το συμπέρασμα ισχύει για όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αυτή η πρόταση έγινε γνωστή ως

Υπόθεση του Συνεχούς (Continuum Hypothesis).
Για κάθε άπειρο $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει είτε $A =_c \mathbb{N}$ είτε $A =_c \mathbb{R}$.

Όπως αποδείχθηκε από τους Gödel (1940) και Cohen (1963) η Υπόθεση του Συνεχούς είναι *ανεξάρτητη* από τα συνήθη αξιώματα των μαθηματικών. Δηλαδή δεν μπορεί ούτε να αποδειχθεί (Cohen) αλλά ούτε και να διαψευστεί (Gödel) με εργαλεία τα συνηθισμένα αξιώματα που δεχόμαστε στα μαθηματικά.

Από την άλλη έγινε γρήγορα γνωστό πως κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ικανοποιεί την Υπόθεση του Συνεχούς. Βλέπουμε λοιπόν ότι η προσθήκη μιας τοπολογικής συνθήκης απαντά θετικά στο πρόβλημα. Θα δούμε ότι η Υπόθεση του Συνεχούς επαληθεύεται από πολύ περισσότερα "ορίσιμα" σύνολα.

Τέλος αναφέρουμε το γνωστό αποτέλεσμα του Cantor ότι για κάθε σύνολο A έχουμε $A <_c \mathcal{P}(A)$, δηλαδή $A \leqslant_c \mathcal{P}(A)$ και $A \neq_c \mathcal{P}(A)$. Συνεπώς υπάρχουν σύνολα με μεγαλύτερη πληθικότητα από το $\mathbb{R}$, το $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ για παράδειγμα. Από την άλλη τα σύνολα με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι συνήθως $\leqslant_c \mathbb{R}$.

1.3. Στοιχεία μετρικών χώρων και τοπολογίας

Δίνουμε μια σύντομη ανασκόπηση των εννοιών που θα χρειαστούμε. **Μετρική** σε ένα μη κενό σύνολο X είναι μια συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

$$
\begin{aligned}
&d(x,y) \geqslant 0 \text{ και } d(x,y) = 0 \iff x = y\\
&d(x,y) = d(y,x)\\
&d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,x)
\end{aligned}
$$

όπου $x, y \in X$. Το ζεύγος (X, d) ονομάζεται μετρικός χώρος.

Η **διακριτή μετρική** σε ένα σύνολο X είναι η

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ αν } x \neq y, \\ 0, \text{αν } x = y, \end{cases} \qquad \text{όπου } x, y \in X.$$

Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά θα θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ με τη **συνήθη μετρική** της απόστασης $\sigma(x,y) = |x-y|$.

Στους επόμενους ορισμούς θεωρούμε ότι μας δίνεται ένας μετρικός χώρος (X,d). Για κάθε μη κενό $Y \subseteq X$ μπορούμε να πάρουμε τον **περιορισμό** $d|(Y \times Y) \equiv d_Y$ της μετρικής d στο σύνολο Y, δηλαδή $d_Y(x,y) = d(x,y)$ για κάθε $x,y \in Y$. Ο (Y, d_Y) θα λέγεται **υπόχωρος** του (X,d).

Αν $x \in X$ και $r > 0$ η **ανοικτή μπάλα** κέντρου x και ακτίνας r στον (X,d) είναι το σύνολο

$$B_d^X(x,r) \equiv B_d(x,r) \equiv B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}.$$

Το σημείο x είναι **εσωτερικό σημείο** του $A \subseteq X$ αν υπάρχει $r > 0$ με $B_d(x,r) \subseteq A$. Το A είναι **ανοικτό** αν κάθε $x \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A.

Το **εσωτερικό** A° του A είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A, ισοδύναμα

$$A^\circ = \bigcup\{V \subseteq X \mid V\text{: ανοικτό και } V \subseteq A\}.$$

Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X **συγκλίνει** στο $x \in X$ ως προς την μετρική d αν $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) \to 0$. Γράφουμε $x_n \xrightarrow{d} x$ ή πιο απλά $x_n \to x$ όταν η d είναι σαφής από το κείμενο, για να δηλώσουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x. Λέμε ότι μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $A \subseteq X$ είναι **συγκλίνουσα** στο A αν υπάρχει $x \in A$ με $x_n \to x$.

Ένα $x \in X$ είναι **οριακό σημείο** του $A \subseteq X$ αν για κάθε $r > 0$ υπάρχει $y \in A$ με $d(x,y) < r$. Παρατηρούμε ότι το προηγούμενο y μπορεί να είναι ίσο με το x (όταν $x \in A$), έτσι που κάθε στοιχείο του A είναι και οριακό σημείο του A. Στους μετρικούς χώρους το x είναι οριακό σημείο του A αν υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to x$ ως προς d.

Το x είναι **σημείο συσσώρευσης** του A αν για κάθε $r > 0$ υπάρχει $y \in A\backslash\{x\}$ με $d(x,y) < r$. Στους μετρικούς χώρους αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to x$ και $x_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το σημείο $x \in A$ είναι **μεμονωμένο σημείο** του $A \subseteq X$ αν υπάρχει $r > 0$ με $B(x,r) \cap A = \{x\}$. Είναι σαφές ότι τα οριακά σημεία του A είναι ακριβώς τα μεμονωμένα σημεία μαζί με τα σημεία συσσώρευσης του A.

Το A είναι **κλειστό** αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία (ισοδύναμα περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του) ενώ το A είναι **τέλειο** αν είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Η κλειστότητα $\overline{A}$ του A είναι το σύνολο όλων των οριακών σημείων του A, ισοδύναμα

$$\overline{A} = \bigcap\{F \subseteq X \mid F\text{: κλειστό και } F \supseteq A\}.$$

Προφανώς $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$, το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A = A^\circ$ και το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A = \overline{A}$. Όπως είναι γνωστό το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν το συμπλήρωμα $X\backslash A$ είναι κλειστό.

Ένα $D \subseteq X$ είναι **πυκνό** στον (X,d) αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ ισχύει $B_d(x,r) \cap D \neq \varnothing$. Προφανώς αν το D είναι πυκνό υποσύνολο του (X,d) τότε κάθε στοιχείο του X είναι όριο ακολουθίας του D. Ο μετρικός χώρος (X,d) είναι **διαχωρίσιμος** αν έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

Ένα $K \subseteq X$ είναι **συμπαγές** αν για κάθε οικογένεια $(V_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$ υπάρχουν $i_1, \ldots, i_n \in I$ με $K \subseteq \bigcup_{t=1}^n V_{i_t}$, δηλαδή για κάθε ανοικτό κάλυμμα του K υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Η συμπάγεια στους μετρικούς χώρους είναι ισοδύναμη με την **ακολουθιακή συμπάγεια**, δηλαδή το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του υπάρχει υπακολουθία $(x_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο $x \in K$. Κάθε συμπαγές σύνολο είναι κλειστό.

Μια συνάρτηση $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ ανάμεσα σε μετρικούς χώρους είναι **συνεχής στο σημείο** $x \in X$ αν για κάθε $r > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f[B_d(x, \delta)] \subseteq B_\rho(f(x), r)$, ισοδύναμα για κάθε $V \subseteq Y$ που είναι ρ-ανοικτό υπάρχει $W \subseteq X$ που είναι d-ανοικτό έτσι ώστε $f[W] \subseteq Y$. Σύμφωνα με την *Αρχή Μεταφοράς* για μετρικούς χώρους η f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X με $x_n \xrightarrow{d} x$ ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$.

Η συνάρτηση f είναι **συνεχής** αν είναι συνεχής *σε κάθε* $x \in X$ ή ισοδύναμα για κάθε ανοικτό $V \subseteq Y$ η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[V]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Τέλος θα λέμε ότι η f είναι **τοπολογικός ισομορφισμός**.

Δύο μετρικές d_1 και d_2 στο σύνολο X είναι **ισοδύναμες**, συμβολικά $d_1 \sim d_2$ αν παράγουν την ίδια τοπολογία, δηλαδή για κάθε $V \subseteq X$ το V είναι d_1-ανοικτό αν και μόνο αν το V είναι d_2-ανοικτό. Ισοδύναμα $d_1 \sim d_2$ αν και μόνο αν η **ταυτοτική συνάρτηση**

$$\mathrm{id} : (X, d_1) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (X, d_2)$$

είναι τοπολογικός ισομορφισμός, ισοδύναμα για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο σύνολο X και κάθε $x \in X$ ισχύει

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \iff x_n \xrightarrow{d_2} x.$$

Για κάθε μετρικό χώρο (X, d_1) οι συναρτήσεις

$$d_2 = \min\{d_1, 1\} \quad \text{και} \quad d_3 = \frac{d_1}{1 + d_1}$$

είναι μετρικές ισοδύναμες με την d_1. Παρατηρούμε ότι $d_2, d_3 \leqslant 1$, γι' αυτό είναι σύνηθες να θεωρείται ότι η μετρική παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες από τη μονάδα.

Η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του X ικανοποιεί τις εξής βασικές ιδιότητες: (α) το κενό σύνολο $\varnothing$ και το X είναι ανοικτά συνόλα, (β) οποιαδήποτε ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό, και (γ) η πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό.

Μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X ονομάζεται **τοπολογία** στο X αν περιέχει το κενό σύνολο $\varnothing$ και το X, για κάθε οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$ συνόλων της $\mathcal{T}$ έχουμε $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$, και για κάθε $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ έχουμε $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{T}$. Με άλλα λόγια μια τοπολογία ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες (α), (β), (γ) των ανοικτών συνόλων ή αλλιώς η οικογένεια των ανοικτών συνόλων ενός μετρικού χώρου αποτελεί τοπολογία. Αυτή την οικογένεια, δηλαδή την οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X, d) θα τη λέμε **η τοπολογία του** (X, d).

Ένα ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται **τοπολογικός χώρος** αν το $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο X. Τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ λέγονται **ανοικτά** σύνολα του τοπολογικού χώρου. Τα **κλειστά** υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου είναι τα συμπληρώματα ανοικτών. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι **μετρικοποιήσιμος** ή πιο απλά η $\mathcal{T}$ είναι **μετρικοποιήσιμη** αν υπάρχει μετρική d στο X ώστε η $\mathcal{T}$ να είναι η τοπολογία του (X, d), δηλαδή η οικογένεια των d-ανοικτών υποσυνόλων του X.

Οι προηγούμενες έννοιες, όπως για παράδειγμα το εσωτερικό, η κλειστότητα, η συμπάγεια, η σύγκλιση,η συνέχεια, και η διαχωρισιμότητα επεκτείνονται στο πλαίσιο των τοπολογικών χώρων αντικαθιστώντας τις d-ανοικτές μπάλες $B_d(x, r)$ με στοιχεία της τοπολογίας V που περιέχουν το x. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με μετρικοποιήσιμους τοπολογικούς χώρους, παρολ' αυτά είναι χρήσιμο να βλέπουμε αυτές τις έννοιες από τη σκοπιά της τοπολογίας.

Μια οικογένεια $\mathcal{V}$ από υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι **βάση της τοπολογίας** του X ή πιο απλά **βάση** του X αν $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ και κάθε $U \in \mathcal{T}$ είναι ίσο με ένωση (πεπερασμένη ή άπειρη) στοιχείων της $\mathcal{V}$, δηλαδή υπάρχει οικογένεια $(B_i)_{i\in I}$ στοιχείων της $\mathcal{V}$ με $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Στους μετρικούς χώρους αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{V}$ είναι ανοικτό σύνολο και κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{V}$.

Αν το D είναι πυκνό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,d) τότε το σύνολο

$$\mathcal{V} = \{B_d(x,q) \mid q \in \mathbb{Q},\ q > 0\}$$

αποτελεί βάση για την τοπολογία του (X,d). Ειδικότερα αν ο X είναι διαχωρίσιμος τότε η τοπολογία του έχει αριθμήσιμη βάση (χρησιμοποιούμε ότι το σύνολο $\mathbb{N}\times\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο). Ισχύει και το αντίστροφο: κάθε μετρικός χώρος που έχει αριθμήσιμη βάση είναι διαχωρίσιμος.

Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον (X,d) είναι **Cauchy** ή **βασική** αν για κάθε $r > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n, m \geqslant n_0$ ισχύει $d(x_n, x_m) < r$. Ο μετρικός χώρος (X,d) είναι **πλήρης** αν κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα στον (X,d).

Οι προηγούμενες κατασκευές ισοδύναμων μετρικών $d \mapsto \min\{1,d\}$ και $d \mapsto \dfrac{d}{1+d}$ διατηρούν την πληρότητα. Δηλαδή αν ο (X,d) είναι πλήρης μετρικός χώρος τότε οι μετρικοί χώροι (X,d) και $\left(X, \dfrac{d}{1+d}\right)$ είναι επίσης πλήρεις (Άσκηση 2.1.10).

Από την άλλη η πληρότητα δεν διατηρείται γενικά κάτω από ισοδύναμες μετρικές, και επομένως ούτε κάτω από τοπολογικούς ισομορφισμούς. Ως παράδειγμα θεωρούμε το σύνολο $X = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ με τις μετρικές

$$\rho(x,y) = |x-y|$$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ αν } x \neq y, \\ 0, \text{αν } x = y, \end{cases} \qquad \text{(διακριτή μετρική).}$$

Τότε κάθε $A \subseteq X$ είναι ρ-ανοικτό όπως επίσης και d-ανοικτό. Ειδικότερα οι δύο μετρικές είναι ισοδύναμες και η ταυτοτική συνάρτηση $\mathrm{id} : (X,\rho) \to (X,d)$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός. Επιπλέον ο (X,d) είναι πλήρης μετρικός χώρος. Από την άλλη η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ρ-Cauchy η οποία όμως δεν συγκλίνει ως προς την ρ σε κάποιο $x \in X$.

Προκύπτει από τα πιο πάνω ότι η πληρότητα δεν επεκτείνεται στους τοπολογικούς χώρους. Συγκεκριμένα *δεν υπάρχει* ιδιότητα τοπολογικών χώρων P έτσι ώστε *για κάθε* μετρική d αν η $\mathcal{T}$ είναι μετρικοποιήσιμη από την d τότε

$$\text{ο } (X,\mathcal{T}) \text{ έχει την } P \iff \text{ο } (X,d) \text{ είναι πλήρης μετρικός χώρος.}$$

Για να το δούμε αυτό παίρνουμε τους μετρικούς χώρους (X,ρ) και (X,d) του προηγούμενου παραδείγματος και βλέπουμε ότι εφόσον οι μετρικές είναι ισοδύναμες τότε παράγουν την ίδια τοπολογία $\mathcal{T}$. Από την άλλη ο ένας μετρικός χώρος είναι πλήρης ενώ ο άλλος όχι.

Όπως είναι γνωστό οι ιδιότητες της διαχωρισιμότητας και της συμπάγειας διατηρούνται κάτω από τοπολογικούς ισομορφισμούς, ή αλλιώς λέμε ότι είναι **τοπολογικές ιδιότητες**.

Τέλος αναφερόμαστε σε κάποιες συγκεκριμένες κατασκευές μετρικών χώρων από ήδη δοσμένους. Το **ευθύ άθροισμα** δύο μετρικών χώρων (X, d_X) και (Y, d_Y) είναι ο μετρικός χώρος (Z,d) με

$$Z = (\{0\}\times X) \bigcup (\{1\}\times Y)$$

$$d((i,x),(j,y)) = \begin{cases} d_X(x,y), \text{ αν } i=j=0 \\ d_Y(x,y), \text{ αν } i=j=1 \\ 1, \text{ αν } i \neq j. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια θεωρούμε δύο ξένα αντίτυπα των X, Y και τα τοποθετούμε σε μια θετική απόσταση (π.χ. 1) το ένα από το άλλο. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι τα $\{0\} \times X$ και $\{1\} \times Y$ είναι ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του Z. Θα συμβολίζουμε το ευθύ άθροισμα των (X, d_X) και (Y, d_Y) με $X \oplus Y$ και θα το εννοούμε πάντα με την πιο πάνω μετρική d.

Το **καρτεσιανό γινόμενο** των χώρων (X, d_X) και (Y, d_Y) είναι το σύνολο $X \times Y$ με τη μετρική

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, y_1) + d_Y(x_2, y_2).$$

Εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά θα θεωρούμε τον $X \times Y$ με την πιο πάνω μετρική d. Με όμοιο τρόπο ορίζουμε το πεπερασμένο καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times \cdots \times X_n$ μετρικών χώρων. Ειδικότερα στον $\mathbb{R}^n$ θα θεωρούμε τη μετρική

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad \text{όπου } \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Όπου θεωρούμε την ισοδύναμη Ευκλείδια μετρική θα το αναφέρουμε.

Αν έχουμε μια ακολουθία μετρικών χώρων $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ τότε θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ με τη μετρική

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \min\{d_n(x(n), y(n)), 1\},$$
$$\text{όπου } x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}}, y = (y(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Αν $\mathcal{V}_n$ είναι βάση για την τοπολογία (ενδεχομένως και η ίδια η τοπολογία) του X_n, $n \in \mathbb{N}$, τότε μια βάση για την τοπολογία του $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ είναι η οικογένεια $\mathcal{V}$ όλων των συνόλων της μορφής

$$V_0 \times \cdots \times V_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \ldots,$$

όπου $V_i \in \mathcal{V}_i$ για κάθε $i = 0, \ldots, n$ και $n \in \mathbb{N}$.

Αν $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στοιχείων του $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ με $x_i = (x_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$, και $x = (x(n))_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ τότε

$$x_i \to x \text{ στον } \textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \iff \text{για κάθε } n \text{ ισχύει } x_i(n) \xrightarrow{i\to\infty} x(n) \text{ στον } X_n.$$

Οι προηγούμενες κατασκευές μετρικών χώρων σέβονται την πληρότητα και τη διαχωρισιμότητα. Δηλαδή το *ευθύ άθροισμα, πεπερασμένο και άπειρο-αριθμήσιμο γινόμενο πλήρων και διαχωρίσιμων μετρικών χώρων είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος*.

Επίσης οι προηγούμενες κατασκευές *επεκτείνονται και στους τοπολογικούς χώρους* με τρόπο που *σέβεται τη μετρικοποιησιμότητα*.

Εξηγούμε το προηγούμενο αναλυτικά. Για το ευθύ άθροισμα δύο τοπολογικών χώρων $(X, \mathcal{T}_X)$ και $(Y, \mathcal{T}_Y)$ παίρνουμε όπως πιο πάνω $X \oplus Y = (\{0\} \times X) \bigcup (\{1\} \times Y)$ και ορίζουμε

$$V \in \mathcal{T}_{X\oplus Y} \iff \{x \in \mathcal{X} \mid (0, x) \in V\} \in \mathcal{T}_X \quad \text{και} \quad \{y \in \mathcal{Y} \mid (1, y) \in V\} \in \mathcal{T}_V.$$

Τότε η οικογένεια $\mathcal{T}_{X\oplus Y}$. Μάλιστα αν οι X, Y είναι μετρικοποιήσιμοι τότε ο $(X \oplus Y, \mathcal{T}_{X\oplus Y})$ είναι μετρικοποιήσιμος με τη μετρική που αναφέραμε πιο πάνω.

Για το καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ ορίζουμε

$$V \in \mathcal{V}_{X\times Y} \iff V = V_X \times V_Y$$

όπου $V_X \in \mathcal{T}_X$ και $V_Y \in \mathcal{T}_Y$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{T}_{X\times Y}$ που προκύπτει από όλες τις ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{V}_{X\times Y}$. Τότε η $\mathcal{T}_{X\times Y}$ είναι τοπολογία στο $X \times Y$ με βάση τη $\mathcal{V}_{X\times Y}$. Αν οι X, Y είναι μετρικοποιήσιμοι τότε ο $(X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y})$ είναι μετρικοποιήσιμος με τη μετρική που αναφέραμε πιο πάνω.

Το άπειρο γινόμενο ορίζεται όμοια με πριν. Αν έχουμε τοπολογικούς χώρους $(X_n, \mathcal{T}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε ορίζουμε τη $\mathcal{V}_\infty$ ως την οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής

$$V_0 \times \cdots \times V_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \ldots, \tag{1.1}$$

όπου $V_i \in \mathcal{T}_i$ για κάθε $i = 0, \ldots, n$ και $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{T}_\infty$ όλων των ενώσεων από στοιχεία της $\mathcal{V}_\infty$. Τότε η $\mathcal{T}_\infty$ είναι τοπολογία στο σύνολο $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, γνωστή και ως **τοπολογία γινόμενο**, η οποία έχει βάση την οικογένεια $\mathcal{V}_\infty$. Αν οι X_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μετρικοποιήσιμοι τότε ο $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \mathcal{T}_\infty)$ είναι μετρικοποιήσιμος με τη μετρική που αναφέραμε πιο πάνω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Πολωνικοί Χώροι

2.1. Ορισμός και αρχικά αποτελέσματα

Ορισμός 2.1.1. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι **Πολωνικός χώρος** αν υπάρχει μετρική d που παράγει την $\mathcal{T}$ και ο (X, d) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Μια μετρική d όπως πιο πάνω θα λέγεται **συμβατή** ή **κατάλληλη** μετρική για τον $\mathcal{X}$. Συνήθως θα συμβολίζουμε τους Πολωνικούς χώρους με $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, και $\mathcal{Z}$ χωρίς να συμβολίζουμε την τοπολογία εκτός αν αυτό κρίνεται χρήσιμο.

Μερικά απλά παραδείγματα Πολωνικών χώρων είναι το $\mathbb{R}$ το $\mathbb{C}$ και τα κλειστά υποσύνολά τους, όλα με τη συνήθη τοπολογία. Ένα τετριμμένο αλλά χρήσιμο παράδειγμα Πολωνικού χώρου είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με τη συνήθη μετρική, η οποία είναι ισοδύναμη με τη διακριτή και κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι ανοικτό.

Το ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ με τη συνήθη μετρική είναι διαχωρίσιμος αλλά όχι πλήρης μετρικός χώρος. Όπως θα δούμε πιο κάτω υπάρχει μια ισοδύναμη μετρική ως προς την οποία είναι πλήρες και συνεπώς το $(0, 1)$ είναι Πολωνικός χώρος.

Πρόταση 2.1.2. *Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ και ένας τοπολογικός χώρος Y. Αν οι $\mathcal{X}$, Y είναι τοπολογικά ισομορφικοί τότε και ο Y είναι Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια συμβατή μετρική d για τον $\mathcal{X}$, και έναν τοπολογικό ισομορφισμό $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (\mathcal{X}, d)$, όπου $\mathcal{T}_Y$ είναι η τοπολογία του Y. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\rho : Y \times Y \to \mathbb{R}$ με

$$\rho(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)).$$

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι η ρ είναι μετρική στο Y. Εξ ορισμού η

$$f : (Y, \rho) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (\mathcal{X}, d)$$

είναι ισομετρία και επί.

Ειδικότερα οι συναρτήσεις $f : (Y, \rho) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (\mathcal{X}, d)$ και $f^{-1} : (\mathcal{X}, d) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (Y, \rho)$ είναι συνεχείς. Προκύπτει επίσης ότι ο (Y, ρ) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (Άσκηση 2.1.11).

Τέλος δείχνουμε ότι η ρ παράγει την τοπολογία του Y. Για κάθε $A \subseteq Y$ που ανήκει στην $\mathcal{T}_Y$ το σύνολο $\left(f^{-1}\right)^{-1}[A] = f[A]$ είναι d-ανοικτό γιατί η $f^{-1} : (\mathcal{X}, d) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι συνεχής. Επομένως το σύνολο $f^{-1}[f[A]] = A$ είναι ρ-ανοικτό γιατί η συνάρτηση $f : (Y, \rho) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (\mathcal{X}, d)$ είναι συνεχής. Αντίστροφα θεωρούμε ότι το $B \subseteq Y$ είναι ρ-ανοικτό. Επειδή η $f^{-1} : (\mathcal{X}, d) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (Y, \rho)$ είναι συνεχής το σύνολο $\left(f^{-1}\right)^{-1}[B] = f[B]$ είναι d-ανοικτό και εφόσον η $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow (\mathcal{X}, d)$ είναι συνεχής το $f^{-1}[f[B]] = B$ ανήκει στην $\mathcal{T}_Y$. □

Πόρισμα 2.1.3. *Κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) με $a < b$ του $\mathbb{R}$ με την τοπολογία που παράγει η συνήθης μετρική της απόστασης είναι Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση της εφαπτομένης $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός και από την Πρόταση 2.1.2 το διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι Πολωνικός χώρος. (Μάλιστα από την απόδειξη της πρότασης μπορούμε να δούμε ότι μια κατάλληλη μετρική είναι η $\rho(x, y) = |\tan x - \tan y|$.)

Το ζητούμενο προκύπτει από το γεγονός ότι όλα τα μη τετριμμένα ανοικτά διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι τοπολογικά ισομορφικά μεταξύ τους. Συγκεκριμένα αν έχουμε ανοικτά διαστήματα πραγματικών αριθμών $I = (a, b)$ και $J = (c, d)$ με $a < b$ και $c < d$ τότε η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R} : f(x) = (d - c) \cdot (b - a)^{-1} \cdot (x - a) + c$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός μεταξύ του I και του J. $\square$

Ορισμός 2.1.4. Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A είναι F_σ **σύνολο** του X αν υπάρχει ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από κλειστά υποσύνολα του X με $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Επίσης το A είναι G_δ **σύνολο** του X αν υπάρχει ακολουθία $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ανοικτά υποσύνολα του X με $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Είναι σαφές ότι ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι F_σ ακριβώς όταν το συμπλήρωμά του $X \setminus A$ είναι G_δ. Επιπλέον είναι ξεκάθαρο ότι κάθε κλειστό σύνολο F είναι F_σ καθώς μπορούμε να πάρουμε $F_n = F$, $n \in \mathbb{N}$. Ισοδύναμα κάθε ανοικτό σύνολο είναι G_δ.

Τέλος παρατηρούμε ότι η αριθμήσιμη ένωση F_σ συνόλων είναι επίσης F_σ σύνολο, γιατί αν $A_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_n^i$, όπου $n \in \mathbb{N}$ κάθε F_n^i είναι κλειστό, τότε η $\mathcal{A} = \{F_n^i \mid i, n \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών συνόλων και $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup \mathcal{A}$.

Προκύπτει ότι και η αριθμήσιμη τομή G_δ συνόλων είναι G_δ. Αργότερα θα δούμε ότι ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες για τις πεπερασμένες τομές (F_σ συνόλων) ή ενώσεις (G_δ συνόλων).

Ορισμός 2.1.5. Δοσμένου ενός μετρικού χώρου (X, d) και ενός μη κενού $A \subseteq X$ ορίζεται η συνάρτηση της **απόστασης από το σύνολο** A,

$$f : X \to [0, +\infty) : f(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, z) \mid z \in A\}. \tag{2.1}$$

Όπως είναι γνωστό η f είναι συνεχής συνάρτηση, για την ακρίβεια ισχύει

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y), \quad x, y \in A.$$

Πρόταση 2.1.6. *Αν ο X είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος τότε κάθε κλειστό σύνολό του, εκτός από F_σ, είναι και G_δ.*

Ισοδύναμα κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι G_δ και F_σ.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα κλειστό $F \subseteq X$, μια μετρική d που παράγει την τοπολογία του X, και τη συνάρτηση της απόστασης από το F, $f = (x \mapsto d(x, F))$ από το (2.1) πιο πάνω. (Υποθέτουμε ότι $F \neq \varnothing$ αλλιώς το συμπέρασμα είναι προφανές.) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$U_n = \{x \in X \mid d(x, F) < 2^{-n}\}.$$

Τότε $U_n = f^{-1}[(-1, 2^{-n})]$ και αφού η f είναι συνεχής το σύνολο U_n είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επειδή $d(x, F) = 0$ για κάθε $x \in F$ είναι σαφές ότι $F \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Υποθέτουμε ότι $x \in U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μέσα από το F με $d(x, x_n) < 2^{-n}$ για κάθε n. Επομένως $x_n \to x$ και αφού το F είναι κλειστό έχουμε $x \in F$.

Καταλήγουμε ότι $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ και άρα το F είναι G_δ σύνολο. $\square$

Ορισμός 2.1.7. Αν έχουμε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ και G ένα μη κενό υποσύνολο του X τότε μπορούμε να δούμε το G ως τοπολογικό χώρο με τη **σχετική τοπολογία** του X, δηλαδή την τοπολογία $\mathcal{T}_G$ που ορίζεται ως εξής

$$\mathcal{T}_G = \{V \cap G \mid V \in \mathcal{T}\}.$$

Το ζεύγος $(G, \mathcal{T}_G)$ ονομάζεται **υπόχωρος** του $(X, \mathcal{T})$. Στην περίπτωση όπου ο $(X, \mathcal{T})$ μετρικοποιείται από την d τότε ο $(G, \mathcal{T}_G)$ μετρικοποιείται από τον περιορισμό $d|(G \times G)$ της d στο G.

Θεώρημα 2.1.8. *Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $\varnothing \neq G \subseteq \mathcal{X}$. Τότε το G με τη σχετική τοπολογία του $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος αν και μόνο αν το G είναι G_δ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το G είναι Πολωνικός χώρος με τη σχετική τοπολογία του $\mathcal{X}$. Σταθεροποιούμε μια κατάλληλη μετρική d για τον $\mathcal{X}$ και d_G για τον G. (Δεν έχουμε απαραίτητα ότι η d_G είναι ο περιορισμός της d στο G.) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο

$$V_n = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists \text{ ανοικτό } U \text{ με } x \in U \text{ και } \forall y, z \in U \cap G \text{ ισχύει } d_G(y,z) < 2^{-n}\}.$$

Ισχυριζόμαστε αρχικά ότι κάθε V_n είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Έστω $x \in V_n$, τότε υπάρχει ένα ανοικτό U με $x \in U$ και για κάθε $y, z \in U$ ισχύει $d_G(y,z) < 2^{-n}$. Υπάρχει $r > 0$ με $B_d(x,r) \subseteq U$. Για κάθε $x' \in B_d(x,r)$ το σύνολο $U' = B_d(x,r)$ είναι ανοικτό που περιέχει το x'. Επειδή $U' \subseteq U$ έχουμε επίσης ότι για κάθε $y, z \in U'$ ισχύει $d_G(y,z) < 2^{-n}$. Άρα $x' \in V_n$ για κάθε $x' \in B_d(x,r)$ και το $x \in V_n$ είναι εσωτερικό σημείο του V_n.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \cap \overline{G}. \tag{2.2}$$

Από την πιο πάνω ισότητα και την Πρόταση 2.1.6 (τα κλειστά σύνολα είναι G_δ) προκύπτει ότι το G είναι η τομή δύο G_δ συνόλων και συνεπώς είναι G_δ.

Ξεκινάμε με τον εγκλεισμό $G \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \cap \overline{G}$. Έστω $x \in G$ και $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς $x \in \overline{G}$, δείχνουμε ότι $x \in V_n$. Η μπάλα $B_{d_G}(x, 2^{-(n+1)})$ του G είναι ανοικτό υποσύνολο του G επομένως υπάρχει U ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ με

$$B_{d_G}(x, 2^{-(n+1)}) = U \cap G.$$

Τότε για κάθε για κάθε $y, z \in U \cap G$ έχουμε $y, z \in B_{d_G}(x, 2^{-(n+1)})$ και συνεπώς

$$d_G(y,z) \leqslant d_G(y,x) + d_G(x,z) < 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}.$$

Άρα $x \in V_n$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{G}$ με $x \in V_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x \in U_n$ και έτσι ώστε $y, z \in U \cap G$ ισχύει $d_G(y,z) < 2^{-n}$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, αλλιώς αντικαθιστούμε κάθε U_n με την τομή $\bigcap_{k=0}^{n} U_k$.

Αφού $x \in \overline{G} \cap U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από το G με $y_n \in U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $d(y_n, x) \to 0$. Για κάθε $n \geqslant m$ έχουμε $y_n \in U_n \subseteq U_m$ και αφού $y_m \in U_m$ ισχύει $d_G(y_n, y_m) < 2^{-m}$. Αυτό δείχνει ότι η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d_G-Cauchy και αφού ο (G, d_G) είναι πλήρης υπάρχει $y \in G$ με $d_G(y_n, y) \to 0$.

Από την άλλη η τοπολογία του (G, d_G) είναι η ίδια με τη σχετική τοπολογία του G που παίρνει από τον $\mathcal{X}$. Προκύπτει ότι $d(y_n, y) \to 0$ και αφού $d(y_n, x) \to 0$ έχουμε $x = y \in G$. Έτσι έχουμε και τον άλλο εγκλεισμό της (2.2) και αποδείξαμε τη μία κατεύθυνση του θεωρήματος.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το G είναι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών συνόλων $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και θέτουμε $F_n = \mathcal{X} \setminus U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε κάθε F_n είναι κλειστό σύνολο.

Θεωρούμε d μια κατάλληλη μετρική στον $\mathcal{X}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τη συνάρτηση $(x \mapsto d(x, F_n))$ της απόστασης του x από το F_n όπως στο (2.1). Ορίζουμε

$$d_G(x,y) = d(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty} \min\left\{2^{-n}, \left|d(x,F_n)^{-1} - d(y,F_n)^{-1}\right|\right\}$$

όπου $x, y \in G$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in G$ τότε $x \in U_n$ και άρα $x \notin F_n$ για κάθε n. Επομένως $d(x, F_n) > 0$ και άρα ορίζεται ο αντίστροφος αριθμός $d(x, F_n)^{-1} > 0$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η d_G είναι μετρική στο G. Δείχνουμε ότι η d_G παράγει τη σχετική τοπολογία στο G. Ισοδύναμα δείχνουμε ότι η μετρική d_G και ο περιορισμός

$d|(G\times G)$ της d στο $G\times G$ είναι ισοδύναμες μετρικές. Θεωρούμε μια ακολουθία $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο G και $y\in G$. Δείχνουμε ότι

$$y_i \xrightarrow{d_G} y \iff y_i \xrightarrow{d} y. \tag{2.3}$$

Η ευθεία κατεύθυνση είναι σαφής επειδή $d\leqslant d_G$ στο $G\times G$. Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $d(y_i,y)\to 0$ και έστω $r>0$. Τότε υπάρχει i_0 έτσι ώστε για κάθε $i\geqslant i_0$ ισχύει

$$d(y_i,y)<r/3. \tag{2.4}$$

Η ιδέα είναι να χωρίσουμε το άπειρο άθροισμα στον ορισμό της d_G σε δύο μέρη, όπου το κάθε ένα είναι μικρότερο του $r/3$. Για κάθε $n_0\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\min\left\{2^{-n},\left|d(z,F_n)^{-1}-d(w,F_n)^{-1}\right|\right\}\leqslant\sum_{n=n_0+1}^{\infty}2^{-n}=2^{n_0}$$

όπου $z,w\in G$. Οπότε λαμβάνοντας αρκετά μεγάλο $n_0\in\mathbb{N}$ έχουμε για κάθε $z,w\in G$,

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\min\left\{2^{-n},\left|d(z,F_n)^{-1}-d(w,F_n)^{-1}\right|\right\}<r/3. \tag{2.5}$$

Για κάθε $k\leqslant n_0$ ισχύει $d(y_i,F_k)\to d(y,F_k)$ επειδή η συνάρτηση της απόστασης σημείου από σύνολο είναι συνεχής. Αφού τα y_i,y ανήκουν στο G όπως αναφέραμε πιο πάνω έχουμε $d(y_i,F_k),d(y,F_k)>0$. Άρα $d(y_i,F_k)^{-1}\to d(y,F_k)^{-1}$.

Επομένως υπάρχει i_1 έτσι ώστε για κάθε $i\geqslant i_1$ και κάθε $k=0,\dots,n_0$ ισχύει

$$\left|d(y_i,F_k)^{-1}-d(y_i,F_k)^{-1}\right|<\min\{2^{-n},\ r/3\cdot(n_0+1)^{-1}\}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{n_0}\min\left\{2^{-n},\left|d(y_i,F_k)^{-1}-d(y,F_k)^{-1}\right|\right\}\\ =&\sum_{n=0}^{n_0}\left|d(y_i,F_k)^{-1}-d(y,F_k)^{-1}\right|\\ <&\sum_{n=0}^{n_0}r/3\cdot(n_0+1)^{-1}=r/3.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Από τις (2.4), (2.5), (2.6) και τον ορισμό της d_G έχουμε για κάθε $i\geqslant\max\{i_0,i_1\}$ ότι $d_G(y_i,y)<r$. Συνεπώς $y_i\xrightarrow{d_G}y$ και οι μετρικές είναι ισοδύναμες.

Αφού η τοπολογία του (G,d_G) είναι η σχετική τοπολογία στο G και ο $\mathcal{X}$ είναι διαχωρίσιμος είναι σαφές ότι ο μετρικός χώρος (G,d_G) είναι διαχωρίσιμος (υπόχωρος διαχωρίσιμου *μετρικού* χώρου είναι διαχωρίσιμος).

Τέλος δείχνουμε ότι ο (G,d_G) είναι πλήρης. Έστω $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d_G-Cauchy ακολουθία στον G. Εφόσον $d\leqslant d_G$ στο $G\times G$ η $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι και d-Cauchy. Αφού ο $(\mathcal{X},d)$ είναι πλήρης υπάρχει $y\in\overline{G}$ με $y_i\xrightarrow{d}y$. Δείχνουμε ότι $y\in G=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$ και ότι $y_i\xrightarrow{d_G}y$.

Έστω $n\in\mathbb{N}$, τότε $d(y_i,F_n)\xrightarrow{i}d(y,F_n)$. Αν είχαμε $y\in F_n$ θα ίσχυε $d(y,F_n)=0$ και άρα

$$d(y_i,F_n)\xrightarrow{\ i\ }0.$$

Επομένως $d(y_i,F_n)^{-1}\xrightarrow{\ i\ }+\infty$. Ειδικότερα για κάθε $i\in\mathbb{N}$ θα υπήρχαν $j,s\geqslant i$ με

$$|d(y_j,F_n)^{-1}-d(y_s,F_n)^{-1}|>2^{-n}$$

και

$$d_G(y_j,y_s)\geqslant\min\left\{2^{-n},\left|d(y_j,F_n)^{-1}-d(y_s,F_n)^{-1}\right|\right\}=2^{-n}.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι d_G-Cauchy. Επομένως $y \notin F_n = \mathcal{X}\backslash U_n$ δηλαδή $y \in U_n$. Επειδή το n είναι τυχαίο καταλήγουμε $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = G$.

Αφού$y_i \xrightarrow{d} y$ και $y_i, y \in G$, $i \in \mathbb{N}$, προκύπτει από την (2.3) ότι $y_i \xrightarrow{d_G} y$ και ο (G, d_G) είναι πλήρης. ▫

Το προηγούμενο θεώρημα δίνει μια δεύτερη απόδειξη του ότι κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι Πολωνικός χώρος καθώς ως ανοικτό σύνολο είναι G_δ.

Πόρισμα 2.1.9. *Οι άρρητοι αριθμοί $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι Πολωνικός χώρος ενώ οι ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q}$ δεν είναι Πολωνικός χώρος με την σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ενώ το $\mathbb{Q}$ δεν είναι G_δ (γνωστή εφαρμογή του Θεωρήματος του Baire). Το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.8. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 2.1.10. Για κάθε μετρικό χώρο (X, d) οι συναρτήσεις

$$\rho = \min\{d, 1\} \quad \text{και} \quad \sigma = \frac{d}{1+d}$$

είναι μετρικές, οι οποίες είναι ισοδύναμες με την d και αν ο (X, d) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος τότε οι χώροι (X, ρ) και (X, σ) είναι επίσης πλήρεις και διαχωρίσιμοι.

Συμπεράνετε ότι κάθε Πολωνικός χώρος επιδέχεται συμβατή μετρική $d \leqslant 1$.

Άσκηση 2.1.11. Δίνονται δύο μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ) και

$$f : (Y, \rho) \twoheadrightarrow (X, d)$$

επιμορφισμός. Αν η f είναι ισομετρία, δηλαδή αν ικανοποιεί

$$\rho(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)), \quad y_1, y_2 \in Y,$$

τότε η f είναι τοπολογικός ισομορφισμός. Μάλιστα αν ο (X, d) είναι πλήρης τότε και ο (Y, ρ) είναι πλήρης.

Άσκηση 2.1.12. Για κάθε $a < b$ το σύνολο $C([a, b])$ όλων των συνεχών συναρτήσεων από το $[a, b]$ στο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία της νόρμας άπειρο,

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$$

όπου $f \in C([a, b])$, είναι Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.13. Οι ακολουθιακοί χώροι ℓ^p με $1 \leqslant p < \infty$ με την τοπολογία της p-νόρμας $\|\cdot\|_p$ είναι Πολωνικοί χώροι.

Άσκηση 2.1.14. Αν οι (X, d) και (Y, ρ) είναι πλήρεις και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι τότε οι $X \oplus Y$ και $X \times Y$ με τις μετρικές που αναφέραμε στην Εισαγωγή είναι επίσης πλήρεις και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι.

Συμπεράνετε ότι το ευθύ άθροισμα και το πεπερασμένο γινόμενο Πολωνικών χώρων είναι Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.15. Αν $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία πλήρων και διαχωρίσιμων μετρικών χώρων τότε ο $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ με τη μετρική που αναφέραμε στην Εισαγωγή είναι επίσης πλήρης και διαχωρίσιμος.

Συμπεράνετε ότι το άπειρο αριθμήσιμο γινόμενο Πολωνικών χώρων είναι επίσης Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.16. Οι χώροι $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ με την τοπολογία της συνήθους Ευκλείδιας μετρικής και ο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο είναι Πολωνικοί χώροι.

Άσκηση 2.1.17. Για κάθε μετρικό χώρο (X, d) και κάθε μη κενό σύνολο $A \subseteq X$ ισχύει η (2.1),

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$$

για κάθε $x, y \in A$.

Άσκηση 2.1.18. Το σύνολο των σημείων συνέχειας μιας τυχαίας συνάρτησης

$$f : (X, d) \to (Y, \rho)$$

είναι G_δ σύνολο.

Άσκηση 2.1.19. Τα σύνολα $(0, 1]$ και $[0, 1) \cup \{3\}$ με τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}$ είναι Πολωνικοί χώροι.

Το $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}^2$ δεν είναι Πολωνικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

2.2. Πεπερασμένες ακολουθίες

Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X. Με τον όρο **πεπερασμένη ακολουθία** στο X εννοούμε μια συνάρτηση $u : \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} \to X$, όπου $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε μια τέτοια u με $(u(0), \ldots, u(n-1))$. Συμπεριλαμβάνουμε στις πεπερασμένες ακολουθίες και την **κενή ακολουθία**, την οποία συμβολίζουμε με Λ. Αυτή προκύπτει από τον προηγούμενο ορισμό για $n = 0$ όπου το πεδίο ορισμού $\{i \in \mathbb{N} \mid i < 0\}$ της u είναι το κενό σύνολο.

Συμβολίζουμε με $X^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών στο X. Είναι σαφές ότι το προηγούμενο n στον ορισμό της πεπερασμένης ακολουθίας είναι μοναδικό. Το **μήκος** μιας πεπερασμένης ακολουθίας $u : \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} \to X$ είναι ακριβώς αυτό το μοναδικό n και συμβολίζεται με $|u|$. Έτσι έχουμε

$$|u| = 0 \iff u = \Lambda \quad \text{και}$$
$$u = (u(0), \ldots, u(|u| - 1)), \quad \text{για κάθε } u \in X^{<\mathbb{N}}.$$

Για παράδειγμα έχουμε τις πεπερασμένες ακολουθίες $u = (a, b, c)$ και $v = (d, e)$ στο σύνολο $\{a, b, c, d, e\}$ μήκους 3 και 2 αντίστοιχα.

Αν έχουμε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$, με $(x)^n$ εννοούμε την πεπερασμένη ακολουθία u μήκους n που είναι σταθερή στο x, δηλαδή την $u : \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} \to X : u(i) = x$. Όπως πριν με $n = 0$ έχουμε την κενή ακολουθία.

Η **παράθεση** (concatenation) της $u \in X^{<\mathbb{N}}$ με την $v \in X^{<\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία

$$u * v = (u(0), \ldots, u(|u| - 1), v(0), \ldots, v(|v| - 1)).$$

Για παράδειγμα αν $u = (a, b, c)$ και $v = (d, e)$ τότε

$$u * v = (a, b, c, d, e) \quad \text{και} \quad v * u = (d, e, a, b, c).$$

Είναι σαφές ότι $u * \Lambda = \Lambda * u = u$ για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$.

Στο σύνολο $X^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε τη διμελή σχέση $\sqsubseteq$ ως εξής,

$$u \sqsubseteq v \iff |u| \leqslant |v| \text{ και } \forall i < |u| \ (u(i) = v(i)).$$

Για παράδειγμα $(a, b) \sqsubseteq (a, b, c)$ και $(a, b) \not\sqsubseteq (a, c, c)$ για $b \neq c$. Επίσης $\Lambda \sqsubseteq u$ για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ (καθολικός ποσοδείκτης με κενό πεδίο).

Είναι σαφές ότι η σχέση $\sqsubseteq$ ικανοποιεί τις τρεις **ιδιότητες της διάταξης**,

$$u \sqsubseteq u$$
$$(u \sqsubseteq v \ \& \ v \sqsubseteq u) \longrightarrow u = v$$
$$(u \sqsubseteq v \ \& \ v \sqsubseteq w) \longrightarrow u \sqsubseteq v$$

για κάθε $u, v, w \in X^{<\mathbb{N}}$. Το **αυστηρό μέρος** της $\sqsubseteq$ είναι η σχέση $\sqsubsetneq$ με

$$u \sqsubsetneq v \iff u \sqsubseteq v \ \& \ u \neq v.$$

Για παράδειγμα $(a, b) \sqsubsetneq (a, b, c)$. Είναι σαφές ότι $u \sqsubsetneq v$ αν και μόνο αν $u \sqsubseteq v$ και $|u| < |v|$. Θα λέμε ότι η $u \in X^{<\mathbb{N}}$ είναι **αρχικό τμήμα** της $v \in X^{<\mathbb{N}}$ ή ότι η v είναι

επέκταση της u αν $u \sqsubseteq v$. Θα λέμε επίσης ότι η u είναι **γνήσιο αρχικό τμήμα** της v ή ότι η v είναι **γνήσια επέκταση** της u αν $u \sqsubsetneq v$. Το v είναι **άμεση επέκταση της** u αν $v = u * (x)$ για κάποιο $x \in X$.

Δύο πεπερασμένες ακολουθίες u, v λέγονται **συμβατές**, συμβολικά $u||v$ αν $u \sqsubseteq v$ ή $v \sqsubseteq u$. Για παράδειγμα $(a, e, b)||(a, e)$ και $\neg((d, a)||(d, b, c))$ για $a \neq b$. Οι μη συμβατές πεπερασμένες ακολουθίες λέγονται επίσης **ασύμβατες**. Θα συμβολίζουμε $u \perp v$ όταν οι u, v είναι ασύμβατες, έτσι που $u \perp v \iff \neg(u||v)$.

Θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση όπου $X = \mathbb{N}$. Το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο A_n όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από φυσικούς αριθμούς με μήκος n. Για παράδειγμα $A_0 = \{\Lambda\}$, $A_1 = \{(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ κ.ο.κ. Τότε

$$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Είναι σαφές ότι υπάρχει αντιστοιχία ανάμεσα στο A_n και στο πεπερασμένο γινόμενο $\mathbb{N}^n$ για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε κάθε A_n είναι αριθμήσιμο και επομένως και το $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Είναι χρήσιμο να απομονώσουμε μια συγκεκριμένη απαρίθμηση του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Αρχικά θεωρούμε την αύξουσα απαρίθμηση των *πρώτων αριθμών*

$$\mathrm{p}_0 < \mathrm{p}_1 < \mathrm{p}_2 < \cdots < \mathrm{p}_n < \ldots,$$

δηλαδή $\mathrm{p}_0 = 2$, $\mathrm{p}_1 = 3$, $\mathrm{p}_2 = 5$, $\mathrm{p}_3 = 7$, $\mathrm{p}_4 = 11$, κ.ο.κ. Ορίζουμε τη **συνάρτηση κωδικοποίησης**

$$\langle \cdot \rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} : u = (u(0), \ldots, u(n-1)) \mapsto \langle u(0), \ldots, u(n-1) \rangle \tag{2.7}$$

με τον εξής τρόπο:

$$\langle u(0), \ldots, u(n-1) \rangle = \begin{cases} \mathrm{p}_0^{u(0)+1} \cdot \cdots \cdot \mathrm{p}_{n-1}^{u(n-1)+1}, & \text{αν } n \geqslant 1 \\ 1, & \text{αν } n = 0. \end{cases}$$

Για παράδειγμα

$$\langle 4, 0, 1 \rangle = 2^{4+1} \cdot 3^{0+1} \cdot 5^{1+1} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 = 32 \cdot 3 \cdot 25 = 2400.$$

Αντίστροφα αν πάρουμε τον αριθμό 120 τότε μπορούμε να τον φέρουμε στη μορφή $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ και επομένως βλέπουμε ότι $120 = \langle 2, 0, 0 \rangle$.

Είναι σημαντικό να προσθέτουμε τη μονάδα στους εκθέτες των δυνάμεων γιατί έτσι μπορούμε να ανακτήσουμε την αρχική ακολουθία. Αλλιώς δεν θα είχαμε τρόπο να γνωρίζουμε αν ο αριθμός $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0$ αντιστοιχεί στο $(3, 1, 1)$ ή στο $(3, 1, 1, 0)$ ή στο $(3, 1, 1, 0, 0)$ κ.τ.λ.

Για την ακρίβεια από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής (μοναδικότητα γραφής ως γινόμενο πρώτων) η συνάρτηση $\langle \cdot \rangle$ είναι ένα-προς-ένα (Άσκηση 2.2.1). Από την άλλη η $\langle \cdot \rangle$ δεν είναι επιμορφισμός. Για παράδειγμα δεν παίρνει την τιμή 0. Μάλιστα επειδή $\mathrm{p}_0^{k+1} = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ βλέπουμε ότι πέραν της μονάδας η $\langle \cdot \rangle$ παίρνει μόνο άρτιες τιμές, δηλαδή ο αριθμός $\langle u(0), \ldots, u(n-1) \rangle$ είναι άρτιος ακριβώς όταν η ακολουθία $u = (u(0), \ldots, u(n-1))$ δεν είναι η κενή ακολουθία.

Συμβολίζουμε με $\mathtt{Seq}$ το σύνολο όλων των τιμών της $\langle \cdot \rangle$,

$$\mathtt{Seq} = \{s \in \mathbb{N} \mid \exists u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\ s = \langle u(0), \ldots, u(n-1) \rangle\}.$$

Αν $s = \langle u(0), \ldots, u(n-1) \rangle$ θα λέμε ότι το s είναι **κωδικός** της u.

Ορίζουμε τη **φυσική απαρίθμηση** $(\mathrm{u}_s)_{s \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ως προς την κωδικοποίηση $\langle \cdot \rangle$ ως εξής:

$$\mathrm{u}_s = \begin{cases} (k_0, \ldots, k_{n-1}), & \text{αν } s = \langle k_0, \ldots, k_{n-1} \rangle \in \mathtt{Seq}, \\ \Lambda, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Για παράδειγμα $(3,0,1) = \mathrm{u}_{\langle 3,0,1\rangle} = \mathrm{u}_{2^4\cdot 3\cdot 5^2}$. Επίσης $\Lambda = \mathrm{u}_1$ γιατί το 1 είναι κωδικός της Λ και $\Lambda = \mathrm{u}_5$ γιατί όπως εξηγήσαμε πιο πάνω $5 \notin \mathtt{Seq}$.

Για κάθε $s = \langle k_0, \dots, k_{n-1}\rangle$ και κάθε $i < n$ ορίζουμε

$$(s)_i = k_i.$$

Με άλλα λόγια το $(s)_i$ είναι ο μοναδικός φυσικός αριθμός k για τον οποίο υπάρχουν $k_0, \dots, k_{i-1}$ και $k_{i+1}, \dots, k_{n-1}$ για κάποιο $n \geqslant 1$ έτσι ώστε

$$s = \langle k_0, \dots, k_{i-1}, k, k_{i+1}, \dots, k_{n-1}\rangle,$$

εφόσον φυσικά υπάρχει τέτοιος k. Επεκτείνουμε τον ορισμό $(s)_i$ και στις περιπτώσεις όπου $s = \langle k_0, \dots, k_{n-1}\rangle \in \mathtt{Seq}$ και $i \geqslant n$ ή $s \notin \mathtt{Seq}$ θέτοντας τότε $(s)_i = 0$.

Έχουμε λοιπόν

$$(s)_i = \begin{cases} k, & \text{αν υπάρχουν } k_0, \dots, k_{i-1}, k_i, \dots, k_{n-1} \text{ για κάποιο } n > i \\ & \text{με } s = \langle k_0, \dots, k_{i-1}, k, k_{i+1}, \dots, k_{n-1}\rangle, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Για παράδειγμα $(2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^4 \cdot 7^2)_2 = (\langle 2,0,3,1\rangle)_2 = 3$. Ακόμα $(\langle 2,0,3,1\rangle)_{42} = 0$ γιατί $42 > |2,0,3,1| = 4$ και $(5)_{42} = 0$ γιατί $5 \notin \mathtt{Seq}$.

Με τη βοήθεια των πιο πάνω συναρτήσεων μπορούμε να εκφράσουμε προτάσεις που αναφέρονται σε πεπερασμένες ακολουθίες φυσικών αριθμών *οσοδήποτε μεγάλου μήκους* σε προτάσεις με ποσοδείκτες που αναφέρονται σε φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα αν $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τότε η πρόταση

"για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο P_n περιέχει τουλάχιστον n διαφορετικά στοιχεία"

είναι ισοδύναμη με την

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists s \in \mathbb{N}\, \forall i,j < n\, (\, (s)_i \in P_n \,\&\, (i \neq j \longrightarrow (s)_i \neq (s)_j)\,),$$

η οποία εκφράζεται προφανώς μόνο με ποσοδείκτες πάνω στους φυσικούς αριθμούς.

Τέλος αναφέρουμε ότι θα **θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με την τοπολογία που παράγεται από τη διακριτή μετρική** όπου κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι ανοικτό. Εφόσον το $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο προκύπτει ότι είναι Πολωνικός χώρος.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.2.1. Η συνάρτηση

$$\langle\,\cdot\,\rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} : u = (u(0), \dots, u(n-1)) \mapsto \langle u(0), \dots, u(n-1)\rangle$$

είναι μονομορφισμός.

Άσκηση 2.2.2. Βρείτε έναν άρτιο αριθμό που δεν λαμβάνεται ως τιμή της συνάρτησης $\langle\,\cdot\,\rangle$.

Άσκηση 2.2.3. Θεωρούμε ένα $Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Εκφράστε με τη βοήθεια ποσοδεικτών στο $\mathbb{N}$ την πρόταση

"για κάθε n υπάρχουν $k_1, \dots, k_{2n} \in \mathbb{N}$ διαφορετικά ανά δύο
με $(n, \langle n, k_i\rangle) \in Q$, για κάθε $i = 0, \dots, 2n$."

2.3. Οι χώροι του Baire και Cantor

Ορισμός 2.3.1 (Ο χώρος του Baire)**.** Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$ (άπειρες ακολουθίες). Συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με τα μικρά ελληνικά γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ και το σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με $\mathcal{N}$. Επίσης θα γράφουμε ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ ως "άπειρο διάνυσμα" $\alpha = (\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(n), \dots)$.

Για $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ με $\alpha \neq \beta$ θέτουμε

$$n(\alpha, \beta) = \text{ο ελάχιστος } n \in \mathbb{N} \text{ με } \alpha(n) \neq \beta(n).$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $d_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$,

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2^{-n(\alpha,\beta)}, & \text{αν } \alpha \neq \beta \\ 0, & \text{αν } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Τότε η συνάρτηση $d_{\mathcal{N}}$ είναι μετρική στο $\mathcal{N}$ (Άσκηση 2.3.14). Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ ονομάζεται **ο χώρος του Baire**.

Θα καλούμε επίσης χώρο του Baire τον *τοπολογικό χώρο* που προκύπτει από τη μετρική $d_{\mathcal{N}}$.

Για παράδειγμα αν $\alpha = (5, 6, 7, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots,)$, $\beta = (5, 6, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ και $\gamma = (3, 6, 7, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ τότε $n(\alpha, \beta) = 2$ και $n(\alpha, \gamma) = n(\beta, \gamma) = 0$, οπότε $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 2^{-2}$ και $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma) = d_{\mathcal{N}}(\beta, \gamma) = 2^0 = 1$.

Ορισμός 2.3.2 (Περαιτέρω Συμβολισμοί)**.**

Επεκτείνουμε τους ορισμούς των $*$ και $\sqsubseteq$ ανάμεσα σε πεπερασμένες και άπειρες ακολουθίες με τον προφανή τρόπο,

$$u * \alpha = (u(0), \dots, u(|u| - 1), \alpha(0), \dots, \alpha(n), \dots)$$
$$u \sqsubseteq \alpha \iff \forall i < |u| \; u(i) = \alpha(i),$$

όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $\alpha \in \mathcal{N}$.

Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε τη **βασική περιοχή** του χώρου του Baire,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_u &= \{\alpha \in \mathcal{N} \mid u \sqsubseteq \alpha\} \\ &= \{u(0)\} \times \cdots \times \{u(|u| - 1)\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Θα δούμε ότι κάθε $\mathcal{N}_u$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ (Λήμμα 2.3.3 και Άσκηση 2.3.16).

Δοσμένων $\alpha \in \mathcal{N}$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\alpha^* = (\alpha(1), \dots, \alpha(n), \dots) \in \mathcal{N} \tag{2.9}$$

$$\alpha|n = (\alpha(0), \dots, \alpha(n - 1)) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \tag{2.10}$$

$$\overline{\alpha(n)} = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n - 1) \rangle \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

$$(\alpha)_n = (\alpha(\langle n, 0 \rangle), \alpha(\langle n, 1 \rangle), \dots, \alpha(\langle n, t \rangle), \dots) \in \mathcal{N}. \tag{2.12}$$

Μάλιστα οι πιο πάνω πράξεις ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις (Άσκηση 2.3.18).

Για παράδειγμα αν $u = (3, 4, 5)$ και $\alpha = (7, 8, 9, 10, \dots) = (n \mapsto n + 7)$, τότε

$$\begin{aligned} &u * \alpha = (3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, \dots) \\ &(7, 8) \sqsubseteq \alpha \\ &\mathcal{N}_u = \{\beta \in \mathcal{N} \mid \beta(0) = 3 \,\&\, \beta(1) = 4 \,\&\, \beta(2) = 5\} \\ &\alpha^* = (8, 9, 10, \dots) \\ &\alpha|4 = (\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \alpha(3)) = (7, 8, 9, 10) \\ &\overline{\alpha(3)} = \langle 7, 8, 9 \rangle \\ &(\alpha)_3 = (\alpha(\langle 3, 0 \rangle), \alpha(\langle 3, 1 \rangle), \dots, \alpha(\langle 3, t \rangle), \dots) \end{aligned}$$

$$= (\alpha(2^4 \cdot 3), \alpha(2^4 \cdot 3^2), \dots, \alpha(2^4 \cdot 3^{t+1}), \dots)$$
$$= (2^4 \cdot 3 + 7, 2^4 \cdot 3^2 + 7, \dots, 2^4 \cdot 3^{t+1} + 7, \dots).$$

Είναι σαφές ότι $\Lambda \sqsubseteq \alpha$, $\alpha|0 = \Lambda$ και

$$u \sqsubseteq \alpha \iff \alpha|n = u, \quad \text{όπου } n = |u|$$

για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $\alpha \in \mathcal{N}$.

Το επόμενο λήμμα συνδέει τις ανοικτές μπάλες του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ με τα σύνολα $\mathcal{N}_u$, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Λήμμα 2.3.3. *Θεωρούμε $r > 0$ και n τον ελάχιστο φυσικό αριθμό με $2^{-n} < r$. Τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ ισχύει*

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) < r \iff \forall i < n \ \alpha(i) = \beta(i).$$

Συνεπώς κάθε ανοικτή μπάλα $B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, r)$ ισούται με το σύνολο $\mathcal{N}_{\alpha|n}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και κάθε σύνολο $\mathcal{N}_u$ όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, ισούται με την ανοικτή μπάλα $B_{d_{\mathcal{N}}}(u*(0,0,\dots,), 2^{-(|u|-1)})$.

Απόδειξη. Θεωρούμε r και n όπως στην εκφώνηση και $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha \neq \beta$ αλλιώς η ζητούμενη ισοδυναμία είναι προφανής.

Αν $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) < r$ τότε $2^{-n(\alpha,\beta)} < r$. Αν είχαμε $n(\alpha, \beta) < n$ τότε $2^{-n} < 2^{-n(\alpha,\beta)} < r$ και τότε ο n δεν θα ήταν ο ελάχιστος φυσικός με την ιδιότητα $2^{-n} < r$. Άρα $n \leqslant n(\alpha, \beta)$ και για κάθε $i < n$ ισχύει $i < n(\alpha, \beta)$, επομένως $\alpha(i) = \beta(i)$.

Αντίστροφα αν για κάθε $i < n$ ισχύει $\alpha(i) = \beta(i)$ τότε $n \leqslant n(\alpha, \beta)$ και $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 2^{-n(\alpha,\beta)} \leqslant 2^{-n} < r$. Αυτό δείχνει τη ζητούμενη ισοδυναμία.

Ο ισχυρισμός για τις ανοικτές μπάλες είναι άμεσος από τα προηγούμενα:

Αν $r > 0$ και n είναι ο ελάχιστος φυσικός με $2^{-n} < r$ τότε από πιο πάνω έχουμε

$$\begin{aligned} \beta \in B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, r) &\iff \beta|n = \alpha|n \\ &\iff \alpha|n \sqsubseteq \beta \\ &\iff \beta \in \mathcal{N}_{\alpha|n} \end{aligned}$$

για κάθε $\beta \in \mathcal{N}$. Άρα $B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, r) = \mathcal{N}_{\alpha|n}$.

Επιπλέον για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ παίρνουμε $r_u = 2^{-(|u|-1)}$ και άρα ο ελάχιστος φυσικός n με $2^{-n} < r_u$ είναι ο $m = |u|$. Από τα προηγούμενα έχουμε

$$B_{d_{\mathcal{N}}}(u * (0, 0, \dots), 2^{-(|u|-1)}) = \mathcal{N}_{u*(0,0,\dots)|m} = \mathcal{N}_u.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Τώρα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη σύγκλιση ακολουθιών στον χώρο του Baire.

Πρόταση 2.3.4. *Για κάθε ακολουθία $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στον $\mathcal{N}$ και κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ έχουμε*

$$\begin{aligned} \alpha_i \xrightarrow{d_{\mathcal{N}}} \alpha &\iff \forall n \lim_{i \to \infty} \alpha_i(n) = \alpha(n) \\ &\iff \forall n \, \exists i_n \, \forall i \geqslant i_n \ \alpha_i(n) = \alpha(n). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η τελευταία ισοδυναμία ισχύει γιατί τα $\alpha_i(n), \alpha(n)$ είναι φυσικοί αριθμοί. Δείχνουμε επομένως την πρώτη ισοδυναμία.

Για την ευθεία κατεύθυνση Θεωρούμε $\alpha_i \xrightarrow{d_{\mathcal{N}}} \alpha$ και παίρνουμε ένα $n \in \mathbb{N}$. Από το Λήμμα 2.3.3 για $r = 2^{-n}$ η μπάλα $B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, 2^{-n})$ ισούται με το σύνολο $\mathcal{N}_{\alpha|(n+1)}$. Εφόσον η ακολουθία $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο α έχουμε $\alpha_i \in B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, 2^{-n}) = \mathcal{N}_{\alpha|(n+1)}$ για όλα τα μεγάλα i. Ειδικότερα $\alpha_i(n) = \alpha(n)$ για όλα τα μεγάλα i.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\lim_{i \to \infty} \alpha_i(n) = \alpha(n)$. Θεωρούμε $r > 0$ και N τον ελάχιστο φυσικό με $2^{-N} < r$. Από το Λήμμα 2.3.3 ισχύει $B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, r) = \mathcal{N}_{\alpha|N}$. Για κάθε $n \leqslant N$ έχουμε $\lim_{i \to \infty} \alpha_i(n) = \alpha(n)$ και όπως έχουμε εξηγήσει υπάρχει $i_n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_n$ ισχύει $\alpha_i(n) = \alpha(n)$. Θέτουμε

$i_0 = \max\{i_n \mid n \leqslant N\}$, τότε για κάθε $i \geqslant i_0$ και κάθε $n < N$ ισχύει $\alpha_i(n) = \alpha(n)$. Συνεπώς για κάθε $i \geqslant i_0$ έχουμε $\alpha_i|N = \alpha|N$, δηλαδή $\alpha_i \in \mathcal{N}_{\alpha|N} = B_{d_{\mathcal{N}}}(\alpha, r)$. ▫

Πρόταση 2.3.5. *Η τοπολογία του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Αφού οι ανοικτές μπάλες σε έναν μετρικό χώρο αποτελούν βάση για την τοπολογία ενός μετρικού χώρου προκύπτει από το Λήμμα 2.3.3 ότι τα σύνολα $\mathcal{N}_u$, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, είναι $d_{\mathcal{N}}$-ανοικτά και επιπλέον αποτελούν βάση για την τοπολογία του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$.

Επιπλέον, αφού τα μονοσύνολα στο $\mathbb{N}$ αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathbb{N}$, έχουμε από την (1.1) στην Εισαγωγή ότι τα $\mathcal{N}_u$ αποτελούν βάση για την τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Συνεπώς η τοπολογία του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ και η τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ έχουν μια κοινή βάση και άρα είναι ίσες.

Ως *δεύτερη απόδειξη* αναφέρουμε ότι από την Πρόταση 2.3.4 ότι η τοπολογία του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι αυτή της κατά σημείο σύγκλισης που όπως είναι γνωστό αυτή είναι η τοπολογία γινόμενο στον $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. ▫

Πρόταση 2.3.6. *Ο $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Συνεπώς ο χώρος του Baire είναι Πολωνικός.*

Απόδειξη. Οι τελικά μηδενικές ακολουθίες

$$\alpha_u = u * (0, 0, \dots) = (u(0), \dots, u(|u| - 1), 0, 0, \dots) \quad (u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$$

αποτελούν ένα αριθμήσιμο και πυκνό σύνολο του $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ καθώς έχουμε $\alpha_u \in \mathcal{N}_u$ για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Επομένως ο χώρος είναι διαχωρίσιμος.

Για την πληρότητα θεωρούμε μια $d_{\mathcal{N}}$-Cauchy ακολουθία $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Σταθεροποιούμε ένα $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένα $i_n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $i, j \geqslant i_n$ έχουμε $d_{\mathcal{N}}(\alpha_i, \alpha_j) < 2^{-n}$. Συνεπάγεται ότι

(2.14) $\qquad \alpha_i(k) = \alpha_j(k)$ για κάθε $k = 0, \dots, n$ και κάθε $i, j \geqslant i_n$.

Ειδικότερα η ακολουθία φυσικών αριθμών $(\alpha_i(n))_{i \in \mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή και ίση με τον αριθμό $\alpha_{i_n}(n)$.

Επομένως ορίζουμε

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \alpha(n) = \lim_{i \to \infty} \alpha_i(n) = \alpha_{i_n}(n)$$

όπου i_n είναι όπως πιο πάνω.

Είναι σαφές από την (2.14) ότι $\alpha_i(k) = \alpha_{i_n}(k) = \alpha(k)$ για κάθε $i \geqslant i_n$ και κάθε $k = 0, \dots, n$. Από την (2.13) προκύπτει $\alpha_i \xrightarrow{d_{\mathcal{N}}} \alpha$. ▫

Θα δούμε αργότερα (??) ότι ο χώρος του Baire είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον Πολωνικό χώρο των άρρητων αριθμών.

Θεώρημα 2.3.7. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας συνεχής επιμορφισμός $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια κατάλληλη μετρική d στο $\mathcal{X}$ και ένα σύνολο

$$D = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

που είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Κάθε $x \in \mathcal{X}$ είναι το όριο μιας ακολουθίας $(r_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Η ιδέα είναι να πάρουμε $\alpha = (k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και τότε θα έχουμε $x = \lim_{n \to \infty} r_{\alpha(n)}$. Το τελευταίο όριο θα είναι η τιμή της π στο α.

Ένα πρόβλημα που ανακύπτει είναι πως η ακολουθία $(r_{\alpha(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ μπορεί να μην συγκλίνει για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Για να το διορθώσουμε αυτό θα αντικαταστήσουμε την ακολουθία $(r_{\alpha(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ με μια άλλη, ας τη συμβολίσουμε με $(x_n^{\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$, η οποία συγκλίνει για κάθε α και η συνάρτηση $\alpha \mapsto \lim_{n \to \infty} x_n^{\alpha}$ είναι συνεχής. Επιπλέον για μια επαρκώς μεγάλη συλλογή $\alpha \in \mathcal{N}$ η $(x_n^{\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ δεν διαφέρει ουσιαστικά από την $(r_{\alpha(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ και επομένως κάθε $x \in \mathcal{X}$ θα λαμβάνεται ως όριο μιας ακολουθίας της μορφής $(x_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ -θα έχουμε δηλαδή έναν επιμορφισμό.

Έχοντας αυτά υπόψη προχωράμε στην κατασκευή της π. Αρχικά ορίζουμε μια οικογένεια $(x_u)_{u\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\setminus\{\Lambda\}}$ στοιχείων του $\mathcal{X}$ με επαγωγή στο μήκος $|u|$ του $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \setminus \{\Lambda\}$.

Για $|u| = 1$ με $u = (k_0)$, ορίζουμε $x_u = x_{(k_0)} = r_{k_0}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n > 1$ έχουν οριστεί x_w για κάθε $w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $1 \leqslant |w| < n$.

Θεωρούμε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = n$. Θέτουμε προσωρινά $w = (u(0), \dots, u(n-2))$ και $k = u(|u|-1)$ έτσι που

$$u = w * (k).$$

Προφανώς $|w| = n-1$ και από την Επαγωγική Υπόθεση έχει οριστεί το x_w. Ορίζουμε

$$x_u = \begin{cases} r_k, & \text{αν } d(x_w, r_k) < 2^{-n}, \\ x_w, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έτσι έχει οριστεί η οικογένεια $(x_u)_{u\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\setminus\{\Lambda\}}$.

Είναι σαφές από τον πιο πάνω ορισμό ότι $d(x_w, x_u) < 2^{-|u|}$ όπου $u = w * u(|u|-1)$. Προκύπτει ότι για κάθε $w \subsetneq u$ με $u = w * (k_0, \dots, k_m)$,

$$\begin{aligned} d(x_w, x_u) &\leqslant d(x_w, x_{w*(k_0)}) + \dots + d(x_{w*(k_0,\dots,k_{m-1})}, x_u) \\ &< 2^{-(|w|+1)} + \dots + 2^{-|u|} \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(|w|+k)} = 2^{-|w|}. \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ και κάθε $1 \leqslant n \leqslant m$ ισχύει

$$d(x_{\alpha|n}, x_{\alpha|m}) < 2^{-n}. \tag{2.15}$$

Άρα για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ η ακολουθία $(x_{\alpha|n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d-Cauchy. Αφού ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης ορίζεται η συνάρτηση

$$\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X} : \pi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|n}.$$

Παίρνοντας όριο $m \to \infty$ στην (2.15) έχουμε $d(x_{\alpha|n}, \pi(\alpha)) \leqslant 2^{-n}$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως αν $\beta \in \mathcal{N}_{\alpha|n}$, δηλαδή αν $\beta|n = \alpha|n$ ισχύει

$$d(\pi(\alpha), \pi(\beta)) \leqslant d(\pi(\alpha), x_{\alpha|n}) + d(x_{\alpha|n}, \pi(\beta)) \leqslant 2^{-n+1}$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι τότε άμεσο ότι η π είναι συνεχής (και μάλιστα ομοιόμορφα συνεχής).

Τέλος δείχνουμε ότι η π είναι επιμορφισμός. Αν $x \in \mathcal{X}$ ορίζουμε το $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ως εξής:

$$\alpha(n) = \text{ο ελάχιστος } k \in \mathbb{N} \text{ με } d(r_k, x) < 2^{-(n+3)}. \tag{2.16}$$

(Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει τέτοιος k γιατί το σύνολο $D = \{r_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό.)

Τότε $d(r_{\alpha(n)}, x) < 2^{-(n+3)}$ και

$$d(r_{\alpha(n)}, r_{\alpha(n+1)}) \leqslant d(r_{\alpha(n)}, x) + d(x, r_{\alpha(n+1)}) < 2^{-(n+3)} + 2^{-(n+4)} < 2^{-(n+2)}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Προκύπτει με επαγωγή ότι

$$x_{\alpha|(n+1)} = r_{\alpha(n)} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(Δηλαδή γι' αυτό το α συμβαίνει πάντα η πρώτη περίπτωση του ορισμού της $x_{\alpha|n}$.)

Συνεπώς

$$\pi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|n} = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|(n+1)} = \lim_{n\to\infty} r_{\alpha(n)} = x$$

και η π είναι επιμορφισμός. □

Παρατήρηση 2.3.8. Η συνάρτηση $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$ της προηγούμενης απόδειξης επιδέχεται αντίστροφη συνάρτηση. Δηλαδή υπάρχει μονομορφισμός $\tau : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{N}$ με

$$\pi(\tau(x)) = x \text{ για κάθε } x \in \mathcal{X} \quad \text{και} \quad \tau(\pi(\alpha)) = \alpha \text{ για κάθε } \alpha \in \tau[\mathcal{X}].$$

Η συνάρτηση τ δίνεται στην προηγούμενη απόδειξη από το (2.16),

$$\tau(x)(n) = \text{ο ελάχιστος } k \in \mathbb{N} \text{ με } d(r_k, x) < 2^{-(n+3)}, \quad x \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{N}.$$

Αν θέσουμε $\alpha = \tau(x)$ τότε όπως δείξαμε $\pi(\alpha) = x$, δηλαδή $\pi(\tau(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$. Από αυτό προκύπτει ότι η τ είναι μονομορφισμός,

$$\tau(x_1) = \tau(x_2) \implies \pi(\tau(x_1)) = \pi(\tau(x_2)) \implies x_1 = x_2.$$

Επιπλέον για κάθε $\alpha = \tau(x)$ έχουμε

$$\tau(\pi(\alpha)) = \tau(\pi(\tau(x))) = \tau(x) = \alpha.$$

Πόρισμα 2.3.9. *Κάθε Πολωνικός χώρος έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του συνεχούς.*

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 2.3.8 για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει μονομορφισμός $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Άρα $\mathcal{X} \leqslant_c \mathbb{N}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$. □

Υπάρχουν φυσικά Πολωνικοί χώροι που δεν είναι ισοπληθικοί με τον $\mathbb{R}$ όπως για παράδειγμα ο $\mathbb{N}$. Θα δούμε ότι τα δύο τελευταία σύνολα αποτελούν τις μοναδικές "πληθικότητες" Πολωνικών χώρων έτσι που η τελευταία κλάση συνόλων ικανοποιεί την Υπόθεση του Συνεχούς.

Ορισμός 2.3.10. Το σύνολο όλων των **δυαδικών (άπειρων) ακολουθιών** είναι το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ το οποίο συμβολίζεται και με $2^{\mathbb{N}}$. Προφανώς αυτό είναι υποσύνολο του $\mathcal{N}$ και θεωρούμε σε αυτό τη μετρική

$$d_{2^{\mathbb{N}}} = d_{\mathcal{N}} | (2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}).$$

Ο **χώρος του Cantor** είναι ο μετρικός χώρος $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο όρο και για τον τοπολογικό χώρο που προκύπτει.

Μια βάση για την τοπολογία του Cantor αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}}$ όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, ακριβώς επειδή τα $\mathcal{N}_u$, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathcal{N}$. Προφανώς $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}} = \varnothing$ όταν υπάρχει $i < |u|$ με $u(i) > 1$, συνεπώς μπορούμε να περιοριστούμε στα $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι μια **βάση** για την τοπολογία του **χώρου του Cantor** αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής

$$\mathcal{N}_u^{2^{\mathbb{N}}} = \{\alpha \in 2^{\mathbb{N}} \mid u \sqsubseteq \alpha\}, \quad u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}.$$

Είναι σαφές ότι τα πιο πάνω σύνολα $\mathcal{N}_u^{2^{\mathbb{N}}}$ είναι ανοικτά στον $2^{\mathbb{N}}$ και σύμφωνα με την Άσκηση 2.3.16 είναι και κλειστά σύνολα.

Επίσης η τοπολογία του χώρου του Cantor είναι η σχετική τοπολογία του χώρου του Baire, η οποία είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Προκύπτει ότι και η τοπολογία του χώρου του Cantor είναι η τοπολογία γινόμενο στο σύνολο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Τέλος η **σύγκλιση** ακολουθιών στον $2^{\mathbb{N}}$ χαρακτηρίζεται όπως και στην περίπτωση του $\mathcal{N}$. Δηλαδή για κάθε ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $2^{\mathbb{N}}$ και κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_i \xrightarrow{d_2^{\mathbb{N}}} \alpha &\iff \forall n \lim_{i\to\infty} \alpha_i(n) = \alpha(n) \\ &\iff \forall n \, \exists i_n \, \forall i \geqslant i_n \; \alpha_i(n) = \alpha(n). \end{aligned}$$

Πρόταση 2.3.11. *Ο $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και συνεπώς ο αντίστοιχος τοπολογικός χώρος είναι Πολωνικός.*

Απόδειξη. Αν δείξουμε ότι ο $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, ισοδύναμα ότι το $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{N}$, θα έχουμε επίσης ότι το $2^{\mathbb{N}}$ είναι κλειστό στον $\mathcal{N}$. Συνεπώς θα έχουμε ότι ο $2^{\mathbb{N}}$ είναι Πολωνικός χώρος.

Ένας τρόπος για να δείξουμε τη συμπάγεια είναι να παρατηρήσουμε ότι $2^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$. Γνωρίζουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο (για τυχαίο γινόμενο τοπολογικών χώρων χρειάζεται το *Θεώρημα Tychonoff* εδώ έχουμε όμως μόνο αριθμήσιμο γινόμενο). Αφού το $\{0,1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχουμε ότι το $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο. Αυτή όμως είναι η τοπολογία του χώρου του Baire άρα το $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

Δίνουμε μία ακόμα απόδειξη, η οποία στην ουσία εξηγεί γιατί το αριθμήσιμο γινόμενο συμπαγών μετρικών χώρων είναι συμπαγές σύνολο. Δείχνουμε ότι κάθε ακολουθία $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στον $2^{\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Θεωρούμε αρχικά την ακολουθία $(\alpha_i(0))_{i\in\mathbb{N}}$. Αφού το $\{0,1\}$ είναι πεπερασμένο υπάρχει υπακολουθία $(\alpha_{k_i^0}(0))_{i\in\mathbb{N}}$ που είναι σταθερή στο $\{0,1\}$.

Έπειτα θεωρούμε την ακολουθία $(\alpha_{k_i^0}(1))_{i\in\mathbb{N}}$. Τότε υπάρχει μια περαιτέρω υπακολουθία $(\alpha_{k_i^1}(1))_{i\in\mathbb{N}}$ η οποία είναι τελικά σταθερή. Συνεχίζοντας αναδρομικά βρίσκουμε μια φθίνουσα ακολουθία

$$\begin{aligned} &L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_n \supseteq \dots \\ &L_n = \{k_i^n \mid i \in \mathbb{N}\} = \{k_0^n < \cdots < k_i^n < \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

από άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε n η ακολουθία $(\alpha_{k_i^n}(n))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερή.

Για κάθε $n < m$ οι φυσικοί αριθμοί $k_0^m < \cdots < k_m^m$ ανήκουν στο σύνολο $L_n = \{k_0^n < \cdots < k_i^n < \dots\}$. Προκύπτει ότι $k_m^m = k_i^n$ για κάποιο $i \geqslant m$. Επομένως

$$k_m^m = k_i^n \geqslant k_m^n > k_n^n.$$

Άρα η $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} = (k_i^i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών

Ορίζουμε

$$\alpha(n) = \alpha_{k_n^n}(n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$.

Δείχνουμε ότι $\alpha_{s_i} \to \alpha$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε για κάθε $i \geqslant n$ έχουμε

$$\alpha_{s_i}(n) = \alpha_{k_i^i}(n) = \alpha_{k_j^n}(n) \quad \text{για κάποιο } j,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $L_i \subseteq L_n$. Επειδή για κάθε n η ακολουθία $(\alpha_{k_i^n}(n))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερή έχουμε

$$\alpha_{k_j^n}(n) = \alpha_{k_n^n}(n) = \alpha(n).$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lim_{i\to\infty} \alpha_{s_i}(n) = \alpha(n)$ και από την (2.13) έχουμε $\alpha_{s_i} \xrightarrow{d_{\mathcal{N}}} \alpha$. Αφού τα α_i, $i \in \mathbb{N}$ και το α είναι στοιχεία του $2^{\mathbb{N}}$ και η μετρική $d_{2^{\mathbb{N}}}$ είναι ο περιορισμός της $d_{\mathcal{N}}$ στο $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ προκύπτει ότι $\alpha_{s_i} \xrightarrow{d_{2^{\mathbb{N}}}} \alpha$. ▫

Θεώρημα 2.3.12. *Για κάθε τέλειο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $I = \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ και σταθεροποιούμε μια συμβατή μετρική d στον $\mathcal{X}$.

Κατασκευάζουμε αναδρομικά μια οικογένεια $(V_u)_{u\in I}$ από d-ανοικτές μπάλες του $\mathcal{X}$ με τις εξής ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \text{ακτίνα}(V_u) &\leqslant 2^{-|u|} \\ \overline{V_{u*(i)}} &\subseteq \overline{V_u}, \quad i=0,1 \\ \overline{V_{u*(0)}} \cap \overline{V_{u*(1)}} &= \varnothing \end{aligned}$$

για κάθε $u \in I$.

Στο αρχικό βήμα επιλέγουμε ένα $x_0 \in \mathcal{X}$ και παίρνουμε $V_\Lambda = B_d(x_0, 1)$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ έχουμε ορίσει V_u όπως πιο πάνω για όλα τα $w \in I$ με $1 \leqslant |w| < n$.

Ορίζουμε τα $V_{w*(i)}$, $i = 0,1$, για όλα τα $w \in I$ με $|w| = n-1$. Θεωρούμε ένα τέτοιο w. Η μπάλα V_w δεν μπορεί να περιέχει μόνο το κέντρο της, αλλιώς αυτό θα ήταν μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{X}$. Επομένως υπάρχουν στοιχεία x_0^w, x_1^w της V_w με $x_0^w \neq x_1^w$. Αφού το V_w είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχουν ανοικτές μπάλες B_0^w και B_1^w με κέντρα τα x_0^w, x_1^w αντίστοιχα, με ακτίνες μικρότερες ή ίσες του 2^{-n}, που ικανοποιούν επίσης

$$\overline{B_0^w} \cap \overline{B_1^w} = \varnothing \quad \text{και} \quad \overline{B_i^w} \subseteq V_w \subseteq \overline{V_w} \quad i = 0,1.$$

Οπότε ορίζουμε $V_{w*(i)} = B_i^w$, $i = 0,1$. Είναι σαφές ότι ικανοποιούνται πιο πάνω ιδιότητες. Αυτό ολοκληρώνει την κατασκευή.

Για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ η $(\overline{V_{\alpha|n}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών συνόλων των οποίων η διάμετρος συγκλίνει στο 0. Αφού ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης, από ένα γνωστό θεώρημα του Cantor (Αρχή Κιβωτισμού), η τομή

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_{\alpha|n}}$$

είναι μονοσύνολο. Ορίζουμε

$$\tau : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X} : \{\tau(\alpha)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_{\alpha|n}}.$$

Αν τα $\alpha \neq \beta$ είναι στοιχεία του $2^{\mathbb{N}}$ και n είναι ο ελάχιστος k με $\alpha(k) \neq \beta(k)$ τότε

$$\alpha|n = \beta|n \quad \text{και} \quad \alpha(n) \neq \beta(n).$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\alpha(n) = 0$ και $\beta(n) = 1$. Επίσης θέτουμε $w = \alpha|n = \beta|n$. Τότε $\tau(\alpha) \in \overline{V_{\alpha|(n+1)}}$, $\tau(\beta) \in \overline{V_{\beta|(n+1)}}$, και

$$\overline{V_{\alpha|(n+1)}} \cap \overline{V_{\beta|(n+1)}} = \overline{V_{w*(0)}} \cap \overline{V_{w*(1)}} = \varnothing.$$

Επομένως $\tau(\alpha) \neq \tau(\beta)$. Τέλος δείχνουμε ότι η τ είναι συνεχής. Θέτουμε

$$x_u = \text{το κέντρο της ανοικτής μπάλας } V_u.$$

Έστω $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε n έχουμε $\tau(\alpha) \in \overline{V_{\alpha|n}}$ και επομένως

$$d(\tau(\alpha), x_{\alpha|n}) \leqslant \text{ακτίνα}(V_{\alpha|n}) \leqslant 2^{-n}.$$

Συνεπώς αν $\beta \in \mathcal{N}_{\alpha|n}$, δηλαδή αν $\beta|n = \alpha|n$ τότε

$$d(\tau(\alpha), \tau(\beta)) \leqslant d(\tau(\alpha), x_{\alpha|n}) + d(x_{\alpha|n}, \tau(\beta)) \leqslant 2 \cdot 2^{-n} = 2^{-n+1}.$$

Προκύπτει από το πιο πάνω ότι η τ είναι συνεχής. □

Όπως είναι γνωστό η προηγούμενη συνάρτηση τ έχει συνεχή αντίστροφη. Αυτό ισχύει λόγω της συμπάγειας του $2^{\mathbb{N}}$. Αναφερόμαστε εκτενέστερα σε αυτό στο Πόρισμα 2.4.4 πιο κάτω.

Όσον αφορά την αντίστοιχη πληθαριθμική συνέπεια έχουμε το εξής.

Πόρισμα 2.3.13. *Κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς.*

Απόδειξη. Αν $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος και P είναι μη κενό τέλειο υποσύνολό του τότε ο P με τη σχετική τοπολογία είναι τέλειος Πολωνικός χώρος.

Από το Θεώρημα 2.3.12 υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail P$ και ειδικότερα $2^{\mathbb{N}} \leqslant_c P$. Άρα

$$\mathbb{R} =_c \{0,1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}} \leqslant_c P \leqslant_c \mathbb{R}$$

όπου στην τελευταία σχέση $\leqslant_c$ χρησιμοποιήσαμε το Πόρισμα 2.3.9. Από το Θεώρημα Schröder-Bernstein $P =_c \mathbb{R}$. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 2.3.14. Η συνάρτηση $d_{\mathcal{N}}$ είναι μετρική στο $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Μάλιστα η $d_{\mathcal{N}}$ είναι **υπερμετρική** (**ultrametric**), είναι δηλαδή μετρική που ικανοποιεί

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha,\beta) \leqslant \max\{d_{\mathcal{N}}(\alpha,\gamma), d_{\mathcal{N}}(\gamma,\beta)\}, \quad \text{για κάθε } \alpha,\beta,\gamma \in \mathcal{N}.$$

Άσκηση 2.3.15. Εξετάστε τις επόμενες ακολουθίες του χώρου του Baire ως προς τη σύγκλιση,

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= (i,0,0,\dots),\\
\beta_i &= (1)^i * (0,0,\dots),\\
\gamma_i &= (0,1,2,\dots,i,0,0,\dots),\\
\delta_i &= (0,2,4,6,\dots,42) * ((-1)^i) * (0,0,\dots)\\
\varepsilon_i &= \ (0,2,4,6,\dots,2i) * ((-1)^i) * (0,0,\dots),
\end{aligned}$$

όπου $i \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.3.16. Τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathcal{N}$ είναι κλειστά,

$$\begin{aligned}
A &= \{(n) * (0,0,0,\dots) \mid n \in \mathbb{N}\},\\
B &= \{(0)^n * (n,1,1,1,\dots) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0,0,\dots)\}\\
C &= \{(1)^n * (2,3,4,5,\dots) \mid n \in \mathbb{N}\} \ \cup \{(1,1,\dots,1,\dots)\}.
\end{aligned}$$

Δείξτε επίσης ότι η βασική περιοχή $\mathcal{N}_u$, όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ εκτός από ανοικτό είναι και κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$. Συμπεράνετε ότι κάθε βασική περιοχή $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}}$, $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ είναι επίσης ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 2.3.17. Κάθε $\mathcal{N}_u$ με τη σχετική τοπολογία είναι τοπολογικά ισομορφικό με τον $\mathcal{N}$. Βρείτε έναν κατάλληλο τοπολογικό ισομορφισμό $f_u : \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{N}_u$.

Άσκηση 2.3.18. Οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned}
s &: \mathcal{N} \to \mathcal{N} : s(\alpha) = \alpha^*\\
f &: \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : f(\alpha,n) = \alpha|n\\
g &: \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : g(\alpha,n) = \overline{\alpha(n)}\\
h &: \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathcal{N} : h(\alpha,n) = (\alpha)_n
\end{aligned}$$

όπως δίνονται στις (2.9) - (2.12) είναι συνεχείς. Υπενθυμίζουμε ότι θεωρούμε το $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με τη διακριτή μετρική.

2.4. Το Θεώρημα Cantor-Bendixson

Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει τη σχέση ανάμεσα στα κλειστά και τέλεια υποσύνολα ενός Πολωνικού χώρου.

Θεώρημα 2.4.1 (Cantor-Bendixson). *Για κάθε κλειστό υποσύνολο C ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ υπάρχουν δύο σύνολα $P, S \subseteq C$, με το P τέλειο (ενδεχομένως κενό), το S αριθμήσιμο, $P \cap S = \varnothing$ και $C = P \cup S$.*

Μάλιστα η πιο πάνω διάσπαση είναι μοναδική, δηλαδή αν P', S' είναι δύο ξένα υποσύνολα του C με το P' τέλειο, το S' αριθμήσιμο και $P' \cup S' = C$ τότε $P' = P$ και $S' = S$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το κλειστό $C \subseteq \mathcal{X}$ και μια αριθμήσιμη βάση $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ για την τοπολογία του $\mathcal{X}$. Ορίζουμε

$$P = \{x \in C \mid \forall n \text{ με } x \in V_n \text{ το σύνολο } V_n \cap C \text{ είναι υπεραριθμήσιμο}\}$$
$$S = C \setminus P.$$

Είναι σαφές ότι $P \cap C = \varnothing$ και ότι $C = P \cup S$. Δείχνουμε ότι το S είναι αριθμήσιμο σύνολο. Για κάθε $x \in S$ έχουμε $x \notin P$ και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x \in V_n$ και το σύνολο $V_n \cap C$ είναι αριθμήσιμο. Ορίζουμε $n(x)$ να είναι ο ελάχιστος τέτοιος n και $I = \{n(x) \in \mathbb{N} \mid x \in S\}$. Τότε το I είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Επίσης

$$S \subseteq \bigcup_{n \in I} (V_n \cap C)$$

ακριβώς γιατί $x \in V_{n(x)}$ για κάθε $x \in S \subseteq C$. Αφού το $V_n \cap C$ είναι αριθμήσιμο για κάθε $n \in I$ έχουμε ότι το σύνολο S περιέχεται σε μια αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων. Συνεπώς το S είναι αριθμήσιμο.

Έπειτα δείχνουμε ότι το P είναι κλειστό σύνολο. Έστω $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία μέσα από το P που συγκλίνει στο $x \in \mathcal{X}$. Επειδή $P \subseteq C$ και το C είναι κλειστό έχουμε ότι $x \in C$. Επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $x \in V_n$ υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ με $x_i \in V_n$. Αφού $x_i \in P$ έχουμε ότι το σύνολο $V_n \cap C$ είναι υπεραριθμήσιμο. Άρα $x \in P$ και το P είναι κλειστό.

Επίσης το P δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Θεωρούμε $x \in P$ και $n \in \mathbb{N}$ με $x \in V_n$. Το σύνολο

$$V_n \cap C = (V_n \cap P) \cup (V_n \cap S)$$

είναι υπεραριθμήσιμο ενώ το $V_n \cap S$ είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του S. Συνεπώς το $V_n \cap P$ είναι υπεραριθμήσιμο και ειδικότερα υπάρχει $y \in V_n \cap P$ που είναι διάφορο του x. Άρα το x δεν είναι μεμονωμένο σημείο του P.

Τέλος δείχνουμε τη μοναδικότητα. Θεωρούμε ένα τέλειο P' και ένα αριθμήσιμο S' με $P' \cap S' = \varnothing$ και

$$P' \cup S' = P \cup S.$$

Θεωρούμε $x \in P'$, αφού $P' \subseteq P \cup S = C$ έχουμε ότι $x \in C$. Αν έχουμε $x \in V_n$ τότε, χρησιμοποιώντας μια κατάλληλα μικρή ανοικτή μπάλα του $\mathcal{X}$, μπορούμε να βρούμε m έτσι ώστε $x \in V_m \subseteq \overline{V_m} \subseteq V_n$. Τότε το $\overline{V_m \cap P'}$ είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\overline{V_m} \cap P' \subseteq V_n \cap C$. Από την άλλη το $\overline{V_m \cap P'}$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία (Άσκηση 2.4.8), άρα είναι μη κενό τέλειο σύνολο. Ειδικότερα είναι υπεραριθμήσιμο (Πόρισμα 2.3.13) και συνεπώς το υπερσύνολο $V_n \cap C$ είναι υπεραριθμήσιμο. Επομένως $x \in P$ και άρα $P' \subseteq P$.

Αν $x \in S'$ τότε $x \notin P'$ και αφού το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό υπάρχει n με $x \in V_n$ και $V_n \cap P' = \varnothing$. Άρα $V_n \cap C = V_n \cap S' \subseteq S'$ και το σύνολο $V_n \cap C$ είναι αριθμήσιμο. Προκύπτει ότι $x \in S$ και συνεπώς $S' \subseteq S$. Ισοδύναμα $P \subseteq P'$.

Καταλήγουμε ότι $P = P'$ και $S = S'$. □

Ορισμός 2.4.2. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $C \subseteq \mathcal{X}$ κλειστό. Θεωρούμε τα σύνολα P, S όπως στο Θεώρημα Cantor-Bendixson. Δηλαδή το P είναι τέλειο, το S είναι αριθμήσιμο, $P \cap S = \varnothing$ και $P \cup S = C$.

Το μοναδικό P όπως πιο πάνω είναι ο **τέλειος πυρήνας** (perfect kernel) του C και το μοναδικό S όπως πιο πάνω είναι το **διάσπαρτο μέρος** (scattered part) του C.

Μια άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος Cantor-Bendixson είναι η επέκταση του Θεωρήματος 2.3.12 στους υπεραριθμήσιμους Πολωνικούς χώρους.

Πόρισμα 2.4.3. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Cantor-Bendixson το κλειστό σύνολο $\mathcal{X}$ διασπάται στον τέλειό του πυρήνα P και στο διάσπαρτό του μέρος S. Αν είχαμε $P = \varnothing$ τότε το $\mathcal{X} = S$ θα ήταν αριθμήσιμο σύνολο, άτοπο.

Άρα $P \neq \varnothing$. Αφού το P είναι κλειστό προκύπτει ότι είναι Πολωνικός χώρος και μάλιστα τέλειος. Από το Θεώρημα 2.3.12 υπάρχει ένας συνεχής επιμορφισμός

$$\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail P \subseteq \mathcal{X}.$$

Η τ είναι η ζητούμενη συνάρτηση. □

Πόρισμα 2.4.4. Κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος έχει έναν υπόχωρο που είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον χώρο του Cantor.

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι αν έχουμε δύο μετρικούς χώρους K, Y με τον K συμπαγή και έναν συνεχή μονομορφισμό $f : K \rightarrowtail Y$ τότε το $f[K]$ είναι συμπαγές (ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου) και η $f^{-1} : f[K] \to K$ είναι συνεχής.

Για να δούμε γιατί το $f[K]$ είναι συμπαγές θεωρούμε μια ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $f[K]$ και γράφουμε $y_n = f(x_n)$ όπου $x_n \in K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τη συμπάγεια του K υπάρχει $x \in K$ και υπακολουθία $(x_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{m_n} \to x$, οπότε από τη συνέχεια της f έχουμε $y_{m_n} = f(x_{m_n}) \to f(x)$.

Για τη συνέχεια της f^{-1} θεωρούμε $f(x_n) \to f(x)$, όπου $x \in K$ και $x_n \in K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν είχαμε $x_n \nrightarrow x$ τότε θα υπήρχε μια μπάλα $B(x,r)$ με $x_n \notin B(x,r)$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$, και πάλι από τη συμπάγεια του K (εφαρμοσμένη στην υπακολουθία που προκύπτει από αυτά τα άπειρα n) θα βρίσκαμε μια υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $z \in K$ με $x_{k_n} \to z$ και $x_{k_n} \notin B(x,r)$, ειδικότερα $z \neq x$. Από τη συνέχεια της f θα είχαμε $y_{k_n} = f(x_{k_n}) \to f(z)$. Επομένως $f(z) = f(x)$ και αφού η f είναι μονομορφισμός θα προέκυπτε ότι $z = x$, άτοπο.

Προκύπτει ότι η τ του Πορίσματος 2.4.3 επιδέχεται συνεχή αντίστροφη συνάρτηση. □

Μια άλλη εφαρμογή του Θεωρήματος Cantor-Bendixson είναι η εξής.

Πόρισμα 2.4.5. *Τα κλειστά υποσύνολα Πολωνικών χώρων ικανοποιούν την Υπόθεση του Συνεχούς.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $C \subseteq \mathcal{X}$ κλειστό. Θεωρούμε τον τέλειο πυρήνα P και το διάσπαρτο μέρος S του C.

Αν $P = \varnothing$ τότε $C = P \cup S = S$ και άρα το C είναι αριθμήσιμο. Αν $P \neq \varnothing$ από τα Πορίσματα 2.3.13 και 2.3.9 έχουμε

$$\mathbb{R} \leqslant_c P \leqslant_c C \leqslant_c \mathcal{X} \leqslant_c \mathbb{R},$$

όπου στη δεύτερη και τρίτη σχέση $\leqslant_c$ πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε την ταυτοτική συνάρτηση. Από το Θεώρημα Schröder-Bernstein προκύπτει ότι $C =_c \mathbb{R}$. □

Αξίζει να απομονώσουμε τον εξής χαρακτηρισμό των κλειστών υποσυνόλων Πολωνικών χώρων που είναι αριθμήσιμα, ο οποίος προκύπτει από τα επιχειρήματα της προηγούμενης απόδειξης:

Αν το C είναι κλειστό υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$, τότε το C είναι αριθμήσιμο αν και μόνο αν ο τέλειος πυρήνας του είναι το κενό σύνολο.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.4.6. Βρείτε τον τέλειο πυρήνα και το διάσπαρτο μέρος των κλειστών συνόλων

$$\begin{aligned} A &= [0,1] \cup \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ B &= A \cup \{1 + 2^{-n} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \\ C &= \{1\} \cup \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.4.7. Τα μεμονωμένα σημεία ενός κλειστού υποσυνόλου ενός Πολωνικού χώρου περιέχονται στο διάσπαρτο μέρος του. Ισχύει το αντίστροφο;

Άσκηση 2.4.8. Αν (X, d) είναι μετρικός χώρος και το $P \subseteq X$ είναι τέλειο, τότε για κάθε ανοικτό V το σύνολο $\overline{V \cap P}$ είναι τέλειο (ενδεχομένως κενό).

Άσκηση 2.4.9. Ο τέλειος πυρήνας ενός κλειστού υποσυνόλου Πολωνικού χώρου είναι το μεγαλύτερο τέλειο υποσύνολό του. Δηλαδή αν ο $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος, το $C \subseteq \mathcal{X}$ είναι κλειστό και το $P_0 \subseteq C$ είναι τέλειο τότε το P_0 περιέχεται στον τέλειο πυρήνα του C.

Άσκηση 2.4.10. Τα G_δ υποσύνολα Πολωνικών χώρων ικανοποιούν την Υπόθεση του Συνεχούς.

2.5. Δένδρα

Ορισμός 2.5.1. Έστω X μη κενό σύνολο. Ένα $T \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ είναι **δένδρο** στο X αν είναι μη κενό και κλειστό προς τα κάτω ως προς τη διάταξη $\sqsubseteq$, δηλαδή αν $w \sqsubseteq u$ και $u \in T$ τότε $w \in T$.

Για παράδειγμα το σύνολα $X^{<\mathbb{N}}$ και $\{\Lambda\}$ είναι δένδρα στο X. Άλλα παραδείγματα είναι το $T = \{\Lambda, (a), (a, b), (a, c), (d)\}$ και το $S = \{(a, b)\} \cup \{(a)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ για κάποια $a, b, c, d \in X$.

Παρατηρούμε ότι η κενή ακολουθία Λ ανήκει σε κάθε δένδρο, γιατί $\Lambda \sqsubseteq u$ για κάθε $u \in T \neq \emptyset$.

Στους επόμενους ορισμούς θεωρούμε ότι έχουμε ένα δένδρο T. Η **ρίζα** του T είναι η κενή ακολουθία Λ. Τα στοιχεία του T ονομάζονται **κόμβοι** ή **κλαδιά** του T. Ένας κόμβος u του T ονομάζεται **τερματικός** αν δεν έχει γνήσια επέκταση w μέσα στο T, δηλαδή για κάθε $w \in T$ με $u \sqsubseteq w$ έχουμε $u = w$.

Το T είναι **κλαδεμένο** ή **περικομμένο** (pruned) αν δεν έχει τερματικούς κόμβους.

Με τον όρο **άπειρο κλαδί** του T εννοούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ με την ιδιότητα

$$(f(0), \dots, f(n)) \in T$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το **σώμα** $[T]$ του T είναι το σύνολο όλων των άπειρων κλαδιών του T. Είναι σαφές ότι το σώμα ενός δένδρου στο X είναι υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Δίνουμε μερικά παραδείγματα: α) το σώμα του δένδρου $X^{<\mathbb{N}}$ είναι όλος ο χώρος $X^{\mathbb{N}}$, ειδικότερα *το σώμα του* $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ *είναι ο χώρος του Baire* $\mathcal{N}$, β) το σώμα ενός πεπερασμένου δένδρου είναι το κενό σύνολο $\emptyset$, γ) το σώμα του προηγούμενου δένδρου $S = \{(a, b)\} \cup \{(a)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι το μονοσύνολο $\{(a, a, \dots, a, \dots)\}$ του $X^{\mathbb{N}}$.

Ένα δένδρο T ονομάζεται **θεμελιωμένο** (well-founded) αν $[T] = \emptyset$ και **μη θεμελιωμένο** (ill-founded) αν $[T] \neq \emptyset$. Επειδή υποθέσαμε ότι κάθε δένδρο είναι μη κενό σύνολο, προκύπτει ότι κάθε κλαδεμένο δένδρο είναι μη θεμελιωμένο.

Ένα δένδρο S στο X θα λέγεται **υποδένδρο** του T αν $S \subseteq T$. Για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε το **υποδένδρο** T_u των **ακολουθιών που είναι συμβατές** με το u,

$$T_u = \{w \in T \mid u||w\}. \tag{2.17}$$

Με άλλα λόγια $w \in T_u$ αν και μόνο αν $w \in T$ και είτε $w \sqsubseteq u$ είτε $u \sqsubseteq w$. Αυτός ο ορισμός έχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον όταν $u \in T$, αλλιώς το T_u αποτελείται μόνο από τα γνήσια αρχικά τμήματα της u που ανήκουν στο T, μπορεί να έχουμε $T_u = \{\Lambda\}$.

Είναι εύκολο να δει κανείς (Άσκηση 2.5.18) ότι το T_u είναι δένδρο και πως για κάθε $u \in T$ που δεν είναι τερματικός κόμβος του T ισχύει

$$T_u = \bigcup \{T_{u*(x)} \mid u*(x) \in T\} \tag{2.18}$$

$$[T_u] = \bigcup \{[T_{u*(x)}] \mid u*(x) \in T\}. \tag{2.19}$$

Δένδρα και τοπολογία. Είναι σαφές ότι το σώμα ενός δένδρου T στο X είναι υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Αν θεωρήσουμε στο X τη διακριτή τοπολογία τότε ο $X^{\mathbb{N}}$ είναι μετρικός χώρος. Όπως και με τον χώρο του Baire μια βάση για την τοπολογία του $X^{\mathbb{N}}$ είναι η οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής

$$\{x_0\} \times \cdots \times \{x_{n-1}\} \times X \times X \times \ldots$$

όπου $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$.

Μια ακολουθία $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στον $X^{\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην $f \in X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(f_i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $f(n)$ μέσα στον X, ισοδύναμα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f_i(n) = f(n)$ για όλα τα μεγάλα i.

Τα σώματα δένδρων σε ένα σύνολο X χαρακτηρίζουν τα κλειστά σύνολα του $X^{\mathbb{N}}$.

Πρόταση 2.5.2. *Έστω X μη κενό σύνολο με τη διακριτή μετρική και $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Τότε το F είναι κλειστό ως προς την τοπολογία γινόμενο του $X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο X με $F = [T]$.*

Απόδειξη. Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε ότι το F είναι κλειστό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Αν το F είναι το κενό σύνολο τότε επιλέγουμε για T ένα οποιοδήποτε δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης με κενό σώμα, π.χ. το $\{\Lambda\}$.

Επομένως υποθέτουμε ότι $F \neq \emptyset$. Αν $u \in X^{<\mathbb{N}}$ και $f \in X^{\mathbb{N}}$ γράφουμε $u \sqsubseteq f$ όταν $f(k) = u(k)$ για κάθε $k < |u|$. Ορίζουμε $T \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$u \in T \iff \exists f \in F \; u \sqsubseteq f.$$

Επειδή $F \neq \emptyset$ έχουμε $\Lambda \in T$ και άρα $T \neq \emptyset$. Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι το T είναι δένδρο.

Δείχνουμε ότι $F = [T]$. Έστω $g \in F$ και $n \in \mathbb{N}$. Είναι προφανές ότι υπάρχει $f \in F$ με $(g(0), \ldots, g(n)) \sqsubseteq f$, συγκεκριμένα μπορούμε να πάρουμε $f = g$. Άρα $(g(0), \ldots, g(n)) \in T$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g \in [T]$. Αντίστροφα αν $g \in [T]$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $(g(0), \ldots, g(n)) \in T$ και άρα υπάρχει $f_n \in F$ με $(g(0), \ldots, g(n)) \sqsubseteq f_n$.

Η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο στοιχείο g. Πράγματι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, παίρνουμε $n_0 = k$ και για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $f_n(k) = g(k)$ γιατί $(g(0), \ldots, g(n)) \sqsubseteq f_n$. Άρα $f_n(k) \xrightarrow{X} g(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και επομένως $f_n \xrightarrow{X^{\mathbb{N}}} g$. Αφού $f_n \in F$ για κάθε n και το F είναι κλειστό προκύπτει ότι $g \in F$. Άρα $F = [T]$ και έχουμε αποδείξει την ευθεία κατεύθυνση.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε μια ακολουθία $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $[T]$ η οποία συγκλίνει στο $f \in X^{\mathbb{N}}$. Δείχνουμε ότι $f \in T$. Για κάθε n, υπάρχει i_0 έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ και κάθε $k \leqslant n$ έχουμε $f_i(k) = f(k)$. Ειδικότερα $(f(0), \ldots, f(n)) \sqsubseteq f_{i_0}$. Εξ ορισμού $(f(0), \ldots, f(n)) \in T$. Προκύπτει ότι $f \in [T]$.

□

Πόρισμα 2.5.3. *Ένα σύνολο $F \subseteq \mathcal{N}$ είναι κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο $\mathbb{N}$ με $F = [T]$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.5.2 για $X = \mathbb{N}$ και θυμίζουμε ότι η τοπολογία του χώρου του Baire είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (Πρόταση 2.3.5). □

Τα συμπαγή σύνολα του $X^{\mathbb{N}}$ μπορούν επίσης να χαρακτηριστούν από τα σώματα μιας ειδικής κατηγορίας δένδρων.

Ορισμός 2.5.4. Έστω X μη κενό σύνολο και T ένα δένδρο στο X. Το T είναι **πεπερασμένης διακλάδωσης** αν για κάθε $u \in T$ υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα $w \in T$ που είναι άμεσες επεκτάσεις του u, δηλαδή για κάθε $u \in T$ υπάρχουν $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$ έτσι ώστε

$$\forall x\, (u * (x) \in T \iff x \in \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}).$$

Το προηγούμενο n μπορεί να παίρνει οσοδήποτε μεγάλες τιμές. Μπορούμε ακόμα να έχουμε $n = 0$, οπότε σε αυτή την περίπτωση η πιο πάνω ισοδυναμία σημαίνει ότι ο κόμβος $u \in T$ είναι τερματικός.

Ένα κλασσικό παράδειγμα δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης είναι το σύνολο $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ όλων των **πεπερασμένων δυαδικών ακολουθιών**. Προφανώς *το σώμα το* $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ *είναι ο χώρος του Cantor* $2^{\mathbb{N}}$.

Λήμμα 2.5.5 (Το Λήμμα του König)**.** *Κάθε άπειρο δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης έχει άπειρο κλαδί.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $X \neq \varnothing$ και ένα άπειρο δένδρο T στο X που είναι πεπερασμένης διακλάδωσης. Ορίζουμε

$$P = \{u \in T \mid \text{το υποδένδρο } T_u \text{ είναι άπειρο}\}.$$

Αφού $T_\Lambda = T$ έχουμε $\Lambda \in P$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,

$$u \in P \implies \exists x\, u * (x) \in P. \tag{2.20}$$

Θεωρούμε $u \in P$. Αφού το δένδρο T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης υπάρχουν $x_0, \ldots, x_{n-1} \in T$ έτσι ώστε $u * (x) \in T$ αν και μόνο αν $x \in \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$. Επιπλέον το u δεν είναι τερματικός κόμβος του T γιατί το T_u είναι άπειρο σύνολο. Από την (2.18) έχουμε ότι

$$T_u = \bigcup_{u*(x) \in T} T_{u*(x)} = \bigcup_{k=0}^{n-1} T_{u*(x_k)}.$$

Ένα από τα πιο πάνω σύνολα της πεπερασμένης ένωσης είναι άπειρο, γιατί αλλιώς το T_u θα ήταν πεπερασμένο. Άρα υπάρχει $k < n$ με $u * (x_k) \in P$.

Έχοντας αποδείξει την πιο πάνω συνεπαγωγή μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X, ως εξής. Αρχικά εφαρμόζουμε την (2.20) για $u = \Lambda \in P$ και βρίσκουμε $x_0 \in X$ με $(x_0) \in P$. Έπειτα πάλι με εφαρμογή της (2.20) βρίσκουμε ένα στοιχείο $x_1 \in X$ με $(x_0, x_1) \in P$. Συνεχίζουμε ομοίως και βρίσκουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με την ιδιότητα $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in P$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ειδικότερα έχουμε $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in T$ για κάθε n και επομένως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άπειρο κλαδί του X.

Σημείωση: Εδώ γίνεται χρήστη του *Αξιώματος Εξαρτημένων Επιλογών* (DC), μια ασθενέστερη μορφή του Αξιώματος Επιλογής, η οποία είναι ευρέως αποδεκτή στα κλασσικά Μαθηματικά. Παραπέμπουμε στην Άσκηση 2.5.27 για περισσότερες λεπτομέρειες. □

Πρόταση 2.5.6 (Συμπαγή σύνολα και δένδρα πεπερασμένης διακλάδωσης)**.** *Έστω X μη κενό σύνολο με τη διακριτή τοπολογία και $K \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Τότε το K είναι συμπαγές ως προς την τοπολογία γινόμενο του $X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο X πεπερασμένης διακλάδωσης με $K = [T]$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το K είναι συμπαγές. Ειδικότερα το K είναι κλειστό και από την Πρόταση 2.5.2 υπάρχει ένα δένδρο R στο X με $K = [R]$. Το R μπορεί να είναι άπειρης διακλάδωσης αλλά θα περάσουμε σε ένα υποδένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης με το ίδιο σώμα.

Ορίζουμε $S \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής,

$$u \in S \iff [R_u] \neq \varnothing.$$

Αν $w \sqsubseteq u$ είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε ακολουθία που είναι συμβατή με το u είναι συμβατή και με το w, επομένως $R_u \subseteq R_w$. Άρα αν $u \in S$ και $w \sqsubseteq u$ τότε $\varnothing \neq [R_u] \subseteq [R_w]$ και επομένως $w \in S$. Προκύπτει ότι αν το S είναι μη κενό τότε είναι και δένδρο.

Η περίπτωση $S = \varnothing$ δεν μπορεί να αποκλειστεί: αν $K = \varnothing$ τότε $[R] = \varnothing$ και $S = \varnothing$. Σε αυτή την περίπτωση επιλέγουμε για T ένα οποιοδήποτε δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης που έχει κενό σώμα, π.χ. $T = \{\Lambda\}$, οπότε $K = [T]$.

Στο εξής θεωρούμε ότι $K \neq \varnothing$ και επειδή $K = [R] = [R_\Lambda]$ έχουμε $\Lambda \in S$ και το S είναι δένδρο. Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι

$$[S_w] = [R_w] \tag{2.21}$$

για κάθε $w \in S$. (Τι συμπεραίνετε σε σχέση με την Άσκηση 2.5.19;)

Ισχυριζόμαστε ότι το S είναι πεπερασμένης διακλάδωσης και ότι $[S] = [R]$, συνεπώς μπορούμε να πάρουμε $T = S$.

Η ισότητα $[S] = [R]$ είναι άμεση από την (2.21) για $w = \Lambda \in S$. Επομένως δείχνουμε ότι το S είναι πεπερασμένης διακλάδωσης.

Έστω $u \in S$. Για κάθε $x \in X$ με $u * (x) \in S$ ορίζουμε

$$V(x) = \{u(0)\} \times \cdots \times \{u(|u| - 1)\} \times \{x\} \times X \times X \times \ldots .$$

Τότε η οικογένεια $\{V(x) \mid u*(x) \in S\}$ είναι εύκολα ανοικτό κάλυμμα του συνόλου $[S_u]$. Από την Πρόταση 2.5.2 το $[S_u]$ είναι κλειστό υποσύνολο του K και συνεπώς είναι συμπαγές. Άρα υπάρχουν $x_0, \ldots, x_m \in X$ έτσι ώστε

$$[S_u] \subseteq \bigcup_{i=0}^{m} V(x_i).$$

Δείχνουμε ότι για κάθε $x \in X$ με $u * (x) \in S$ υπάρχει $i \leqslant m$ με $x = x_i$. Έστω $w = u * (x) \in S$, τότε $[T_w] \neq \varnothing$. Από την (2.21) έχουμε $[S_w] = [R_w]$, άρα υπάρχει $f \in [S_w]$. Τότε $f(|w| - 1) = w(|w| - 1) = x$.

Από την άλλη $f \in [S_w] \subseteq [S_u]$ και άρα υπάρχει $i \leqslant m$ με $f \in V(x_i)$. Εξ ορισμού $f(|w| - 1) = f(|u|) = x_i$. Συνεπώς $x = x_i$.

Επομένως το S είναι πεπερασμένης διακλάδωσης. Αυτό αποδεικνύει την ευθεία κατεύθυνση.

Αντίστροφα έστω ότι $K = [T]$, όπου το T είναι δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης. Δείχνουμε ότι το K είναι συμπαγές. Έστω $(V_i)_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του K. Αν υπάρχει $i_0 \in I$ με $K \subseteq V_{i_0}$ τότε το $\{V_{i_0}\}$ αποτελεί προφανώς πεπερασμένο υποκάλυμμα. Επομένως θεωρούμε ότι $K \nsubseteq V_i$ για κάθε $i \in I$.

Ορίζουμε $S \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$u \in S \iff u \in T \;\&\; \forall i \in I \; [T_u] \nsubseteq V_i.$$

Από την υπόθεσή μας έχουμε $K = [T] = [T_\Lambda] \nsubseteq V_i$ για κάθε i, επομένως $\Lambda \in S$. Επιπλέον αν $w \sqsubseteq u \in S$ τότε $u, w \in T$ και $[T_u] \subseteq [T_w]$, άρα για κάθε i έχουμε $[T_w] \nsubseteq V_i$, δηλαδή $w \in S$. Επομένως το S είναι υποδένδρο του T.

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το S είναι άπειρο. Αφού το S (ως υποδένδρο του T) είναι πεπερασμένης διακλάδωσης, από το Λήμμα του König (Λήμμα 2.5.5) υπάρχει ένα άπειρο κλαδί $f \in [S] \subseteq [T] = K$. Αφού το $(V_i)_{i \in I}$ είναι κάλυμμα του K υπάρχει $i_0 \in I$ με $f \in V_{i_0}$ και αφού το V_{i_0} είναι ανοικτό υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$\{f(0)\} \times \cdots \times \{f(n)\} \times X \times X \cdots \subseteq V_{i_0}.$$

Θέτουμε $u = (f(0), \ldots, f(n)) \in S$ και έχουμε

$$[T_u] \subseteq \{f(0)\} \times \cdots \times \{f(n)\} \times X \times X \cdots \subseteq V_{i_0},$$

που είναι άτοπο γιατί $u \in S$.

Άρα το S είναι πεπερασμένο σύνολο. Παίρνουμε $n = \max\{|u| \mid u \in S\}$ και $F = \{u \in T \mid |u| = n+1\}$. Τότε το F είναι πεπερασμένο σύνολο (Άσκηση 2.5.23). Το μήκος κάθε $u \in F$ είναι μεγαλύτερο από τα μήκη των στοιχείων του S. Άρα για κάθε $u \in F$ έχουμε $u \notin S$, και αφού $u \in T$ ισχύει

$$\exists i \in I \; [T_u] \subseteq V_i. \tag{2.22}$$

Θεωρούμε το σύνολο J όλων των i όπως πιο πάνω, δηλαδή

$$J = \{i \in I \mid \exists u \in F \; [T_u] \subseteq V_i\},$$

και δείχνουμε ότι η πεπερασμένη υποοικογένεια $\{V_i \mid i \in J\}$ αποτελεί κάλυμμα του K. Πράγματι αν $f \in K = [T]$ τότε $u = (f(0), \ldots, f(n)) \in F$ και προφανώς $f \in [T_u]$. Από την (2.22) υπάρχει $i \in I$ με $[T_u] \subseteq V_i$. Άρα $i \in J$ και $f \in V_i$.

Σημείωση. Η απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης μπορεί να γίνει και με πιο στοιχειώδη τρόπο χωρίς την επίκληση του Λήμματος του König. Τότε όμως θα πρέπει να επαναλάβουμε στην ουσία την απόδειξη αυτού του λήμματος. Αυτό δεν είναι σύμπτωση. Όπως είναι γνωστό, το Λήμμα του König και η αντίστροφη κατεύθυνση της πρότασης που μόλις αποδείξαμε αποτελούν *ισοδύναμες εκφάνσεις της ίδιας μαθηματικής αρχής* (Άσκηση 2.5.28).

□

Πόρισμα 2.5.7. *Ένα σύνολο $K \subseteq \mathcal{N}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν υπάρχει δένδρο T στο $\mathbb{N}$ πεπερασμένης διακλάδωσης με $K = [T]$.*

Απόδειξη. Το συμπέρασμα είναι άμεσο από την Πρόταση 2.5.6 για $X = \mathbb{N}$ και επειδή η τοπολογία του χώρου του Baire είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (Πρόταση 2.3.5). □

Πόρισμα 2.5.8. *Ο χώρος του $\mathcal{N}$ δεν είναι σ-συμπαγής, δηλαδή για κάθε ακολουθία $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από συμπαγή υποσύνολα του $\mathcal{N}$ η ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από συμπαγή υποσύνολα του $\mathcal{N}$ και με εφαρμογή του Πορίσματος 2.5.7 μια ακολουθία $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δένδρων πεπερασμένης διακλάδωσης με $K_n = [T_n]$ για κάθε n. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K_n \neq \varnothing$ για κάθε n.

Αν το T είναι δένδρο πεπερασμένης διακλάδωσης τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα $u \in T$ με $|u| = m$ (Άσκηση 2.5.23). Συνεπώς για κάθε n το σύνολο $\{u \in T_n \mid |u| = n+1\}$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του T_n και άρα και το υποσύνολο των φυσικών αριθμών $A_n = \{u(n) \in \mathbb{N} \mid u \in T_n \;\&\; |u| = n+1\}$ είναι πεπερασμένο. Μάλιστα το A_n είναι μη κενό γιατί $K_n = [T_n] \neq \varnothing$.

Ορίζουμε $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με

$$\alpha(n) = \max A_n + 1$$

και δείχνουμε ότι $\alpha \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Για να το δούμε αυτό θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και $\beta \in K_n = [T_n]$. Τότε το $u = \beta|(n+1)$ είναι κόμβος του T_n μήκους $n+1$ και συνεπώς ο φυσικός αριθμός $u(n) = \beta(n)$ είναι στοιχείο του A_n. Προκύπτει ότι

$$\alpha(n) = \max A_n + 1 > \max A_n \geqslant \beta(n).$$

Ειδικότερα έχουμε $\alpha(n) > \beta(n)$ και άρα $\alpha \neq \beta$ για κάθε $\beta \in K_n$. □

Δένδρα και συνεχείς συναρτήσεις. Οι συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ σωμάτων δένδρων μπορούν να προσεγγιστούν μέσω συναρτήσεων μεταξύ των αντίστοιχων

Ορισμός 2.5.9. Δίνονται δύο δένδρα S και T πάνω σε ένα μη κενό σύνολο X και μια συνάρτηση $\varphi : S \to T$. Η φ ονομάζεται **μονότονη** αν για κάθε $u, v \in S$ με $u \sqsubseteq v$ έχουμε $\varphi(u) \sqsubseteq \varphi(v)$. Θα λέμε ότι η φ είναι **κατάλληλη** (**proper**) αν για κάθε $f \in [S]$ τα μήκη των $\varphi(f|n)$ αποκτούν οσοδήποτε μεγάλο μήκος, δηλαδή για κάθε $M \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $|\varphi(f|n)| \geqslant M$.

Είναι σαφές ότι αν έχουμε μια κατάλληλη μονότονη συνάρτηση $\varphi : S \to T$ τότε για κάθε $f \in [S]$ ισχύει

$$\varphi((f(0))) \sqsubseteq \varphi((f(0), f(1))) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq \varphi((f(0), f(1) \ldots, f(n))) \sqsubseteq \ldots$$

και πως η ένωση όλων αυτών των κλαδιών παράγει ένα άπειρο κλαδί του T. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση

$$\varphi^* : [S] \to [T] : \varphi^*(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(f|n).$$

Με άλλα λόγια η φ^* ικανοποιεί

$$\varphi^*(f)(m) = x \iff \exists n \; (\; |\varphi(f|n)| > m \;\&\; \varphi(f|n)(m) = x \;)$$

για κάθε $f \in [T]$, $m \in \mathbb{N}$, και $x \in X$.

Πρόταση 2.5.10. *Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X με τη διακριτή τοπολογία και δύο δένδρα S και T στο X, με το S κλαδεμένο. Τότε μια συνάρτηση $\Phi : [S] \to [T]$ είναι συνεχής αν και μόνο αν υπάρχει κατάλληλη μονότονη $\varphi : S \to T$ με $\Phi = \varphi^*$.*

Απόδειξη. Στην απόδειξη συμβολίζουμε $V_u = \{g \in X^{\mathbb{N}} \mid u \sqsubseteq g\}$, όπου $u \in X^{<\mathbb{N}}$. Τα V_u, $u \in X^{<\mathbb{N}}$, αποτελούν βάση για τον $X^{\mathbb{N}}$.

Δείχνουμε αρχικά την αντίστροφη κατεύθυνση: θεωρούμε μια κατάλληλη μονότονη $\varphi : S \to T$ και δείχνουμε ότι η $\varphi^* : [S] \to [T]$ είναι συνεχής. Για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ και κάθε $f \in [S]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi^*(f) \in V_u &\iff u \sqsubseteq \varphi^*(f) \\ &\iff \exists n \; u \sqsubseteq \varphi(f|n). \end{aligned}$$

Επομένως $(\varphi^*)^{-1}[V_u] = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cap [S]$, όπου $A_n = \{f \in X^{\mathbb{N}} \mid u \sqsubseteq \varphi(f|n)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f \in A_n$ και $h \in X^{\mathbb{N}}$ με $h|n = f|n$ τότε $h \in A_n$, συνεπώς το A_n είναι ανοικτό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα το $(\varphi^*)^{-1}[V_u]$ είναι ανοικτό σύνολο στο $[S]$ και η φ^* είναι συνεχής συνάρτηση. (Παρατηρήστε ότι δεν χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι το S είναι κλαδεμένο.)

Αντίστροφα θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $\Phi : [S] \to [T]$. Η ιδέα να να ορίσουμε την φ ώστε να έχουμε $\varphi[V_u \cap [S]] \subseteq V_{\varphi(u)}$ για κάθε $u \in S$. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $u \in S$ και $w_1, w_2 \in T$ αν $\Phi[V_u \cap [S]] \subseteq V_{w_1} \cap V_{w_2}$ τότε $w_1 || w_2$. Αυτό συμβαίνει γιατί το S είναι κλαδεμένο και συνεπώς για κάθε $u \in S$ έχουμε $V_u \cap [S] \neq \varnothing$, άρα $V_{w_1} \cap V_{w_2} \neq \varnothing$, το οποίο συμβαίνει μόνο όταν $w_1 || w_2$. Επιπλέον για κάθε $u \in T$ υπάρχει $w \in S$ με $\Phi[V_u \cap [S]] \subseteq V_w$, συγκεκριμένα $w = \Lambda$.

Συνεπώς για κάθε $u \in S$ και κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει η "μεγαλύτερη" ακολουθία $w \in S$ με μήκος $\leqslant N$ και $\Phi[V_u \cap [S]] \subseteq V_w$, δηλαδή η w ικανοποιεί τις τελευταίες δύο ιδιότητες και για κάθε $w' \in S$ που ικανοποιεί τις τελευταίες δύο ιδιότητες ισχύει $w' \sqsubseteq w$. Ορίζουμε

$\varphi : S \to T : \varphi(u) =$ η μεγαλύτερη ακολουθία $w \in S$ με $|w| \leqslant |u|$ και $\Phi[V_u \cap [S]] \subseteq V_w$.

Αν $u_1 \sqsubseteq u_2 \in S$ τότε $|w_1| \leqslant |u_1| \leqslant |u_2|$, επιπλέον $\Phi[V_{u_2} \cap [S]] \subseteq \phi[V_{u_1} \cap [S]] \subseteq V_{\varphi(u_1)}$. Επομένως το $\varphi(u_1) \in T$ είναι ένα w' που ικανοποιεί $|w'| \leqslant |u_2|$ και $\Phi[V_{u_2} \cap [S]] \subseteq V_{w'}$. Από τον ορισμό του $\varphi(u_2)$ έχουμε ότι $\varphi(u_1) \sqsubseteq \varphi(u_2)$.

Για να δείξουμε τις υπόλοιπες ιδιότητες για τη φ θεωρούμε ένα $f \in [S]$ και $m \in \mathbb{N}$. Επειδή η Φ είναι συνεχής στο f υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\Phi[V_{f|n} \cap [S]] \subseteq V_{\Phi(f)|m}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geqslant M$ και άρα $|\Phi(f)|m| = m \leqslant n = |f|n|$. Επομένως από τον ορισμό του $\varphi(f|n)$ ισχύει $\Phi(f)|m \sqsubseteq \varphi(f|n)$. Ειδικότερα η $\varphi(f|n)$ έχει μήκος τουλάχιστον $|\Phi(f)|m| = m$.

Το πιο πάνω δείχνει ότι η φ είναι κατάλληλη και επιπλέον ότι $\varphi^* = \Phi$. Για να δούμε το τελευταίο, παρατηρούμε ότι για κάθε m υπάρχει n όπως πιο πάνω, δηλαδή $n \geqslant m$ και $\Phi(f)|m \sqsubseteq \varphi(f|n)$. Επειδή $\varphi(f|n) \sqsubseteq \varphi^*(f)$ προκύπτει ότι $\Phi(f)|m \sqsubseteq \varphi^*(f)$ για κάθε m και συνεπώς $\Phi(f) = \varphi^*(f)$.

□

Δένδρα στο $\mathbb{N}$. Στο εξής, και εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, θα ασχολούμαστε με δένδρα στους φυσικούς αριθμούς. Πολλά από τα επόμενα αποτελέσματα και έννοιες πάνω σε δένδρα μπορούν να διατυπωθούν σε γενικότερο πλαίσιο. Παρ' όλα αυτά η περίπτωση $X = \mathbb{N}$ είναι επαρκής για τους σκοπούς μας.

Ορισμός 2.5.11 (Ο χώρος των δένδρων Tr)**.** Θεωρούμε το σύνολο Tr όλων των δένδρων στο $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{Tr} = \{T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid \text{το } T \text{ είναι δένδρο στο } \mathbb{N}\}.$$

Θεωρούμε επίσης μια απαρίθμηση του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, για παράδειγμα τη φυσική $(\mathrm{u}_s)_{s\in\mathbb{N}}$, που έχουμε σταθεροποιήσει στο 2.2.

Τότε σε κάθε δένδρο T στο $\mathbb{N}$ αντιστοιχεί το $\alpha_T \in 2^{\mathbb{N}}$ με

$$\alpha_T(s) = 1 \iff \mathrm{u}_s \in T.$$

Είναι σαφές ότι η συνάρτηση

$$F : \mathrm{Tr} \to 2^{\mathbb{N}} : F(T) = \alpha_T$$

είναι μονομορφισμός.

Θεωρούμε το Tr με την *τοπολογία που λαμβάνει* από την F, δηλαδή ένα $V \subseteq \mathrm{Tr}$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν υπάρχει ανοικτό $W \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ με $V = F^{-1}[W]$. Αυτή είναι η ελάχιστη τοπολογία στο Tr ως προς την οποία η F είναι συνεχής.

Μια συμβατή μετρική στον Tr είναι η

$$d(T, S) = d_{\mathcal{N}}(F(T), F(S)) = d_{\mathcal{N}}(\alpha_T, \alpha_S).$$

Η απόδειξη του τελευταίου γίνεται με τα ίδια τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη της Πρότασης proposition being Polish is a topological property.

Ο χαρακτηρισμός της σύγκλισης στον Tr δίνεται στην Άσκηση 2.5.25 .

Το σύνολο Tr με την προηγούμενη τοπολογία είναι ο **χώρος των δένδρων** στο $\mathbb{N}$.

Πρόταση 2.5.12. *Ο χώρος των δένδρων* Tr *είναι συμπαγής Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $F = (T \in \mathrm{Tr} \mapsto \alpha_T \in 2^{\mathbb{N}})$ και δείχνουμε ότι το σύνολο $F[\mathrm{Tr}]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. Επειδή ο $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγής προκύπτει ότι το $F[\mathrm{Tr}]$ είναι συμπαγές σύνολο, ισοδύναμα το $F[\mathrm{Tr}]$ με τη σχετική τοπολογία είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος. Ο χώρος Tr είναι τοπολογικά ισομορφοφικός με τον Tr μέσω της F, επομένως και ο Tr είναι συμπαγής.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το συμπλήρωμα του $F[\mathrm{Tr}]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. Έστω $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\alpha \notin \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$ και $s_0 \in \mathbb{N}$ με $\mathrm{u}_{s_0} = \Lambda$. Αν $\alpha(s_0) = 0$ τότε για κάθε $\beta \in T$ με $\beta(s_0) = \alpha(s_0)$ έχουμε $\beta \notin \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$. (Αλλιώς $\beta = \alpha_T$ και η κενή ακολουθία δεν θα ανήκε στο T.)

Επομένως θεωρούμε ότι $\alpha(s_0) = 1$. Αν για κάθε s με $\alpha(s) = 1$ και κάθε t με $\mathrm{u}_t \sqsubseteq \mathrm{u}_s$ ισχύει $\alpha(t) = 1$, τότε $\alpha = \alpha_T$ όπου το T είναι το δένδρο που ορίζεται ως εξής:

$$T = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid \exists s\ (u = \mathrm{u}_s \ \&\ \alpha(s) = 1)\}.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε πως $\alpha \notin \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$. Επομένως υπάρχουν s, t με $\alpha(s) = 1$, $\mathrm{u}_t \sqsubseteq \mathrm{u}_s$ και $\alpha(t) = 0$. Τότε για κάθε $\beta \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\beta(i) = \alpha(i)$ για κάθε $i \leqslant \max\{t, s\}$ έχουμε $\beta \notin \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$.

Σε κάθε περίπτωση το συμπλήρωμα $2^{\mathbb{N}} \setminus \{\alpha_T \mid T \in \mathrm{Tr}\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. □

Ορισμός 2.5.13. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\mathrm{WF} = \{T \in \mathrm{Tr} \mid [T] = \varnothing\} \tag{2.23}$$

$$\mathrm{IF} = \{T \in \mathrm{Tr} \mid [T] \neq \varnothing\} \tag{2.24}$$

των θεμελιωμένων και μη θεμελιωμένων αντίστοιχα δένδρων στο $\mathbb{N}$.

Το επόμενο αποτέλεσμα μπορεί να θεωρηθεί ως η *παραμετρική εκδοχή* του Πορίσματος 2.5.3 και αποτελεί μία εξαιρετικά χρήσιμη εφαρμογή στη θεωρία των αναλυτικών και συναναλυτικών συνόλων που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Λήμμα 2.5.14 (Το Βασικό Λήμμα Αναπαράστασης Κλειστών Συνόλων)**.**
Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ ένα $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με τη διακριτή μετρική. Τότε το P είναι κλειστό ακριβώς όταν υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες το $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ να είναι δένδρο στο $\mathbb{N}$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και

$$P = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid \alpha \in [T(x)]\}.$$

Απόδειξη. Για τη μία κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το P είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{X}$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{c}P$ το συμπλήρωμα του P στον $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Τότε

$$\mathrm{c}P = \bigcup\nolimits_{n\in I, v\in J} V_n \times \mathcal{N}_v \tag{2.25}$$

όπου $I \subseteq \mathbb{N}$ και $J \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Lambda \notin J$. Σε αντίθετη περίπτωση αντικαθιστούμε κάθε $V_n \times \mathcal{N}_\Lambda \subseteq \mathrm{c}P$, $n \in I$, με την ένωση $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_n \times \mathcal{N}_{(i)}$. Επειδή

$$V_n \times \mathcal{N}_\Lambda = V_n \times \mathcal{N} = V_n \times \bigcup\nolimits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_{(i)} = \bigcup\nolimits_{i\in\mathbb{N}}(V_n \times \mathcal{N}_{(i)}),$$

η (2.25) παραμένει αληθής αν αντικαταστήσουμε το J με το

$$J' = (J \setminus \{\Lambda\}) \cup \{(i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $V_0 = \varnothing$. Αλλιώς αντικαθιστούμε την ακολουθία $(V_0, V_1, \dots, V_n, \dots)$ με την $(\varnothing, V_0, V_1, \dots, V_n, \dots)$. Η (2.25) εξακολουθεί να παραμένει αληθής.

Ορίζουμε

$$(x, u) \in T \iff \forall v \in J \; \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u| \; (x \notin V_n \;\&\; v \not\sqsubseteq u). \tag{2.26}$$

Επειδή κάθε V_n είναι ανοικτό σύνολο και το $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή μετρική είναι εύκολο να δει κανείς ότι το T είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ (δείτε την Άσκηση 2.5.26).

Θεωρούμε $x \in \mathcal{X}$ και δείχνουμε αρχικά ότι το $T(x)$ είναι δένδρο. Παρατηρούμε ότι αν $n \leqslant |\Lambda|$ τότε $n = 0$ και άρα $x \notin V_0 = \varnothing$. Επιπλέον $v \not\sqsubseteq \Lambda$ για κάθε $v \in J$ επειδή $\Lambda \notin J$. Από την (2.26) έχουμε ότι $\Lambda \in T(x)$ και επομένως $T(x) \neq \varnothing$. Αν $u' \sqsubseteq u$ και $u \in T(x)$ τότε για κάθε $v \in J$ και κάθε $n \in I$ με $n \leqslant |u|$ ισχύει $x \notin V_n$ και $v \not\sqsubseteq u$, απ' όπου προκύπτει ότι για κάθε $v \in J$ και κάθε $n \in I$ με $n \leqslant |u'| \leqslant |u|$ ισχύει $x \notin V_n$ και $v \not\sqsubseteq u'$. Συνεπώς $u' \in T(x)$ και το $T(x)$ είναι δένδρο.

Τώρα δείχνουμε τη ζητούμενη ισότητα για το P. Αν $(x, \alpha) \notin P$ τότε υπάρχει $n \in I$ με $x \in V_n$. Προκύπτει από την (2.26) ότι κάθε $u \in T(x)$ πρέπει να έχει μήκος μικρότερο του n και συνεπώς $[T(x)] = \varnothing$. Ειδικότερα $\alpha \notin [T(x)]$.

Αν $(x, \alpha) \in P$ τότε για κάθε $n \in I$ και κάθε $v \in J$ έχουμε $x \notin V_n$ και $\alpha \notin \mathcal{N}_v$, δηλαδή $v \not\sqsubseteq \alpha$. Άρα

$$\forall t \in \mathbb{N} \; \forall v \in J \; (v \not\sqsubseteq \alpha|t).$$

Αφού $x \notin \bigcup_{n \in I} V_n$ ισχύει

$$\forall t\ \forall v \in J\ \forall n \in I\ (x \notin V_n\ \&\ v \not\sqsubseteq \alpha|t).$$

Ειδικότερα το ζεύγος $(x, \alpha|t)$ ικανοποιεί το δεξιό σκέλος της (2.26) και άρα $\alpha|t \in T(x)$ για κάθε $t \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\alpha \in [T(x)]$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $P = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid \alpha \in [T(x)]\}$. Τότε

$$\begin{aligned}(x, \alpha) \in P &\iff \forall t\ \alpha|t \in T(x)\\ &\iff \forall t\ (x, \alpha|t) \in T.\end{aligned}$$

Αφού το T είναι κλειστό και η συνάρτηση $f_t = (\alpha \mapsto \alpha|t)$ είναι συνεχής (Άσκηση 2.3.18), το σύνολο P είναι κλειστό. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 2.5.15. Δώστε τα παραδείγματα δένδρων T^0, T^1, T^2 και T^3 στο $\mathbb{N}$ με τις εξής ιδιότητες.

(i) Το T^0 είναι πεπερασμένο σύνολο και έχει τουλάχιστον μία ακολουθία μήκους 3.

(ii) Το T^1 είναι άπειρο σύνολο και κάθε $u \in T^1$ έχει μήκος το πολύ 1.

(iii) Κάθε $u \in T^2$ έχει ακριβώς τρεις άμεσες προεκτάσεις μέσα στο T^2.

(iv) Το T^3 είναι πεπερασμένης διακλάδωσης και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $u \in T^3$ που έχει ακριβώς n άμεσες προεκτάσεις μέσα στο T^3.

Επίσης επιλέξτε $u \in T^3$ και $w \notin T^3$ με $|u| = |w| = 4$ και βρείτε τα υποδένδρα T^3_u, T^3_w.

Άσκηση 2.5.16. Για κάθε T που είναι ένα από τα δένδρα T^0, T^1, T^2 και T^3 που δώσατε στην Άσκηση 2.5.15 βρείτε το σώμα $[T]$.

Άσκηση 2.5.17. Για κάθε μη κενά σύνολα X και $J \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ το

$$T(J) = \{u \in X^{<\mathbb{N}} \mid \exists w \in J\ u \sqsubseteq w\}$$

είναι το ελάχιστο δένδρο στο X που περιέχει το J. Δηλαδή το $T(J)$ είναι δένδρο στο X, $J \subseteq T(J)$ και για κάθε δένδρο S στο X με $J \subseteq S$ έχουμε $T(J) \subseteq S$.

Το $T(J)$ λέγεται **το δένδρο που παράγεται** από το J.

Άσκηση 2.5.18. Για κάθε δένδρο T σε ένα σύνολο $X \neq \varnothing$ και για κάθε $u \in X^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο που ορίστηκε στην (2.17)

$$T_u = \{w \in T \mid u||w\}$$

είναι δένδρο στο X. Επιπλέον ισχύουν οι ισότητες (2.18) και (2.19):

$$\begin{aligned} T_u &= \bigcup_{u*(x) \in T} T_{u*(x)} \quad \text{αν το } u \text{ δεν είναι τερματικός κόμβος του } T,\\ [T_u] &= \bigcup_{u*(x) \in T} [T_{u*(x)}].\end{aligned}$$

Άσκηση 2.5.19. Για κάθε δένδρο T σε ένα μη κενό σύνολο X, το οποίο έχει μη κενό σώμα, υπάρχει ένα κλαδεμένο δένδρο $S \subseteq T$ (δηλαδή το S δεν έχει τερματικούς κόμβους) με $[S_u] = [T_u]$ για κάθε $u \in T$. Ειδικότερα έχουμε $[S] = [T]$.

Άσκηση 2.5.20. Για κάθε ένα από τα ακόλουθα κλειστά σύνολα της Άσκησης 2.3.16 βρείτε δένδρο T στο $\mathbb{N}$ του οποίου το σώμα είναι το αντίστοιχο κλειστό σύνολο,

$$\begin{aligned} &A = \{(n) * (0,0,0,\dots) \mid n \in \mathbb{N}\},\\ &B = \{(0)^n * (n,1,1,1,\dots) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0,0,\dots)\}\\ &C = \{(1)^n * (2,3,4,5,\dots) \mid n \in \mathbb{N}\} \ \cup \{(1,1,\dots,1,\dots)\}\\ &\mathcal{N}_u,\ u \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Είναι χρήσιμο να εξηγήσουμε γιατί η παραμετρικοποιημένη εκδοχή ενός αποτελέσματος είναι πιο ισχυρή από την απλή εκδοχή. Αυτός είναι ο στόχος της επόμενης άσκησης.

Άσκηση 2.5.21. Συμπεράνετε από το Λήμμα 2.5.14 τον χαρακτηρισμό των κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$ ως τα σύνολα $[T]$ όπου το T είναι δένδρο στο $\mathbb{N}$ (Πόρισμα 2.5.3).

Άσκηση 2.5.22. Συμπεράνετε από το Πόρισμα 2.5.7 ότι το σύνολο $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{N}$ (Πρόταση 2.3.11).

Άσκηση 2.5.23. Για κάθε δένδρο T πεπερασμένης διακλάδωσης και κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $F_n = \{u \in T \mid |u| = n\}$ είναι πεπερασμένο.

Άσκηση 2.5.24 (Δείτε [**Kec95**] - 2.8)**.** Για κάθε μη κενά κλειστά σύνολα $F \subseteq H \subseteq \mathcal{N}$ υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\Phi : H \to F$ με $\Phi(\alpha) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in F$.

Άσκηση 2.5.25. Για κάθε πεπερασμένα σύνολα $I, J \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε

$$B(I,J) = \{T \in \mathrm{Tr} \mid \forall u \in I\ \forall\, w \in J\ (u \in T\ \&\ w \notin T)\}.$$

Τότε η οικογένεια όλων των συνόλων $B(I,J)$ αποτελεί βάση για την τοπολογία του Tr.

Συμπεράνετε ότι για κάθε ακολουθία δένδρων $(T_l)_{l\in\mathbb{N}}$ στον Tr και κάθε $T \in$ Tr έχουμε

$$T_l \xrightarrow{l\to\infty} T \iff \forall u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\ \exists l_0\ \forall l \geqslant l_0\ [\, u \in T_l \longleftrightarrow u \in T\,].$$

Άσκηση 2.5.26. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ και $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί την ισοδυναμία (2.26),

$$(x,u) \in T \iff \forall v \in J\ \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u|\ (x \notin V_n\ \&\ v \not\sqsubseteq u).$$

Τότε το T είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και η συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to$ Tr

$$f(x) = T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x,u) \in T\}$$

αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε F_σ σύνολα.

Επιπλέον αν τα V_n είναι κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Το **Αξίωμα Εξαρτημένης Επιλογής** (DC) είναι η πρόταση: για κάθε μη κενό σύνολο X και κάθε $Q \subseteq X \times X$ με την ιδιότητα $\forall x \in X\ \exists y \in X\ (x,y) \in Q$ υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ με $(f(n), f(n+1)) \in Q$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το **Αξίωμα Απαριθμητής Επιλογής** ($\mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$) είναι η πρόταση: για κάθε μη κενό σύνολο X και κάθε $P \subseteq \mathbb{N} \times X$ με την ιδιότητα $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in X\ (n,x) \in P$ υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ με $(n, f(n)) \in P$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Όπως είναι γνωστό ισχύει η συνεπαγωγή DC $\Rightarrow \mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$. Το $\mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$ αποτελεί μια από τις πιο θεμελιώδεις μορφές επιλογής στα κλασσικά Μαθηματικά καθώς μας επιτρέπει να λαμβάνουμε ακολουθίες με συγκεκριμένες ιδιότητες.

Άσκηση 2.5.27. Εξηγήστε λεπτομερώς την εφαρμογή του Αξιώματος Εξαρτημένης Επιλογής DC στην κατασκευή του άπειρου κλαδιού στην απόδειξη του Λήμματος του König (Λήμμα 2.5.5).

Άσκηση 2.5.28. Δεδομένου του Αξιώματος Απαριθμητής Επιλογής $AC_{\mathbb{N}}$ δείξτε ότι το Λήμμα του König (Λήμμα 2.5.5) είναι ισοδύναμο με την εξής πρόταση: για κάθε δένδρο T σε ένα μη κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική, αν το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης τότε το $[T]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. (Αυτή είναι η μία κατεύθυνση της Πρότασης 2.5.6.)

2.6. Μερικές Καθολικές Ιδιότητες

Είδαμε ότι κάθε Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ είναι συνεχής εικόνα του $\mathcal{N}$ και κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ περιέχει έναν χώρο που είναι τοπολογικά ισομορφικός με το $2^{\mathbb{N}}$. Αναφερόμαστε σε αυτές τις ιδιότητες ως *καθολικές* για τον χώρο $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ αντίστοιχα ακριβώς γιατί αναφέρονται είτε σε όλους τους Πολωνικούς χώρους είτε σε μια μεγάλη υποκλάση αυτών (στην προκειμένη περίπτωση στην κλάση των υπεραριθμήσιμων Πολωνικών χώρων.) Εδώ θα δείξουμε μερικές ακόμα καθολικές ιδιότητες για τους χώρους του Baire, του Cantor και για τους χώρους $[0,1]^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ορισμός 2.6.1. Συμβολίζουμε το κλειστό διάστημα $[0,1]$ με $\mathbb{I}$. Ο **κύβος του Hilbert** είναι το σύνολο $\mathbb{H} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο. Σύμφωνα με όσα έχουμε πει ο $\mathbb{H}$ είναι μετρικοποιήσιμος, διαχωρίσιμος και συμπαγής - επομένως και πλήρης ως προς οποιαδήποτε μετρική η οποία παράγει την τοπολογία του. Προκύπτει ότι ο $\mathbb{H}$ είναι συμπαγής Πολωνικός χώρος.

Μια βάση για την τοπολογία του αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής

$$((a_0, b_0) \cap \mathbb{I}) \times ((a_0, b_0) \cap \mathbb{I}) \times \cdots \times ((a_n, b_n) \cap \mathbb{I}) \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} \times \ldots$$

όπου $a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Η σύγκλιση στον $\mathbb{H}$ είναι η κατά σημείο σύγκλιση: για κάθε ακολουθία $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στον $\mathbb{H}$ και κάθε $x \in \mathbb{H}$ έχουμε $x_i \xrightarrow{i \to \infty} x$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x_i(n) \xrightarrow{i \to \infty} x(n)$ στο $\mathbb{I} = [0,1]$.

Θεώρημα 2.6.2 (Καθολική Ιδιότητα του κύβου του Hilbert)**.** *Κάθε Πολωνικός χώρος είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα G_δ υποσύνολο του κύβου του Hilbert $\mathbb{H}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και μια κατάλληλη μετρική d στον $\mathcal{X}$. Από την Άσκηση 2.1.10 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d \leqslant 1$. Παίρνουμε επίσης ένα $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ που είναι πυκνό στον $\mathcal{X}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{H} : f(x) = (d(x, x_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Δείχνουμε ότι η f είναι συνεχής μονορφισμός και πως η αντίστροφη $f^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$ είναι συνεχής.

Θεωρούμε $x \neq y$ στον $\mathcal{X}$ και θέτουμε $r = 2^{-1} \cdot d(x, y) > 0$. Από την πυκνότητα του D υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $d(x, x_n) < r$. Προκύπτει τότε ότι $d(y, x_n) > r$, ειδικότερα $d(x, x_n) \neq d(y, x_n)$ και άρα $f(x) \neq f(y)$. Άρα η f είναι ένα-προς-ένα.

Για τη συνέχεια της f, θεωρούμε μια ακολουθία $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με $z_i \to z \in \mathcal{X}$ και δείχνουμε ότι $f(z_i) \to f(z)$, ισοδύναμα ότι $d(z_i, x_n) \xrightarrow{i \to \infty} d(z, x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε $n \in \mathbb{N}$ και έχουμε

$$|d(z_i, x_n) - d(z, x_n)| \leqslant d(z_i, z) \to 0.$$

Άρα η f είναι συνεχής.

Για την αντίστροφη συνάρτηση θεωρούμε ότι $f(z_i) \to f(z)$ για κάποια $z_i, z \in \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $z_i \to z$. Παίρνουμε $r > 0$ και από την πυκνότητα του D παίρνουμε ένα n με $x_n \in B(z, r/2)$. Εφόσον $f(z_i) \to f(z)$ έχουμε ειδικότερα ότι

$d(z_i, x_n) \xrightarrow{i\to\infty} d(z, x_n)$. Επειδή $d(z, x_n) < r/2$ υπάρχει i_0 έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ ισχύει $d(z_i, x_n) < r/2$. Έχουμε λοιπόν για κάθε $i \geqslant i_0$ ότι

$$d(z_i, z) \leqslant d(z_i, x_n) + d(x_n, z) < r/2 + r/2 = r$$

Επομένως $z_i \to z$.

Καταλήγουμε ότι η f είναι τοπολογικός ισομορφισμός ανάμεσα στον $\mathcal{X}$ και στον υπόχωρο $f[\mathcal{X}]$ του $\mathbb{H}$. Από την Πρόταση 2.1.2 ο $f[\mathcal{X}]$ είναι Πολωνικός χώρος και άρα από Θεώρημα 2.1.8 το σύνολο $f[\mathcal{X}]$ είναι G_δ. ▫

Ορισμός 2.6.3. Δίνονται δύο τοπολογικοί χώροι X και Y με τον Y συμπαγή. Ο Y ονομάζεται **συμπαγοποίηση** του X αν υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $f : X \rightarrowtail Y$ με $f^{-1} : f[X] \to Y$ επίσης συνεχής και $\overline{f[X]} = Y$. Δηλαδή ο X είναι τοπολογικά ισομορφικός με έναν πυκνό υπόχωρο του Y.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να συμπαγοποιήσει κανείς έναν τοπολογικό χώρο, μας ενδιαφέρει όμως η συμπαγοποίηση να σέβεται κάποιες καλές δομικές ιδιότητες, όπως για παράδειγμα την ιδιότητα του να είναι ο δοσμένος τοπολογικός χώρος Πολωνικός. Μια τέτοια συμπαγοποίηση δίνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος 2.6.2.

Πόρισμα 2.6.4. *Κάθε Πολωνικός χώρος έχει μια συμπαγοποίηση που είναι επίσης Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και έναν τοπολογικό ισομορφισμό $f : \mathcal{X} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow G$ όπου το G είναι G_δ υποσύνολο του $\mathbb{H}$ (Θεώρημα 2.6.2). Παίρνουμε $\mathcal{Y} = \overline{G}$. Το $\mathcal{Y}$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς χώρου $\mathbb{H}$, άρα ο $\mathcal{Y}$ είναι συμπαγής χώρος. Επιπλέον είναι Πολωνικός ως κλειστό υποσύνολο Πολωνικού χώρου. ▫

Ένας Πολωνικός χώρος δεν είναι απαραίτητα τοπολογικά ισομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του κύβου του Hilbert γιατί αλλιώς κάθε Πολωνικός χώρος θα ήταν συμπαγής. Θα δούμε όμως ότι αυτό είναι σωστό αν αντικαταστήσουμε τον $\mathbb{H} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ με τον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ως συνήθως θεωρούμε το τελευταίο σύνολο με την τοπολογία γινόμενο.

Θεώρημα 2.6.5 (Καθολική Ιδιότητα του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)**.** *Κάθε Πολωνικός χώρος είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.6.2 αρκεί να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για τα G_δ υποσύνολα του $\mathbb{H}$.

Θεωρούμε λοιπόν $G \subseteq \mathbb{H}$ που είναι G_δ και γράφουμε $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ όπου κάθε $U_n \subseteq \mathbb{H}$ είναι ανοικτό. Μπορούμε να υποθέσουμε πως $U_n \neq \mathbb{H}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. [Για να το δούμε αυτό παίρνουμε αρχικά την περίπτωση όπου $U_n = \mathbb{H}$ για κάθε n. Τότε $G = \mathbb{H}$ και το συμπέρασμα είναι προφανές. Στην περίπτωση όπου υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ με $U_n \neq \mathbb{H}$ γράφουμε $\{U_n \mid U_n \neq \mathbb{H}\} = \{U'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (ενδεχομένως $U'_n = U'_m$ για $n \neq m$). Τότε $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U'_n$ και $U'_n \neq \mathbb{H}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έπειτα παίρνουμε τα U'_n στη θέση των U_n.]

Παίρνουμε μια κατάλληλη μετρική d στον $\mathbb{H}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_{2n} : G \to \mathbb{R} : f_{2n}(\overline{x}) = x_n, \quad \text{όπου } \overline{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}},$$

$$f_{2n+1} : G \to \mathbb{R} : f_{2n+1}(\overline{x}) = \big(d(\overline{x}, F_n)\big)^{-1} \quad \text{όπου } F_n = \mathbb{H} \setminus U_n \neq \varnothing.$$

(Παρατηρούμε ότι για κάθε $\overline{x} \in G$ και κάθε n έχουμε $\overline{x} \in U_n$, επομένως $d(\overline{x}, F_n) > 0$.)

Έπειτα ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f : G \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \overline{x} \mapsto (f_m(\overline{x}))_{m\in\mathbb{N}}.$$

Δείχνουμε αρχικά ότι η f είναι μονορφισμός. Πράγματι αν έχουμε $\overline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \overline{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}$ και $x_n \neq y_n$ για κάποιο n, τότε $f_{2n}(\overline{x}) = x_n \neq y_n = f_{2n}(\overline{y})$. Επομένως $f(\overline{x}) \neq f(\overline{y})$.

Για τη συνέχεια της f θεωρούμε $\overline{x}^i \to \overline{x}$, όπου $\overline{x}^i = (x^i_n)_{n\in\mathbb{N}}, \overline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}$, $i \in \mathbb{N}$. Δείχνουμε ότι $f(\overline{x}^i) \to f(\overline{x})$, ισοδύναμα ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_m(\overline{x}^i) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} f_m(\overline{x})$.

Παίρνουμε $m = 2n$, τότε

$$f_m(\overline{x}^i) = x^i_n \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} x_n \quad \text{επειδή } \overline{x}^i \to \overline{x}.$$

Για $m = 2n+1$, χρησιμοποιούμε ότι η συνάρτηση της απόστασης από ένα (μη κενό) σύνολο είναι συνεχής. Επομένως $d(\overline{x}^i, F_n) \to d(\overline{x}, F_n)$, και εφόσον $\overline{x}^i, \overline{x} \in G \subseteq U_n = \mathbb{H} \setminus F_n$ έχουμε ότι οι προηγούμενοι αριθμοί είναι μη μηδενικοί. Άρα $d(\overline{x}^i, F_n)^{-1} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} d(\overline{x}, F_n)^{-1}$, δηλαδή $f_{2n+1}(\overline{x}^i) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} f_{2n+1}(\overline{x})$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το $f[G]$ είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Θεωρούμε λοιπόν $f(\overline{x}^i) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \overline{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, όπου $\overline{x}^i \in G$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα η ακολουθία $(f_{2n}(\overline{x}^i))_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην $2n$-συντεταγμένη του $\overline{y}$ για κάθε n. Γράφουμε $\overline{x}^i = (x^i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για κάθε i και $\overline{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και έχουμε από το προηγούμενο ότι $x^i_n \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} y_{2n}$ για κάθε n.

Οπότε ορίζουμε $\overline{x} = (y_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}$ έτσι που $\overline{x}^i \to \overline{x}$. Δείχνουμε ότι $\overline{x} \in G$ καθώς και ότι $y = f(\overline{x})$. Αν είχαμε $\overline{x} \notin G$ τότε για κάποιο n θα ίσχυε $x \notin U_n$. Οπότε $d(\overline{x}, F_n) = 0$ και αφού $d(\overline{x}^i, F_n) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} d(\overline{x}, F_n)$ θα είχαμε $d(\overline{x}^i, F_n)^{-1} \to \infty$, το οποίο είναι άτοπο γιατί $d(\overline{x}^i, F_n)^{-1} = f_{2n+1}(\overline{x}^i) \to y_{2n+1} \in \mathbb{R}$. Άρα $\overline{x} \in G$.

Επιπλέον ισχύει $d(\overline{x}^i, F_n)^{-1} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} d(\overline{x}, F_n)^{-1}$ και άρα $y_{2n+1} = d(\overline{x}, F_n)^{-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$f_{2n}(\overline{x}) = x_n = y_{2n} \quad \text{και} \quad f_{2n+1}(\overline{x}) = d(\overline{x}, F_n)^{-1} = y_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή ισχύει $\overline{y} = f(\overline{x})$. Αυτό δείχνει ότι το $f[G]$ είναι κλειστό σύνολο.

Τέλος για τη συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης υποθέτουμε ότι $f(\overline{x}^i) \to f(\overline{x})$ όπου $\overline{x}^i, \overline{x} \in G$, $i \in \mathbb{N}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\overline{x}^i \to x$. Αυτό όμως είναι σαφές γιατί $\overline{x}^i = (f_{2n}(\overline{x}^i))_{n\in\mathbb{N}}$ για κάθε i, $\overline{x} = (f_{2n}(\overline{x}))_{n\in\mathbb{N}}$, και $f_{2n}(\overline{x}^i) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} f_{2n}(\overline{x})$ για κάθε n. ▫

Στη συνέχεια δίνουμε μια ακόμα καθολική ιδιότητα για τον χώρο του Cantor.

Θεώρημα 2.6.6 (Καθολική Ιδιότητα του $2^{\mathbb{N}}$ για τους συμπαγείς Πολωνικούς χώρους). *Κάθε συμπαγής Πολωνικός χώρος είναι συνεχής εικόνα του χώρου του Cantor* $2^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν συμπαγή Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Από την Άσκηση 2.6.12 μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{X}$ είναι κλειστό υποσύνολο του κύβου του Hilbert. Θα δείξουμε τα εξής:

α) Το κλειστό διάστημα $[0, 1] = \mathbb{I}$ είναι συνεχής εικόνα του $2^{\mathbb{N}}$.

β) Ο κύβος του Hilbert $\mathbb{H} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής εικόνα του $2^{\mathbb{N}}$.

Υποθέτουμε προς στιγμή ότι έχουμε δείξει τα α) και β) και θεωρούμε έναν συνεχή επιμορφισμό $\pi : 2^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow \mathbb{H}$. Η αντίστροφη εικόνα $F = \pi^{-1}[\mathcal{X}]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. Εφαρμόζουμε την Άσκηση 2.5.24 στα κλειστά υποσύνολα F και $2^{\mathbb{N}}$ του $\mathcal{N}$ και βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση $f : 2^{\mathbb{N}} \to F$ με $f(\alpha) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in F$. Τότε η σύνθεση

$$h : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{H} : h(\alpha) = (\pi \circ f)(\alpha)$$

είναι συνεχής συνάρτηση και παίρνει τιμές στον $\mathcal{X}$. Πράγματι αν $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ τότε $f(\alpha) \in f[2^{\mathbb{N}}] \subseteq F = \pi^{-1}[\mathcal{X}]$ και $h(\alpha) = \pi(f(\alpha)) \in \mathcal{X}$. Έχουμε δηλαδή $h[2^{\mathbb{N}}] \subseteq \mathcal{X}$. Μάλιστα ισχύει $h[2^{\mathbb{N}}] = \mathcal{X}$. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{H}$. Επειδή η π είναι επιμορφισμός υπάρχει $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\pi(\alpha) = x$, άρα $\alpha \in \pi^{-1}[\mathcal{X}] = F$ και $h(\alpha) = \pi(f(\alpha)) = \pi(\alpha) = x$. Επομένως η h είναι συνεχής επιμορφισμός από τον $2^{\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{X}$. Οπότε μένει να δείξουμε τα α) και β) πιο πάνω.

Η ιδέα για το α) είναι να πάρουμε τα κλειστά διαστήματα $I_\Lambda = [0,1]$, $I_{(0)} = [0,1/2]$, $I_{(1)} = [1/2,1]$, $I_{(0,0)} = [0,1/4]$, $I_{(0,1)} = [1/4,2/4]$,…και με τη βοήθεια αυτών να ορίσουμε έναν συνεχή επιμορφισμό από τον $2^{\mathbb{N}}$ στο $[0,1]$ όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.12.

Συγκεκριμένα ορίζουμε κλειστά υποδιαστήματα I_u, $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ του $[0,1]$ με αναδρομή στο μήκος $|u|$ του u ως εξής: $I_\Lambda = [0,1]$ και υποθέτοντας ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ορίσει ένα κλειστό διάστημα $I_u = [l(u), r(u)]$ για κάθε u με $|u| = n$ ορίζουμε

$$I_{u*(0)} = [l(u), 2^{-1} \cdot (l(u) + r(u))], \qquad I_{u*(1)} = [2^{-1} \cdot (l(u) + r(u)), r(u)].$$

Τότε είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι κάθε I_u είναι ένα κλειστό διάστημα μήκους $2^{-|u|}$, $I_u = I_{u*(0)} \cup I_{u*(1)}$ και $I_w \subseteq I_u$ όταν $u \sqsubseteq w$. Επομένως για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{\alpha|n}$ είναι μονοσύνολο. Ορίζουμε

$$\tau : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1] : \{\tau(\alpha)\} = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} I_{\alpha|n}.$$

Η τ είναι συνεχής όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.12. (Σε αντίθεση με την τελευταία απόδειξη τα $I_{u*(0)}$, $I_{u*(1)}$ δεν είναι ξένα και επομένως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τ είναι μονομορφισμός. Για την ακρίβεια *δεν είναι* μονομορφισμός, για παράδειγμα $\tau(0,1,1,\dots,1,\dots) = \tau(1,0,0,\dots,0,\dots) = 1/2$.)

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $I_u = I_{u*(0)} \cup I_{u*(1)}$ για να δείξουμε ότι η τ είναι επιμορφισμός. Παίρνουμε $x \in [0,1]$, εφόσον $[0,1] = I_\Lambda = I_{(0)} \cup I_{(1)}$ υπάρχει $i_0 \in \{0,1\}$ με $x \in I_{(i_0)}$, επιλέγουμε το ελάχιστο τέτοιο i_0. Έπειτα $x \in I_{(i_0)} = I_{(i_0,0)} \cup I_{(i_0,1)}$ άρα υπάρχει $i_1 \in \{0,1\}$ με $x \in I_{(i_0,i_1)}$, επιλέγουμε το ελάχιστο τέτοιο i_1. Συνεχίζουμε επαγωγικά και βρίσκουμε $\alpha = (i_0, i_1, \dots, i_n, \dots)$ με $x \in I_{\alpha|n}$ για κάθε n. Προκύπτει ότι $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{\alpha|n} = \{\tau(\alpha)\}$, δηλαδή $\tau(\alpha) = x$. Άρα η τ είναι επιμορφισμός.

Για να δείξουμε το β) θεωρούμε την προηγούμενη $\tau : 2^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow [0,1]$ και ορίζουμε

$$\tilde{\tau} : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}} : \tilde{\tau}((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\tau(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Τότε η $\tilde{\tau}$ είναι συνεχής επιμομορφισμός από τον $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ στον $[0,1]^{\mathbb{N}} = \mathbb{H}$. Το συμπέρασμα του β) προκύπτει από το ότι ο $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $2^{\mathbb{N}}$ (Άσκηση 2.6.13). □

Στη συνέχεια περνάμε σε μια ειδική κατηγορία Πολωνικών χώρων.

Ορισμός 2.6.7. Ένα υποσύνολο V ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται **κλειστό-ανοικτό** (clopen) αν είναι κλειστό και ανοικτό στον X. Ένας τοπολογικός χώρος X είναι **μηδενοδιάστατος** αν έχει μια βάση για την τοπολογία του που αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Οι μηδενοδιάστατοι Πολωνικοί χώροι έχουν μια *αριθμήσιμη* βάση από κλειστά-ανοικτά σύνολα (Πρόταση 2.6.9).

Οι $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ είναι μηδενοδιάστατοι Πολωνικοί χώροι γιατί οι γνωστές τους βάσεις $\{\mathcal{N}_u \mid u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ και $\{\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}} \mid u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}\}$ αποτελούνται από κλειστά-ανοικτά σύνολα. Μάλιστα κάθε κλειστό υποσύνολο F του $\mathcal{N}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε τα σύνολα $\mathcal{N}_u \cap F$, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ (ενδεχομένως κάποια να είναι κενά). Η οικογένεια όλων των τελευταίων συνόλων είναι βάση για το F με τη σχετική τοπολογία. Από την άλλη το σύνολο $\mathcal{N}_u \cap F$ είναι κλειστό στον $\mathcal{N}$ ως τομή δύο κλειστών συνόλων. Είναι τότε άμεσο ότι το $\mathcal{N}_u \cap F$ είναι κλειστό στον F. Καταλήγουμε λοιπόν ότι ο F έχει μια βάση που αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Παρατήρηση 2.6.8.

(i) Οι μηδενοδιάστατοι Πολωνικοί χώροι μας επιτρέπουν να ορίσουμε σχετικά εύκολα συνεχείς συναρτήσεις πάνω σε αυτούς. Για να το εξηγήσουμε καλύτερα αυτό, ας θεωρήσουμε αρχικά ένα κλειστό-ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathcal{X}$ και συνεχείς συναρτήσεις $f_1, f_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Τότε η συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ με

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A \\ f_2(x), & x \notin A \end{cases}$$

είναι επίσης συνεχής. Αυτό συμβαίνει γιατί $f^{-1}[U] = (f_1^{-1}[U] \cap A) \cup (f_2^{-1}[U] \cap (\mathcal{X} \setminus A))$ για κάθε $U \subseteq \mathcal{Y}$. Αφού τα σύνολα A και $\mathcal{X} \setminus A$ είναι ανοικτά και οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι συνεχείς έχουμε το ζητούμενο.

Στην περίπτωση ενός μηδενοδιάστατου Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ μπορούμε εύκολα να βρούμε μια ακολουθία $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από κλειστά-ανοικτά σύνολα με $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Θεωρούμε τις διαφορές

$$W_0 = V_0, \quad W_{n+1} = V_{n+1} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} V_i,$$

έτσι που η $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από κλειστά-ανοικτά ξένα ανά δύο σύνολα, και $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = \mathcal{X}$. Με τη χρήση της $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μπορούμε να ορίσουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση

$$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} : f(x) = \sin(n \cdot \pi \cdot x), \quad \text{όπου } n \text{ είναι ο μοναδικός φυσικός με } x \in W_n.$$

Η f είναι συνεχής συνάρτηση γιατί για κάθε $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ έχουμε

$$x \in f^{-1}[(a,b)] \iff \exists n \ (x \in W_n \ \& \ \sin(n \cdot \pi \cdot x) \in (a,b)),$$

δηλαδή $f^{-1}[(a,b)] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (W_n \cap f_n^{-1}[(a,b)])$ όπου $f_n(x) = \sin(n \cdot \pi \cdot x)$.

Σε αυτό το παράδειγμα χρησιμοποιούμε ουσιαστικά το ότι τα W_n είναι ξένα ανά δύο για να είναι το n στον ορισμό του $f(x)$ είναι μοναδικό. Για να μπορεί γίνει αυτό και να είναι τα W_n και ανοικτά χρειάζεται να ξεκινήσουμε από τα κλειστά-ανοικτά σύνολα.

(ii) Πολλές κατασκευές στην περιγραφική θεωρία συνόλων στηρίζονται σε μια πιο σύνθετη επεξεργασία των προηγούμενων ιδεών. Για παράδειγμα αναφέρουμε την κατασκευή του συνεχούς μονομορφισμού $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.12. Εκεί χρησιμοποιούμε έμμεσα ότι για κάθε n μπορούμε να βρούμε σύνολα $W_1, \dots, W_{2^n}$, (συγκεκριμένα τα $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}}$ για $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = n$) τα οποία έχουν μικρή διάμετρο, είναι ανοικτά και ξένα ανά δύο. Κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ ανήκει σε ακριβώς ένα από τα W_i, συγκεκριμένα στο $\mathcal{N}_{u_n} \cap 2^{\mathbb{N}}$, όπου $u_n = \alpha | n$. Η τιμή $\tau(\alpha)$ καθορίζεται από το σύνολο όλων των $\overline{V_{u_n}}$.

(iii) Στον αντίποδα οι μηδενοδιάστατοι Πολωνικοί χώροι περιορίζουν σημαντικά τις συνεχείς συναρτήσεις που λαμβάνουν τιμές σε αυτούς. Από αυτό προκύπτει ότι οι κατασκευές της $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ του Θεωρήματος 2.3.12 και της $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{X}$ του Θεωρήματος 2.3.7 δεν θα ήταν εφικτές στη θέση των $2^{\mathbb{N}}$ και $\mathcal{N}$ είχαμε έναν μη μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο. Δείτε την Άσκηση 2.6.16.

Πρόταση 2.6.9. *Κάθε μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος έχει μια αριθμήσιμη βάση που αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και μια κατάλληλη μετρική d στον $\mathcal{X}$. Παίρνουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ που είναι πυκνό στον $\mathcal{X}$. Όπως είναι γνωστό η οικογένεια όλων των d-ανοικτών μπαλών της μορφής $B(x_n, q)$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $q \in \mathbb{Q}^+$, αποτελεί βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X}$, δεν σημαίνει όμως ότι αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Θεωρούμε και μια οικογένεια $\mathcal{V}$ από κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, η οποία είναι βάση για τον $\mathcal{X}$. Ορίζουμε

$$I = \{(m,n,p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ \mid \exists V \in \mathcal{V} \ \& \ B(x_m, p) \subseteq V \subseteq B(x_n, q)\}.$$

Το I είναι προφανώς αριθμήσιμο σύνολο. (Προκύπτει από τα πιο κάτω επιχειρήματα ότι το I είναι μη κενό.) Για κάθε $(m,n,p,q) \in I$ επιλέγουμε ένα $V(m,n,p,q) \in \mathcal{V}$ με

$$B(x_m,p) \subseteq V(n,m,p,q) \subseteq B(x_n,q).$$

Ισχυριζόμαστε ότι η οικογένεια $\mathcal{V}' = \{V(m,n,p,q) \mid (m,n,p,q) \in I\}$ είναι βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X}$. Εφόσον η $\mathcal{V}'$ είναι αριθμήσιμη και $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ αν το δείξουμε αυτό θα έχουμε το ζητούμενο.

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $B(x_n,q)$, με $n \in \mathbb{N}$ και $q \in \mathbb{Q}^+$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{V}'$. Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και $q \in \mathbb{Q}^+$, και δείχνουμε ότι για κάθε $x \in B(x_n,q)$ υπάρχει $(m,n',p,q') \in I$ με $x \in V(m,n',p,q') \subseteq B(x_n,q)$, για την ακρίβεια θα έχουμε $n'=n$ και $q'=q$.

Έστω $x \in B(x_n,q)$, αφού το τελευταίο είναι ανοικτό σύνολο και η $\mathcal{V}$ είναι βάση για την τοπολογία του x υπάρχει $U \in \mathcal{V}$ με $x \in U \subseteq B(x_n,q)$. Επιπλέον αφού το U είναι ανοικτό σύνολο υπάρχει $r>0$ με $B(x,r) \subseteq U \subseteq B(x_n,q)$. Από την πυκνότητα του D και του $\mathbb{Q}$ υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $p \in \mathbb{Q}^+$ με $d(x,x_m) < p < r/2$.

Τότε $x \in B(x_m,p)$ και για κάθε $y \in B(x_m,p)$ ισχύει

$$d(y,x) \leqslant d(y,x_m) + d(x_m,x) < p+p = 2q = r.$$

Άρα $x \in B(x_m,p) \subseteq B(x,r) \subseteq U \subseteq B(x_n,q)$. Επομένως $(m,n,p,q) \in I$ και από την επιλογή του $V(n,m,p,q)$ ισχύει

$$x \in B(x_m,p) \subseteq V(n,m,p,q) \subseteq B(x_n,q).$$

Ειδικότερα $x \in V(n,m,p,q) \subseteq B(x_n,q)$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Προηγουμένως είδαμε ότι τα κλειστά υποσύνολα του $\mathcal{N}$ είναι μηδενοδιάστατοι Πολωνικοί χώροι. Το επόμενο αποτέλεσμα μας λέει ότι στην ουσία δεν υπάρχουν άλλα παραδείγματα μηδενοδιάστατων Πολωνικών χώρων.

Θεώρημα 2.6.10 (Καθολική Ιδιότητα του $\mathcal{N}$ για τους μηδενοδιάστατους Πολωνικούς χώρους)**.** *Κάθε μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του χώρου του Baire $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια συμβατή μετρική $d \leqslant 1$ στον $\mathcal{X}$ και μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{V}$ από κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ η οποία είναι βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X}$ (Πρόταση 2.6.9).

Ισχυρισμός. Για κάθε ανοικτό σύνολο $W \subseteq \mathcal{X}$ και κάθε $r>0$ υπάρχει ακολουθία $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία της $\mathcal{V}$ με $W = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ και d-διάμετρος$(A_i) \leqslant r$ για κάθε i. (Επιτρέπουμε το U να είναι το κενό σύνολο, σε αυτή την περίπτωση έχουμε $A_i = \varnothing$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, με d-διάμετρο του κενού συνόλου εννοούμε το 0.)

Απόδειξη ισχυρισμού. Απαριθμούμε $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ και θεωρούμε ένα ανοικτό $W \subseteq \mathcal{X}$ και $r>0$. Τότε κάθε $x \in W$ υπάρχει $r'>0$ με $B(x,r') \subseteq U$ και $r' \leqslant r/2$. Αφού η $\mathcal{V}$ είναι βάση υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x \in V_n \subseteq B(x,r') \subseteq W$. Επιλέγουμε τον ελάχιστο τέτοιο φυσικό αριθμό n και τον συμβολίζουμε με $n(x)$. Είναι τότε σαφές ότι $W = \bigcup_{x\in U} V_{n(x)} = \bigcup_{i\in I} V_i$ όπου $I = \{n(x) \mid x \in U\}$. Επιπλέον η d-διάμετρος κάθε $V_{n(x)}$ είναι $\leqslant 2r' \leqslant r$. Η $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ προκύπτει από την $(V_i)_{i\in I}$ με καινούργια απαρίθμηση των όρων της τελευταίας επιτρέποντας επαναλήψεις. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Στη συνέχεια ορίζουμε μια οικογένεια $(C_u)_{u\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ από υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\mathcal{X} = C_\Lambda$

(ii) το C_u είναι κλειστό-ανοικτό (ενδεχομένως κενό)

(iii) $C_u = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{u*(i)}$

(iv) $C_{u*(i)} \cap C_{u*(j)} = \varnothing$

(v) d-διάμετρος$(C_u) \leqslant 2^{-|u|}$

για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και κάθε $i, j \in \mathbb{N}$. Ο ορισμός γίνεται με αναδρομή στο μήκος $|u|$ του $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Για $|u| = 0$ έχουμε μόνο την περίπτωση $u = \Lambda$, ορίζουμε $C_\Lambda = \mathcal{X}$. Προφανώς το C_Λ είναι κλειστό-ανοικτό και η διάμετρός του είναι $\leqslant 1 = 2^{-|\Lambda|}$ από την επιλογή της d.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ορίσει τα C_u για κάθε $|u| \leqslant n$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες (ii)-(v) πιο πάνω. Για τις (iii) και (iv) αυτό σημαίνει ότι ισχύουν για κάθε $|u| < n$ ώστε $|u * (i)| = n$ για κάθε i. Πρέπει να ορίσουμε τα C_w για κάθε $|w| = n + 1$.

Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = n$ εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό για $W = C_u$ και $r = 2^{-(n+1)}$. Υπάρχει τότε ακολουθία $(A_i^u)_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{V}$ με $C_u = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^u$ και d-διάμετρος$(A_i^u) \leqslant 2^{-(n+1)}$. Στη συνέχεια παίρνουμε τις διαφορές

$$B_0^u = A_0^u, \quad B_{i+1}^u = A_{i+1}^u \setminus \bigcup_{j\leqslant i} A_j^u.$$

Τα B_i^u, $i \in \mathbb{N}$, είναι ξένα ανά δύο και $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^u = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i^u = C_u$. Εφόσον τα A_i^u είναι κλειστά-ανοικτά τα σύνολα B_i^u είναι επίσης κλειστά-ανοικτά. Επιπλέον η d-διάμετρος κάθε B_i^u είναι μικρότερη ή ίση της d-διαμέτρου του A_i^u που είναι μικρότερη ή ίση του $2^{-(n+1)}$. Οπότε ορίζουμε

$$C_{u*(i)} = B_i^u.$$

Έτσι έχουμε ορίσει τα C_w για κάθε $|w| = n + 1$ και είναι σαφές ότι ισχύουν οι (ii)-(v) για το $n + 1$. το επαγωγικό βήμα έχει ολοκληρωθεί.

Οι ιδιότητες (i)-(v) είναι σαφείς από τον ορισμό.

Στη συνέχεια ορίζουμε τη ζητούμενη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{N}$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε $x \in C_\Lambda = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{(i)}$. Επομένως υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ με $x \in C_{(i_0)}$. Αυτό το i_0 είναι μοναδικό γιατί τα $C_{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, είναι ξένα ανά δύο. Εφόσον $C_{(i_0)} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{(i_0,i)}$ υπάρχει i_1 με $C_{(i_0,i_1)}$ και όπως με πριν αυτό το i_1 είναι μοναδικό. Συνεχίζοντας επαγωγικά βρίσκουμε $(i_0, i_1, \dots, i_n, \dots)$ με $x \in C_{(i_0,i_1,\dots,i_n,\dots)}$. Η τιμής της f στο x είναι ακριβώς το $(i_0, i_1, \dots, i_n, \dots) \in \mathcal{N}$.

Δηλαδή έχουμε την $f : \mathcal{X} \to \mathcal{N}$:

$$f(x)(n) = \text{ο μοναδικός } i \in \mathbb{N} \text{ για τον οποίο υπάρχει } u = (i_0, \dots, i_{n-1}) \text{ με } x \in C_{u*(i)}.$$

Αποδεικνύουμε ότι το $f[\mathcal{X}]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ και πως η f είναι τοπολογικός ισομορφισμός μεταξύ του $\mathcal{X}$ και του $f[\mathcal{X}]$. Για να δούμε ότι το $f[\mathcal{X}]$ είναι κλειστό ισχυριζόμαστε αρχικά ότι

$$\alpha \in f[\mathcal{X}] \iff \forall n\, C_{\alpha|n} \neq \varnothing \tag{2.27}$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$.

Για την ευθεία κατεύθυνση αν έχουμε $\alpha = f(x)$, τότε από τον ορισμό της f έχουμε για κάθε n ότι $x \in C_{(f(x)(0),\dots,f(x)(n-1))} = C_{\alpha|n}$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι για κάθε n ισχύει $C_{\alpha|n} \neq \varnothing$. Οπότε η $(C_{\alpha|n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ των οποίων η d-διάμετρος συγκλίνει στο 0. Συνεπώς η τομή όλων αυτών των συνόλων είναι μονοσύνολο. Θεωρούμε το μοναδικό x με $x \in C_{\alpha|n}$ για κάθε n. Τότε μπορούμε να δούμε εύκολα με επαγωγή ότι $\alpha(n) = f(x)(n)$ για κάθε n. Άρα $x = f(\alpha)$.

Από την (2.27) έχουμε ότι

$$f[\mathcal{X}] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n, \qquad F_n = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid C_{\alpha|n} \neq \varnothing\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Κάθε F_n είναι κλειστό υποσύνολο του F_n γιατί αν έχουμε $\alpha_i \in F_n$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $\alpha_i \to \alpha$ τότε για όλα τα μεγάλα i ισχύει $\alpha_i|n = \alpha|n$ και άρα $C_{\alpha|n} = C_{\alpha_i|n} \neq \varnothing$. (Μάλιστα το F_n είναι κλειστό-ανοικτό.) Επομένως το $f[\mathcal{X}]$ είναι κλειστό ως τομή κλειστών συνόλων.

Για να δούμε ότι η f είναι μονομορφισμός παρατηρούμε ότι αν έχουμε $x, y \in \mathcal{X}$ με $x \neq y$ τότε υπάρχει n αρκετά μεγάλο ώστε $2^{-n} < d(x, y)$. Συνεπώς για κάθε u με $|u| \geqslant$

n τα x, y δεν μπορούν να ανήκουν και τα δύο στο C_u. Αφού $x \in C_{(f(x)(0),\dots,f(x)(n-1))}$ και $y \in C_{(f(y)(0),\dots,f(y)(n-1))}$ συνεπάγεται ότι $f(x) \neq f(y)$.

Για τη συνέχεια της f θεωρούμε $x \in \mathcal{X}$ και $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον $x \in C_{(f(x)(0),\dots,f(x)(n-1))}$ και το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $B(x, 2^{-k}) \subseteq C_{(f(x)(0),\dots,f(x)(n-1))}$. Προκύπτει τότε ότι για κάθε $y \in B(x, 2^{-k})$ ισχύει $y \in C_{(f(x)(0),\dots,f(x)(n-1))}$ και άρα $(f(x)(0), \dots, f(x)(n-1)) \sqsubseteq f(y)$, οπότε

$$d_{\mathcal{N}}(f(x), f(y)) \leqslant 2^{-n}.$$

Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f.

Τέλος για τη συνέχεια της $f^{-1}[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$ παρατηρούμε ότι για κάθε n και κάθε $\alpha = f(x)$ και $\beta = f(y) \in \mathcal{N}$ με $\alpha|n = \beta|n$ έχουμε $x, y \in C_{\alpha|n}$ και άρα

$$d(f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)) = d(x, y) \leqslant 2 \cdot d\text{-διάμετρος}(C_{\alpha|n}) \leqslant 2^{-n+1}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Μια τυχαία συμβατή μετρική σε έναν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο δεν δίνει απαραίτητα ανοικτές μπάλες που είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα, δείτε την Άσκηση 2.6.17. Από την άλλη προκύπτει από το επόμενο πόρισμα ότι *υπάρχει* μια συμβατή μετρική με αυτή την ιδιότητα. Για την ακρίβεια αυτή είναι μια **υπερμετρική**, δηλαδή μια μετρική d που ικανοποιεί

$$d(x, y) \leqslant \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

για κάθε x, y, z που ανήκουν στον δοσμένο Πολωνικό χώρο. Αποδεικνύεται ότι οι μπάλες κάθε υπερμετρικής σε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα, δείτε την Άσκηση 2.6.19. [Δείτε επίσης την Άσκηση 2.3.14 στην οποία δείχνουμε ότι η $d_{\mathcal{N}}$ είναι υπερμετρική στον $\mathcal{N}$. Θυμίζουμε ότι οι $d_{\mathcal{N}}$-ανοικτές μπάλες είναι της μορφής $\mathcal{N}_u$ όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, τα οποία είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα.]

Πόρισμα 2.6.11. *Ένας Πολωνικός χώρος είναι μηδενοδιάστατος αν και μόνο αν έχει μια συμβατή υπερμετρική.*

Ειδικότερα κάθε Πολωνικός χώρος έχει μια συμβατή μετρική όπου οι ανοικτές μπάλες είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Αν ο $\mathcal{X}$ έχει μια συμβατή υπερμετρική τότε από την Άσκηση 2.6.19 οι ανοικτές μπάλες είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα και άρα ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος. Αντίστροφα αν ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος τότε από το Θεώρημα 2.6.10 υπάρχει κλειστό σύνολο $C \subseteq \mathcal{N}$ και τοπολογικός ισομορφισμός $f : \mathcal{X} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$. Ορίζουμε $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = d_{\mathcal{N}}(f(x), f(y)).$$

Με άλλα λόγια ορίζουμε την d στον $\mathcal{X}$ ώστε η f να γίνεται ισομετρία. Επειδή το C είναι κλειστό και ο $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι πλήρης, έχουμε ότι και το C με τον περιορισμό της $d_{\mathcal{N}}$ είναι επίσης πλήρης μετρικός χώρος. Προκύπτει ότι ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης. Η απόδειξη ότι η τοπολογία της d είναι η ίδια με την τοπολογία του $\mathcal{X}$ είναι όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.1.2. □

Ασκήσεις

Άσκηση 2.6.12. Κάθε συμπαγής Πολωνικός χώρος είναι τοπολογικά ισομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του κύβου του Hilbert.

Άσκηση 2.6.13. Ο χώρος $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $2^{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 2.6.14. Ο χώρος $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ των άρρητων αριθμών με τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.6.15. Τα μόνα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι κλειστά-ανοικτά στη συνήθη τοπολογία είναι το $\emptyset$ και ο $\mathbb{R}$. Συνεπώς ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη τοπολογία του δεν είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.6.16.) Αν ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ είναι σταθερή.

Συμπεράνετε ότι στα Θεωρήματα 2.3.7 και 2.3.12 δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους χώρους $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ με τον $\mathbb{R}$.

Άσκηση 2.6.17. Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ και τη μετρική d στον $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathcal{N}$ που προκύπτει από την τοπολογία γινόμενο σύμφωνα με την Εισαγωγή:

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \min\{|\alpha(n) - \beta(n)|, 1\}\ , \quad \alpha, \beta \in \mathcal{N}.$$

Εφόσον η τοπολογία του $\mathcal{N}$ είναι η τοπολογία γινόμενο οι μετρικές d και $d_{\mathcal{N}}$ είναι ισοδύναμες. Δείξτε ότι η d-ανοικτή μπάλα κέντρου $(0, 0, \dots, 0, \dots)$ και ακτίνας 2 δεν είναι κλειστό σύνολο.

Συμπεράνετε ότι μια τυχαία συμβατή μετρική σε έναν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο δεν δίνει απαραίτητα ανοικτές μπάλες που είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Άσκηση 2.6.18. Το ευθύ άθροισμα δύο μηδενοδιάστατων Πολωνικών χώρων και το (πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο) γινόμενο μηδενοδιάστατων Πολωνικών χώρων είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.6.19 (Bourbaki)**.** Για κάθε υπερμετρική d σε ένα μη κενό σύνολο X και κάθε $x, y, z \in X$, $r, r' > 0$ ισχύουν τα εξής.

(α′) Το $B_d(x, r)$ είναι κλειστό-ανοικτό σύνολο.

(β′) Αν $d(x, z) \neq d(y, z)$ τότε $d(x, y) = \max\{d(x, z), d(y, z)\}$. Ειδικότερα δύο από τους αριθμούς $d(x, y)$, $d(x, z)$, $d(y, z)$ είναι ίσοι.

(γ′) Αν $y \in B_d(x, r)$ τότε $B_d(y, r) = B_d(x, r)$.

(δ′) Αν $B_d(x, r) \cap B_d(y, r') \neq \emptyset$ τότε είτε $B_d(x, r) \subseteq B_d(y, r')$ είτε $B_d(y, r') \subseteq B_d(x, r)$.

Συμπεράνετε ότι ο τοπολογικός χώρος που προκύπτει από τον (X, d) είναι μηδενοδιάστατος.

2.7. Τοπολογικοί Χαρακτηρισμοί των χώρων του Baire και του Cantor

Σκοπός μας εδώ είναι να χαρακτηρίσουμε τους χώρους του Baire και Cantor από τοπολογικής άποψης. Δηλαδή να βρούμε τοπολογικές ιδιότητες $P_{\mathcal{N}}$ και $P_{2^{\mathbb{N}}}$ που να τις ικανοποιούν οι $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ αντίστοιχα και "στην ουσία" να είναι οι μοναδικοί χώροι που τις ικανοποιούν.

Ορολογία. Όταν λέμε ότι ο $\mathcal{X}$ είναι *μέχρι τοπολογικού ισομορφισμού ο μοναδικός Πολωνικός χώρος που ικανοποιεί την ιδιότητα* P εννοούμε ότι ο $\mathcal{X}$ ικανοποιεί την P και για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ που ικανοποιεί την P, ο $\mathcal{Y}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{X}$.

Θεώρημα 2.7.1 (Alexandrov - Uryshon, δείτε [**Kec95**]-7.7)**.** *Ο χώρος του Baire* $\mathcal{N}$ *είναι μέχρι τοπολογικού ισομορφισμού ο μοναδικός Πολωνικός χώρος που είναι μηδενοδιάστατος και κάθε συμπαγές υποσύνολό του έχει κενό εσωτερικό.*

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι ο $\mathcal{N}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες Όπως έχουμε δει ο $\mathcal{N}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος. Επίσης για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο $\mathcal{N}_u$ δεν είναι συμπαγές: η ακολουθία $\alpha_i = u * (i, 0, 0, \dots, i \in \mathbb{N}$ αποτελείται από στοιχεία του $\mathcal{N}_u$ και δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Επομένως για κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathcal{N}$ ισχύει $\mathcal{N}_u \nsubseteq K$ για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, δηλαδή $K^{\circ} = \emptyset$. [Μπορούμε επίσης να το δείξουμε αυτό με τη βοήθεια του Πορίσματος 2.5.7: το K ως συμπαγές είναι το σώμα $[T]$ ενός δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης. Τότε όμως είναι σαφές ότι $\mathcal{N}_u \nsubseteq [T]$ για κάθε $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$.]

Στη συνέχεια θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ που είναι μηδενοδιάστατος και κάθε συμπαγές υποσύνολό του έχει κενό εσωτερικό. Θεωρούμε μια συμβατή μετρική $d \leqslant 1$ και μια αριθμήσιμη βάση $\mathcal{V}$ από κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ (Πρόταση 2.6.9).

Κατασκευάζουμε με αναδρομή στο μήκος $|u|$ του $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ μια οικογένεια $(C_u)_{u\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $C_\Lambda = \mathcal{X}$

(ii) το C_u είναι μη κενό κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$

(iii) $C_u = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{u*(i)}$

(iv) $C_{u*(i)} \cap C_{u*(j)} = \varnothing$

(v) d-διάμετρος$(C_u) \leqslant 2^{-|u|}$

για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $imj \in \mathbb{N}$.

Αν κάνουμε την πιο πάνω κατασκευή έχουμε στην ουσία τελειώσει. Ο ζητούμενος τοπολογικός ισομορφισμός $f : \mathcal{X} \to \mathcal{N}$ ορίζεται όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.10: οι ιδιότητες (i)-(v) που έχουμε εδώ συνεπάγονται και τις ιδιότητες (i)-(v) στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.10 (η μόνη διαφορά είναι ότι εδώ θέλουμε επιπλέον $C_u \neq \varnothing$). Επομένως μπορούμε να πάρουμε πάλι την $f : \mathcal{X} \to \mathcal{N}$ με

$$f(x)(n) = \text{ο μοναδικός } i \in \mathbb{N} \text{ για τον οποίο υπάρχει } u = (i_0, \ldots, i_{n-1}) \text{ με } x \in C_{u*(i)}.$$

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.10 η f είναι συνεχής μονομορφισμός με συνεχή αντίστροφη $f^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$. Επιπλέον η f είναι επιμορφισμός: σύμφωνα με την (2.27) ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$,

$$\alpha \in f[\mathcal{X}] \iff \forall n\, C_{\alpha|n} \neq \varnothing.$$

Αφού όμως $C_u \neq \varnothing$ για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ το δεξιό σκέλος της τελευταίας ισοδυναμίας ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Επομένως $f[\mathcal{X}] = \mathcal{N}$.

Απομένει λοιπόν να κατασκευάσουμε τα C_u, $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, που να ικανοποιούν τις πιο πάνω ιδιότητες. Για $|u| = 0$ έχουμε $u = \Lambda$ οπότε ορίζουμε $C_\Lambda = \mathcal{X}$. Προφανώς το C_Λ είναι μη κενό κλειστό-ανοικτό και d-διάμετρος$(C_\Lambda) \leqslant 1 = 2^{-0}$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο n έχουμε ορίσει τα C_u για κάθε u με $|u| \leqslant n$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες (ii)-(v). Για τις (iii) και (iv) αυτό σημαίνει ότι ισχύουν για κάθε $|u| < n$ ώστε $|u * (i)| = n$ για κάθε i.

Θεωρούμε ένα $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = n$, θα ορίσουμε τα $C_{u*(i)}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Η ιδέα είναι όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.10 να γράψουμε το C_u ως ένωση της μορφής $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$ όπου τα V_i είναι στοιχεία της $\mathcal{V}$ κατάλληλα μικρής διαμέτρου, και έπειτα να πάρουμε για $C_{u*(i)}$ τις διαφορές $V_i \setminus \bigcup_{k<i} V_k$. Αυτά τα σύνολα θα έχουν όλες τις ιδιότητες με μοναδική εξαίρεση ότι κάποιο $C_{u*(i)}$ μπορεί να είναι κενό. Για να εξασφαλίσουμε ότι $C_{u*(i)} \neq \varnothing$ θα χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση μας ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{X}$ έχει κενό εσωτερικό.

Αφού το C_u είναι ανοικτό και μη κενό έχουμε ειδικότερα ότι $C_u^\circ \neq \varnothing$ και άρα το C_u δεν είναι συμπαγές.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο C ενός μετρικού χώρου (Y, ρ) είναι **ολικά φραγμένο** αν για κάθε $r > 0$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_1, \ldots, U_m$ με ρ-διάμετρο $\leqslant r$ και $C \subseteq \bigcup_{k=1}^m U_k$. Όπως είναι γνωστό το C είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και ολικά φραγμένο.

Επιστρέφοντας πίσω στο C_u αφού το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό και όχι συμπαγές, έχουμε από πιο πάνω ότι το C_u δεν είναι ολικά φραγμένο στον $(\mathcal{X}, d)$. Επομένως υπάρχει $r_u > 0$ ώστε το C_u δεν καλύπτεται από οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία από ανοικτά σύνολα d-διαμέτρου μικρότερη ή ίσης του r_u.

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.10 υπάρχει ακολουθία $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{V}$ με $C_u = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$ και d-διάμετρος$(V_i) \leqslant \min\{2^{-(n+1)}, r_u\}$. Έπειτα παίρνουμε τις διαφορές

$$U_0 = V_0, \quad U_{i+1} = V_{i+1} \setminus \bigcup_{k\leqslant i} V_k, \quad i \geqslant 1,$$

έτσι που κάθε U_i είναι κλειστό-ανοικτό με d-διάμετρο$\leqslant 2^{-(n+1)}$, τα U_i είναι ξένα ανά δύο, και $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i = C_u$.

Ισχυριζόμαστε ότι για άπειρα το πλήθος $i \in \mathbb{N}$ έχουμε $U_i \neq \varnothing$. Αλλιώς θα υπήρχε i_0 έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ θα ίσχυε $V_{i+1} \subseteq \bigcup_{k\leqslant i} V_k$. Προκύπτει εύκολα με επαγωγή στο $i \geqslant i_0$ ότι θα είχαμε $V_{i+1} \subseteq \bigcup_{k\leqslant i_0} V_k$ και επομένως θα ίσχυε

$$C_u = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i = \bigcup_{k\leqslant i_0} V_k.$$

Άρα θα υπήρχε μια πεπερασμένη ακολουθία ανοικτών συνόλων d-διαμέτρου μικρότερης ή ίσης του r_u η οποία θα κάλυπτε το C_u που είναι άτοπο.

Αφού έχουμε $U_i \neq \varnothing$ για άπειρα το πλήθος $i \in \mathbb{N}$, μπορούμε να απαλείψουμε τα $i \in \mathbb{N}$ για τα οποία $U_i = \varnothing$, και να έχουμε πάλι άπειρους όρους U_i. Επομένως χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $U_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε τα U_i είναι μη κενά κλειστά-ανοικτά σύνολα, με d-διάμετρο$\leqslant 2^{-(n+1)}$, είναι ξένα ανά δύο, και η ένωσή τους είναι το C_u. Ορίζουμε λοιπόν

$$C_{u*(i)} = U_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την κατασκευή. ▫

Όπως αναφέραμε στην Άσκηση 2.6.14 οι άρρητοι αριθμοί $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με τη σχετική τοπολογία αποτελούν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο. Με βάση το Θεώρημα 2.6.10 προκύπτει φυσιολογικά το ερώτημα με ποιο κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι τοπολογικά ισομορφικό το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Η απάντηση είναι ο ίδιος ο χώρος του Baire.

Πόρισμα 2.7.2. *Ο Πολωνικός χώρος των άρρητων αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον χώρο του Baire $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Από την Άσκηση 2.6.14 το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος. Δείχνουμε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ έχει κενό εσωτερικό. Θεωρούμε ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $K^\circ \neq \varnothing$. Τότε υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα (a, b) του $\mathbb{R}$ με $(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq K$. Από την πυκνότητα των ρητών υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$ και από την πυκνότητα των αρρήτων υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από άρρητους αριθμούς στο (a, b) με $x_n \to q$. Τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία του K χωρίς συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα το K δεν είναι συμπαγές. Επομένως έχουμε $K^\circ \neq \varnothing$ για κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Από το Θεώρημα 2.7.1 ο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{N}$. ▫

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τον χώρο του Cantor.

Θεώρημα 2.7.3 (Brouwer, δείτε [**Kec95**]-7.4)**.** *Ο χώρος του Cantor είναι ο μοναδικός μέχρι τοπολογικού ισομορφισμού συμπαγής τέλειος μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν συμπαγή, τέλειο και μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και μια συμβατή μετρική $d \leqslant 1$. Για ευκολία συμβολίζουμε με $\delta(C)$ την d-διάμετρο του C, όπου $\varnothing \neq C \subseteq \mathcal{X}$.

Θα κατασκευάσουμε μια οικογένεια $(C_u)_{u\in\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $C_\Lambda = \mathcal{X}$

(ii) το C_u είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X}$

(iii) $C_u = C_{u*(0)} \cup C_{u*(1)}$

(iv) $C_{u*(0)} \cap C_{u*(1)} = \varnothing$

(v) $\lim\limits_{m\to\infty} \delta(C_{\alpha|m}) = 0$

για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ και κάθε $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$.

Τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X} : \{f(\alpha)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{\alpha|n}.$$

Η f είναι ένα-προς-ένα και συνεχής, αυτό μπορούμε να το δούμε όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.12. Για να δούμε γιατί η f είναι επιμορφισμός θεωρούμε ένα $x \in \mathcal{X}$. Τότε $x \in C_\Lambda = C_{(0)} \cup C_{(1)}$ άρα υπάρχει μοναδικό $i_0 \in \{0,1\}$ με $x \in C_{(i_0)} = C_{(i_0,0)} \cup C_{(i_0,1)}$. Συνεχίζουμε αναδρομικά και βρίσκουμε $\alpha = (i_0, i_1, \dots, i_n, \dots)$ με $C \in C_{\alpha|n}$ για κάθε n. Επομένως $f(\alpha) = x$ και η f είναι επιμορφισμός. Εφόσον ο $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγής και η f είναι συνεχής έχουμε ότι και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : \mathcal{X} \to 2^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής (δείτε την απόδειξη του Πορίσματος 2.4.4 για περισσότερες λεπτομέρειες).

Οπότε αρκεί να κατασκευάσουμε την $(C_u)_{u\in\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$ όπως πιο πάνω. Οι ιδιότητες (i)-(iv) είναι σχετικά εύκολες να επιτευχθούν: ουσιαστικά διαμερίζουμε το $\mathcal{X}$ σε δύο μη κενά κλειστά-κλειστά υποσύνολα και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για το κάθε ένα από αυτά. Η δυσκολία είναι να δειχθεί η ιδιότητα (v). Η ιδέα για να ξεπεράσουμε αυτό το εμπόδιο είναι να συνεχίσουμε τη διαμέριση σε δύο υποσύνολα μέχρις ότου η διάμετρος να γίνει μικρή. Παρακάτω δίνουμε την κατασκευή με λεπτομέρεια.

Όπως στον ισχυρισμό της απόδειξης του Θεωρήματος 2.6.10 για κάθε μη κενό κλειστό-ανοικτό υποσύνολο C του $\mathcal{X}$ και κάθε $r > 0$ μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από κλειστά-ανοικτά υποσύνολα $\mathcal{X}$ με d-διάμετρο$\leqslant r$ έτσι ώστε $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Αφού όμως το C είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς χώρου $\mathcal{X}$ είναι και το ίδιο συμπαγές. Άρα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $V_0, \dots, V_n$. Έπειτα παίρνοντας τις διαφορές $V_i \setminus \bigcup_{k<i} V_k$ μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι τα $V_0, \dots, V_n$ είναι ξένα ανά δύο. Επειδή $\varnothing \neq C = \bigcup_{i\leqslant n} V_i$ υπάρχει τουλάχιστον ένα i για το οποίο $V_i \neq \varnothing$. Απαλείφοντας τα V_i για τα οποία $V_i = \varnothing$ και απαριθμώντας ξανά μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι όλα τα V_i είναι μη κενά. Σύμφωνα με το προηγούμενο θα παραμείνει τουλάχιστον ένα V_i, μάλιστα μπορούμε να υποθέσουμε ότι θα παραμείνουν τουλάχιστον δύο V_i, δηλαδή ότι $n \geqslant 1$. Για να το δούμε αυτό χρησιμοποιούμε ότι ο $\mathcal{X}$ είναι τέλειος: αφού το C είναι ανοικτό μπορούμε να βρούμε $x, y \in C$ με $x \neq y$. Τότε επαναλαμβάνουμε όλα τα προηγούμενα με το $\min\{r, 2^{-1}\cdot d(x,y)\}$ στη θέση του r. Τότε $\delta(V_0) \leqslant d(x,y)$ επομένως το V_0 δεν μπορεί να καλύψει όλο το C. Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής.

Παρατήρηση. Για κάθε μη κενό κλειστό-ανοικτό υποσύνολο C του $\mathcal{X}$ και κάθε $r > 0$ υπάρχουν μη κενά, ξένα ανά δύο, κλειστά-ανοικτά σύνολα $V_0, \dots, V_n$ με $n \geqslant 1$ έτσι ώστε $C = V_0 \cup \dots \cup V_n$ και $\delta(V_i) \leqslant r$ για κάθε $i \leqslant n$.

Στη συνέχεια ορίζουμε την οικογένεια $(\mathcal{F}_u)_{u\in\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\mathcal{F}_\Lambda = \{\mathcal{X}\}$

(β) $\mathcal{F}_u = \{V_0,\dots,V_n\}$, όπου τα $V_0,\dots V_n$ είναι μη κενά, ξένα ανά δύο, κλειστά-ανοικτά $\subseteq \mathcal{X}$

(γ) $\bigcup \mathcal{F}_u = \bigcup \big(\mathcal{F}_{u*(0)} \cup \mathcal{F}_{u*(1)}\big)$

(δ) $\big(\bigcup \mathcal{F}_{u*(0)}\big) \cap \big(\bigcup \mathcal{F}_{u*(1)}\big) = \varnothing$

(ε) αν $\mathcal{F}_u = \{C\}$ τότε $\mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}$ και $\delta(V) \leqslant 2^{-1}\cdot\delta(C)$ για κάθε $V \in \mathcal{F}_{u*(0)} \cup \mathcal{F}_{u*(1)}$

(στ) αν $\mathcal{F}_u = \{V_0,\dots,V_n\}$, $n \geqslant 1$, τότε $\mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}$ και $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1,\dots,V_n\}$

για κάθε $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$. Δείτε το Σχήμα??.

Η κατασκευή γίνεται με αναδρομή στο μήκος $|u|$ του u. Αν $|u| = 0$ τότε $u = \Lambda$, θέτουμε $\mathcal{F}_\Lambda = \{\mathcal{X}\}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ έχουμε ορίσει τα $\mathcal{F}_u$ για κάθε $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| \leqslant m$ και ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες (α)-(στ) πιο πάνω. Ως συνήθως όπου έχουμε $u*(0)$, $u*(1)$ σε μια ιδιότητα εννοούμε ότι αυτή ισχύει για $|u| < m$.

Παίρνουμε $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = m$ και ορίζουμε τα $\mathcal{F}_{u*(0)}, \mathcal{F}_{u*(1)}$. Αν το $\mathcal{F}_u$ είναι το μονοσύνολο $\{C\}$ τότε εφαρμόζουμε την παρατήρηση από πιο πάνω για $r = 2^{-1}\cdot\delta(C)$ και παίρνουμε μη κενά, ξένα ανά δύο, κλειστά-ανοικτά σύνολα $V_0,\dots,V_n$ με $n \geqslant 1$ ώστε $C = V_0 \cup \dots \cup V_n$ και $\delta(V_i) \leqslant r$ για κάθε $i \leqslant n$. Θέτουμε τότε $\mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}$ και $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1,\dots,V_n\}$. Αν το $\mathcal{F}_u$ έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, $\mathcal{F}_u = \{V_0,\dots,V_n\}$, $n \geqslant 1$, ορίζουμε $\mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}$ και $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1,\dots,V_n\}$. Αυτό ολοκληρώνει την κατασκευή.

Τέλος ορίζουμε

$$C_u = \bigcup \mathcal{F}_u \quad \text{για κάθε } u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}.$$

Οι ιδιότητες (i)-(iv) είναι σαφείς από τις (α)-(δ). Για την (v) θεωρούμε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Είναι σαφές από την ιδιότητα (γ) ότι $C_{\alpha|(m+1)} \subseteq C_{\alpha|m}$ για κάθε m, επομένως η ακολουθία των d-διαμέτρων $(\delta(C_{\alpha|m}))_{m\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

Ισχυρισμός. Για κάθε m υπάρχει $m' > m$ με $\delta(C_{\alpha|m'}) \leqslant 2^{-1}\cdot\delta(C_{\alpha|m})$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του $\mathcal{F}_{\alpha|m}$. Για τη βάση της επαγωγής (που είναι και το μεγαλύτερο μέρος της απόδειξης) θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι $\mathcal{F}_{\alpha|m} = \{C\}$. Θέτουμε $u = \alpha|m$. Από τις ιδιότητες (β) και (ε) έχουμε $\mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}$, $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1,\dots,V_n\}$ όπου $n \geqslant 1$ και για κάθε $i \leqslant n$ έχουμε $\delta(V_i) \leqslant 2^{-1}\cdot\delta(C)$. Προφανώς $C = \bigcup \mathcal{F}_u = C_u = C_{\alpha|m}$, άρα για κάθε $i \leqslant n$ έχουμε

$$\delta(V_i) \leqslant 2^{-1}\cdot\delta(C_{\alpha|m}).$$

Επομένως αρκεί να βρούμε $m' > m$ με $\mathcal{F}_{\alpha|m'} = \{V_i\}$ γιατί τότε θα έχουμε $C_{\alpha|m'} = \bigcup \mathcal{F}_{\alpha|m'} = V_i$ και άρα $\delta(C_{\alpha|m'}) = \delta(V_i) \leqslant 2^{-1}\cdot\delta(C_{\alpha|m})$.

Αφού $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1,\dots,V_n\}$ έχουμε εύκολα από την (στ) ότι

$$\mathcal{F}_{u*(1,1)} = \{V_2,\dots,V_n\}, \quad \dots, \quad \mathcal{F}_{u*(1)^n} = \{V_n\}. \tag{2.28}$$

(Προφανώς για $n = 1$ η προηγούμενη γραμμή είναι περιττή.)

Επομένως αν έχουμε $\alpha(m+k) = 1$ για κάθε $k < n$, τότε

$$u*(1)^n = (\alpha(0),\dots,\alpha(m-1)*(1)^n = (\alpha(0),\dots,\alpha(m-1),\alpha(m),\dots,\alpha(m+n-1)) = \alpha|(m+n),$$

οπότε παίρνουμε $m' = m+n > m$ και έχουμε $\mathcal{F}_{\alpha|m'} = \mathcal{F}_{u*(1)^n} = \{V_n\}$.

Από την άλλη αν υπάρχει $k < n$ με $\alpha(m+k) = 0$ παίρνουμε τον ελάχιστο τέτοιο k, έτσι που

$$(\alpha(0),\dots,\alpha(m+k)) = (\alpha|m)*(1)^k*(0).$$

Παίρνουμε λοιπόν $m' = m+k+1$ και έχουμε

$$\mathcal{F}_{\alpha|m'} = \mathcal{F}_{(\alpha(0),\dots,\alpha(m+k))} = \mathcal{F}_{(\alpha|m)*(1)^k*(0)}.$$

Αν $k = 0$ η $(1)^k$ είναι η κενή ακολουθία οπότε

$$\mathcal{F}_{(\alpha|m)*(1)^k*(0)} = \mathcal{F}_{(\alpha|m)*(0)} = \mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}.$$

Αν $k > 0$ με χρήση της ισότητας $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ και της (2.28) παίρνουμε $\mathcal{F}_{(\alpha|m)*(1)^k} = \{V_k, \ldots, V_n\}$. Επομένως από την ιδιότητα (στ) ισχύει $\mathcal{F}_{(\alpha|m)*(1)^k*(0)} = \{V_k\}$.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε $\mathcal{F}_{\alpha|m'} = \{V_k\}$. Αυτό ολοκληρώνει τη βάση της επαγωγής. Το επαγωγικό βήμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ ισχύει το εξής: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ αν το $\mathcal{F}_{\alpha|m}$ έχει το πολύ n το πλήθος στοιχεία τότε υπάρχει $m' > m$ με $\delta(C_{\alpha|m'}) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C_{\alpha|m})$. Δείχνουμε το ίδιο για το $n + 1$.

Θεωρούμε λοιπόν ότι έχουμε $m \in \mathbb{N}$ και πως το $\mathcal{F}_{\alpha|m}$ έχει το πολύ $n + 1$ το πλήθος στοιχεία. Προφανώς αν έχει λιγότερα από $n + 1$ στοιχεία καλυπτόμαστε από την Επαγωγική Υπόθεση, οπότε υποθέτουμε ότι έχει ακριβώς $n + 1$ το πλήθος στοιχεία. Γράφουμε $\mathcal{F}_{\alpha|m} = \{V_0, \ldots, V_n\}$. Όπως πριν θέτουμε $u = \alpha|m$. Από την ιδιότητα (στ) έχουμε $\mathcal{F}_{u*(0)} = \{V_0\}$ και $\mathcal{F}_{u*(1)} = \{V_1, \ldots, V_n\}$. Σε κάθε περίπτωση το $\mathcal{F}_{\alpha|(m+1)}$ έχει το πολύ n το πλήθος στοιχεία. Άρα από την Επαγωγική Υπόθεση με το $m + 1$ στη θέση του m υπάρχει $m' > m + 1$ με $\delta(C_{\alpha|m'}) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C_{\alpha|(m+1)}) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C_{\alpha|m})$. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Με τη βοήθεια του πιο πάνω ισχυρισμού βρίσκουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών με $\delta(C_{\alpha|m_{n+1}}) \leqslant 2^{-1} \cdot \delta(C_{\alpha|m_n})$, απ' όπου προκύπτει εύκολα ότι $\delta(C_{\alpha|m_{n+1}}) \leqslant 2^{-(n+1)} \cdot \delta(C_{\alpha|m_0})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε επομένως ότι $\lim_{n\to\infty} \delta(C_{\alpha|m_n}) = 0$ και αφού η ακολουθία $(\delta(C_{\alpha|m}))_{m\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα έχουμε το ζητούμενο $\lim_{m\to\infty} \delta(C_{\alpha|m}) = 0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ασκήσεις

Άσκηση 2.7.4. Βρείτε έναν τέλειο μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο που δεν είναι τοπολογικά ισομορφικός ούτε με τον $\mathcal{N}$ ούτε με τον $2^{\mathbb{N}}$.

Βρείτε επίσης ένα συμπαγή μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο που δεν είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $2^{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 2.7.5. Ορίστε έναν τοπολογικό ισομορφισμό μεταξύ του $2^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ και του $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Βασικές κλάσεις συνόλων και ιεράρχηση

3.1. Θεμελιώδεις τελεστές και η έννοια της κλάσης

Ορισμός 3.1.1. Με τον όρο **τελεστής συνόλων** εννοούμε οποιαδήποτε πράξη ανάμεσα σε σύνολα, για παράδειγμα έχουμε τον τελεστή της ένωσης όπου παίρνει δύο σύνολα A, B και δίνει την ένωση $A \cup B$. Περιορίζουμε το πεδίο εφαρμογής των τελεστών μας στα υποσύνολα Πολωνικών χώρων. Έχουμε τους εξής τελεστές.

(I) Ο τελεστής της **διάζευξης** $\vee$. Αν έχουμε $P, Q \subseteq \mathcal{X}$ ορίζουμε το σύνολο της διάζευξης $P \vee Q \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P \vee Q \iff x \in P \text{ ή } x \in Q.$$

Παρατηρούμε ότι το $P \vee Q$ είναι η συνολοθεωρητική ένωση $P \cup Q$, γι' αυτό θα αποκαλούμε τη διάζευξη $P \vee Q$ και ως ένωση των P, Q. Η διαφορά ανάμεσα σε αυτούς τους δύο τελεστές είναι ότι η ένωση μπορεί να εφαρμοστεί σε σύνολα που δεν είναι απαραίτητα υποσύνολα του ίδιου χώρου. Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε την ένωση ενός συνόλου πραγματικών αριθμών με ένα σύνολο συναρτήσεων. Από την άλλη ο τελεστής της διάζευξης ορίζεται σε υποσύνολα *του ίδιου χώρου*.

Εδώ κάνουμε μια μικρή κατάχρηση του συμβολισμού. Όπως έχουμε αναφέρει στην εισαγωγή θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\vee$ για να δηλώσουμε τον τελεστή της διάζευξης μέσα σε λογικές προτάσεις. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για να ορίσουμε μια πράξη ανάμεσα σε σύνολα. Ισχύει η προφανής σχέση

$$x \in P \vee Q \iff x \in P \ \vee \ x \in Q.$$

Θα είναι σαφές από το κείμενο σε ποια χρήση του συμβόλου $\vee$ αναφερόμαστε κάθε φορά και δεν θα δίνουμε περαιτέρω εξηγήσεις.

(II) Ο τελεστής της **σύζευξης** &. Αν έχουμε $P, Q \subseteq \mathcal{X}$ ορίζουμε το σύνολο της σύζευξης $P \,\&\, Q \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P \,\&\, Q \iff x \in P \text{ και } x \in Q.$$

Παρατηρούμε ότι το $P \,\&\, Q$ είναι η συνολοθεωρητική τομή $P \cap Q$ υποσυνόλων του *ίδιου* χώρου, γι' αυτό θα αποκαλούμε τη σύζευξη $P \,\&\, Q$ και ως τομή των P, Q. Ισχύουν οι ανάλογες παρατηρήσεις σχετικά με τον συμβολισμό.

(III) Ο τελεστής του **συμπληρώματος** c. Αν $P \subseteq \mathcal{X}$ ορίζουμε το συμπλήρωμα $\mathrm{c}_{\mathcal{X}} P$ του P ως προς $\mathcal{X}$ ως το σύνολο $\mathcal{X} \setminus P$. Προφανώς

$$x \in \mathrm{c}_{\mathcal{X}} P \iff \neg(x \in P).$$

Όταν ο $\mathcal{X}$ είναι σαφής από το κείμενο γράφουμε απλά c αντί του $\mathrm{c}_{\mathcal{X}}$.

(IV) Ο τελεστής της **άπειρης αριθμήσιμης διάζευξης ή ένωσης** $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Αν έχουμε μια ακολουθία συνόλων $P_n \subseteq \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την **άπειρη διάζευξη** $\bigvee_{\mathbb{N}} (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως εξής,

$$x \in \bigvee_{\mathbb{N}} (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \exists n \in \mathbb{N} \, x \in P_n.$$

Με άλλα λόγια η άπειρη διάζευξη $\bigvee_{\mathbb{N}} (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι η ένωση $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ υποσυνόλων του *ίδιου* Πολωνικού χώρου. Όπως και προηγουμένως θα αποκαλούμε την άπειρη διάζευξη και ως ένωση.

(V) Ο τελεστής της **άπειρης αριθμήσιμης σύζευξης ή τομής** $\bigwedge_{\mathbb{N}}$. Αν έχουμε μια ακολουθία συνόλων $P_n \subseteq \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την **άπειρη σύζευξη** $\bigwedge_{\mathbb{N}} (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής,

$$x \in \bigwedge_{\mathbb{N}} (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall n \in \mathbb{N}\, x \in P_n.$$

Η άπειρη σύζευξη $\bigwedge_{\mathbb{N}} (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$ υποσυνόλων του *ίδιου* Πολωνικού χώρου, και θα την αποκαλούμε και ως τομή.

(VI) Ο τελεστής του **υπαρξιακού ποσοδείκτη** $\exists^{\mathcal{Y}}$ υπεράνω του $\mathcal{Y}$. Αν έχουμε ένα $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ορίζουμε το σύνολο

$$\exists^{\mathcal{Y}} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists y\, (x, y) \in P\}.$$

Το $\exists^{\mathcal{Y}} P$ είναι ακριβώς η *προβολή του P υπεράνω του $\mathcal{Y}$*, με άλλα λόγια

$$\exists^{\mathcal{Y}} P = \mathrm{pr}[P] \text{ όπου } \mathrm{pr} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X} : \mathrm{pr}(x, y) = x.$$

Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι περιπτώσεις όπου $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ και $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$. Σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε

$$x \in \exists^{\mathbb{N}} P \iff \exists n\, (x, n) \in P \quad \text{όπου } P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N},$$
$$x \in \exists^{\mathcal{N}} P \iff \exists \alpha (x, \alpha) \in P \quad \text{όπου } P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}.$$

Ο τελεστής $\exists^{\mathbb{N}}$ "προσομοιάζει" την αριθμήσιμη ένωση με μια ουσιαστική διαφορά όμως που θα εξηγήσουμε παρακάτω.

(VII) Ο τελεστής του **καθολικού ποσοδείκτη** $\forall^{\mathcal{Y}}$ υπεράνω του $\mathcal{Y}$. Αν έχουμε ένα $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ορίζουμε το σύνολο

$$\forall^{\mathcal{Y}} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \forall y\, (x, y) \in P\}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\forall^{\mathcal{Y}} P = \mathrm{c}_{\mathcal{X}}(\exists^{\mathcal{Y}}(\mathrm{c}_{(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})} P))$. Όπως με πριν ιδιαίτερη σημασία έχουν οι περιπτώσεις όπου $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ και $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$.

(VIII) Ο τελεστής του **φραγμένου υπαρξιακού ποσοδείκτη** $\exists^{\leqslant}$. Αν έχουμε ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο $\exists^{\leqslant} P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ με

$$(x, n) \in \exists^{\leqslant} P \iff \exists m \leqslant n\, (x, m) \in P.$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\exists^{\leqslant} P$ παραμένει υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$. Επίσης βλέπουμε ότι το $\exists^{\leqslant} P$ "προσομοιάζει" την πεπερασμένη ένωση συνόλων. Το καινούργιο στοιχείο είναι ότι το "μήκος" της ένωσης (ο φυσικός αριθμός $n + 1$) αποτελεί μεταβλητή.

(IX) Ο τελεστής του **φραγμένου καθολικού ποσοδείκτη** $\forall^{\leqslant}$. Αν έχουμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο $\forall^{\leqslant} P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ με

$$(x, n) \in \forall^{\leqslant} P \iff \forall m \leqslant n\, (x, m) \in P.$$

Όπως πιο πάνω το σύνολο $\forall^{\leqslant} P$ παραμένει υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$. Επίσης το $\forall^{\leqslant} P$ "προσομοιάζει" την πεπερασμένη τομή συνόλων όπου το "μήκος" της τομής αποτελεί μεταβλητή.

(X) Ο τελεστής της **πεπερασμένης ένωσης** $\bigvee_{\leqslant}$. Αν έχουμε πεπερασμένα το πλήθος $P_0, \dots, P_n \subseteq \mathcal{X}$ τότε ορίζουμε το σύνολο

$$\bigvee_{\leqslant} (P_0, \dots, P_n) = P_0 \cup \cdots \cup P_n.$$

Με άλλα λόγια το $\bigvee_{\leqslant} (P_0, \dots, P_n)$ είναι η πεπερασμένη ένωση των συνόλων $P_0, \dots, P_n$. Διευκρινίζουμε ότι το n είναι τυχαίος φυσικός αριθμός. Δηλαδή το πεδίο εφαρμογής του τελεστή $\bigvee_{\leqslant}$ είναι *όλες* οι μη κενές πεπερασμένες ακολουθίες υποσυνόλων του *ίδιου* χώρου.

(XI) Ο τελεστής της **πεπερασμένης τομής** $\bigwedge_{\leqslant}$. Αν έχουμε πεπερασμένα το πλήθος $P_0, \ldots, P_n \subseteq \mathcal{X}$ τότε ορίζουμε το σύνολο

$$\bigwedge_{\leqslant}(P_0, \ldots, P_n) = P_0 \cap \cdots \cap P_n.$$

Με άλλα λόγια το $\bigwedge_{\leqslant}(P_0, \ldots, P_n)$ είναι η πεπερασμένη ένωση των συνόλων $P_0, \ldots, P_n$ και το πεδίο εφαρμογής του τελεστή $\bigwedge_{\leqslant}$ είναι *όλες* οι μη κενές πεπερασμένες ακολουθίες υποσυνόλων του *ίδιου* χώρου.

Σημείωση: Κάποιες φορές θα αναφερόμαστε στους πιο πάνω τελεστές για υποσύνολα μετρικών χώρων X, που δεν προκύπτουν απαραίτητα από Πολωνικούς. Ο ορισμός δίνεται με τον προφανή τρόπο.

Στον ακόλουθο πίνακα παραθέτουμε συνοπτικά όλους του προηγούμενους τελεστές μαζί με το πεδίο εφαρμογής τους και το είδος του συνόλου που παράγουν.

Τελεστής	Εφαρμόζεται σε	Παράγει
$\vee, \&$	$P, Q \subseteq \mathcal{X}$	υποσύνολο του $\mathcal{X}$
c	$P \subseteq \mathcal{X}$	υποσύνολο του $\mathcal{X}$
$\exists^{\mathcal{Y}}, \forall^{\mathcal{Y}}$	$P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$	υποσύνολο του $\mathcal{X}$
$\exists^{\mathbb{N}}, \forall^{\mathbb{N}}$	$P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$	υποσύνολο του $\mathcal{X}$
$\bigvee_{\mathbb{N}}, \bigwedge_{\mathbb{N}}$	$(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})^{\mathbb{N}}$	υποσύνολο του $\mathcal{X}$
$\exists^{\leqslant}, \forall^{\leqslant}$	$P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$	υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$
$\bigvee_{\leqslant}, \bigwedge_{\leqslant}$	$(P_0, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}(\mathcal{X})^{<\mathbb{N}}$	υποσύνολο του $\mathcal{X}$

Επίσης συνοψίζουμε στον ακόλουθο πίνακα την αναλογία που σχολιάσαμε προηγουμένως μεταξύ των τελεστών που περιέχουν τον όρο $(x, n) \in P$ και αυτών που περιέχουν τον όρο $x \in P_n$.

Όρος $(x,n) \in P$	Όρος $x \in P_n$
$\exists^{\mathbb{N}}$	$\bigvee_{\mathbb{N}}$
$\forall^{\mathbb{N}}$	$\bigwedge_{\mathbb{N}}$
$\exists^{\leqslant}$	$\bigvee_{\leqslant}$
$\forall^{\leqslant}$	$\bigwedge_{\leqslant}$

Αργότερα εξηγούμε εκτενέστερα τη σχέση μεταξύ των τελεστών της αριστερής στήλης και αυτών της δεξιάς. (Δείτε τα 3.2.6 - 3.2.10 καθώς και τη συζήτηση που προηγείται.)

Ορισμός 3.1.2. Για κάθε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ και κάθε $y \in \mathcal{Y}$ ορίζουμε το σύνολο

$$P_y = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, y)\}.$$

Το P_y είναι η y**-τομή (section)** του συνόλου P.

Μπορεί κανείς να θεωρήσει την y-τομή ως τελεστή σε σύνολα, αλλά δεν μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη αυτή η θεώρηση.

Ειδική περίπτωση αυτού του ορισμού είναι όταν $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ οπότε για κάθε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ λαμβάνουμε την ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των **τομών** του P. Στην περίπτωση $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ το n στο δείκτη μπορεί να έχει δύο έννοιες: α) την n-τομή και β) το n-στο σύνολο μιας δοσμένης ακολουθίας, θα είναι σαφές από το κείμενο σε ποια από τις δύο έννοιες αναφερόμαστε.

Γενικότερα, *εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά*, θα φροντίζουμε όταν έχουμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τότε η P_n να είναι n-τομή του συνόλου P έτσι που οι δύο έννοιες να συμβαδίζουν.

Ορισμός 3.1.3. Με τον όρο **κλάση συνόλων** εννοούμε τη συλλογή όλων των συνόλων σε μετρικούς χώρους που χαρακτηρίζονται από μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Για παράδειγμα θα αναφερόμαστε στην κλάση των *ανοικτών* συνόλων. Οι κλάσεις θα συμβολίζονται συνήθως με Γ. Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά οι κλάσεις συνόλων θα αναφέρονται σε υποσύνολα *Πολωνικών* χώρων.

Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε κλάση συνόλων Γ θέτουμε

$$\Gamma(\mathcal{X}) = \{A \subseteq \mathcal{X} \mid \text{το } A \text{ ανήκει στην κλάση } \Gamma\}.$$

Θα λέμε ότι ένα $A \subseteq \mathcal{X}$ είναι Γ **υποσύνολο** του $\mathcal{X}$ αν $A \in \Gamma(\mathcal{X})$.

Θα αναφερόμαστε επίσης σε **κλάση συναρτήσεων**. Με αυτό τον όρο θα εννοούμε μια συλλογή συναρτήσεων ανάμεσα σε μετρικούς χώρους (συνήθως Πολωνικούς) που χαρακτηρίζονται από μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Για παράδειγμα έχουμε την κλάση των συνεχών συναρτήσεων. Όταν θα λέμε *κλάση* χωρίς να διευκρινίζουμε αν πρόκειται για σύνολα ή συναρτήσεις *θα εννοούμε πάντα κλάση συνόλων*.

Επεκτείνουμε τη σχέση του εγκλεισμού και τις στοιχειώδεις συνολοθεωρητικές πράξεις στις κλάσεις *για υποσύνολα του ίδιου χώρου*: αν έχουμε κλάσεις Γ_0 και Γ_1 ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 &\iff \text{κάθε στοιχείο της } \Gamma_0 \text{ είναι στοιχείο της } \Gamma\\
\Gamma_0 \cup \Gamma_1 &= \text{η κλάση όλων των } A \text{ που ανήκουν στην } \Gamma_0 \textit{ ή } \text{στην } \Gamma_1\\
\Gamma_0 \cap \Gamma_1 &= \text{η κλάση όλων των } A \text{ που ανήκουν στην } \Gamma_0 \textit{ και } \text{στην } \Gamma_1\\
\Gamma_0 \setminus \Gamma_1 &= \text{η κλάση όλων των } A \text{ που ανήκουν στη } \Gamma_0 \textit{ και δεν } \text{ανήκουν στη } \Gamma_1.
\end{aligned}$$

Επίσης ορίζουμε την ένωση $\bigcup_{k\leqslant n} \Gamma_k$ και τομή $\bigcap_{k\leqslant n} \Gamma_k$ των κλάσεων $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n$ με τον προφανή τρόπο. Όμοια ορίζουμε την άπειρη ένωση και άπειρη τομή κλάσεων.

Αν Φ είναι ένας από τους προηγούμενους τελεστές, π.χ. $\Phi = \exists^{\mathcal{N}}$, συμβολίζουμε με ΦΓ την **κλάση που προκύπτει από όλα τα σύνολα της μορφής** ΦP όπου το P ανήκει στη Γ και εμπίπτει στο πεδίο εφαρμογής του Φ. Ο ανάλογος συμβολισμός δίνεται για τους τελεστές που αναφέρονται σε δύο σύνολα ή σε μια ακολουθία συνόλων. Για παράδειγμα έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{c}\Gamma &= \text{η συλλογή όλων των } \mathrm{c}_{\mathcal{X}} P = \mathcal{X} \setminus P \text{ όπου } P \in \Gamma(\mathcal{X}),\\
&\quad\ \text{για κάποιον Πολωνικό χώρο } \mathcal{X}\\
\vee\Gamma &= \text{η συλλογή όλων των } A \vee B = A \cup B \text{ όπου } A, B \in \Gamma(\mathcal{X}),\\
&\quad\ \text{για κάποιον Πολωνικό χώρο } \mathcal{X}\\
\exists^{\mathcal{Y}}\Gamma &= \text{η συλλογή όλων των } \exists^{\mathbb{N}} P \text{ όπου } P \in \Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}),\\
&\quad\ \text{για κάποιον Πολωνικό χώρο } \mathcal{X}\\
\textstyle\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma &= \text{η συλλογή όλων των } \textstyle\bigvee_{\mathbb{N}} (P_i)_{i\in\mathbb{N}} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i\\
&\quad\ \text{όπου } P_i \in \Gamma(\mathcal{X}),\ i \in \mathbb{N}, \text{ για κάποιον Πολωνικό χώρο } \mathcal{X}.
\end{aligned}$$

Ορισμός 3.1.4. Θα λέμε ότι η κλάση Γ είναι **κλειστή ως προς τον τελεστή** Φ αν το αποτέλεσμα της εφαρμογής του Φ στα σύνολα της Γ που εμπίπτουν στο πεδίο εφαρμογής του είναι σύνολο που ανήκει στη Γ, ισοδύναμα $\Phi\Gamma \subseteq \Gamma$.

Για παράδειγμα η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\vee$ αν για κάθε $P, Q \in \Gamma(\mathcal{X})$ η ένωση $P \vee Q$ ανήκει στη $\Gamma(\mathcal{X})$, ενώ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{N}}$ αν για κάθε $P \in \Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{N})$ το σύνολο $\exists^{\mathcal{N}} P$ ανήκει στην $\Gamma(\mathcal{X})$.

Μια κλάση Γ είναι **κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση** αν για κάθε συνεχή συνάρτηση

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

και κάθε $Q \in \Gamma(\mathcal{Y})$ έχουμε $f^{-1}[Q] \in \mathcal{X}(\Gamma)$, ισοδύναμα το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ που ορίζεται ως εξής

$$x \in P \iff f(x) \in Q$$

ανήκει στη Γ.

Για παράδειγμα η κλάση των ανοικτών συνόλων είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση γιατί η αντίστροφη εικόνα ενός ανοικτού συνόλου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι ανοικτό σύνολο.

Στις εφαρμογές οι χώροι $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι συνήθως πεπερασμένα γινόμενα $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ και $\mathcal{Y}_1 \times \cdots \times \mathcal{Y}_m$ αντίστοιχα.

Γενικότερα αν έχουμε μια κλάση από συναρτήσεις Γ' θα λέμε ότι η Γ είναι **κλειστή ως προς Γ'-αντικατάσταση** αν για κάθε $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ που ανήκει στην Γ' και για κάθε $Q \in \Gamma(\mathcal{Y})$ έχουμε $f^{-1}[Q] \in \mathcal{X}(\Gamma)$. Επομένως η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση είναι κλειστότητα ως προς Γ'-αντικατάσταση όπου $\Gamma' =$ κλάση όλων των συνεχών συναρτήσεων.

Παρατήρηση 3.1.5. Η κλειστότητα μια κλάσης Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση μας επιτρέπει να (i) αναδιατάξουμε n-αδες μεταβλητών καθώς και (ii) να παραλείψουμε μερικές μεταβλητές χωρίς να εξέλθουμε της κλάσης.

Συγκεκριμένα για (i) πιο πάνω: αν έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ τότε για κάθε συνάρτηση

$$\tau : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

και κάθε σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X}_{\tau(1)} \times \cdots \times \mathcal{X}_{\tau(n)}$ που ανήκει στη Γ, το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ που ορίζεται ως εξής

$$(x_1, \ldots, x_n) \in P \iff (x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) \in Q$$

ανήκει επίσης στη Γ.

Ο ισχυρισμός είναι άμεσος από το ότι η συνάρτηση

$$f : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_{\tau(1)} \times \cdots \times \mathcal{X}_{\tau(n)}$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}).$$

είναι συνεχής.

Για το (ii) πιο πάνω: αν έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ τότε για κάθε συνάρτηση προβολής

$$\mathrm{pr} : \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_{k_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{k_m}$$
$$\mathrm{pr}(x_1, \ldots, x_n) = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_m})$$

και κάθε $Q \subseteq \mathcal{X}_{k_1} \times \cdots \times \mathcal{X}_{k_m}$ που ανήκει στη Γ το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ με

$$(x_1, \ldots, x_n) \in P \iff (x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}) \in Q$$

ανήκει επίσης στη Γ. Αυτό συμβαίνει γιατί η συνάρτηση της προβολής pr είναι συνεχής και προφανώς $P = \mathrm{pr}^{-1}[Q]$.

Ως *παράδειγμα εφαρμογής* των προηγουμένων ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια κλάση Γ, τρεις Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$, και δύο σύνολα $Q_0 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $Q_1 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Y}$, που ανήκουν στη Γ. Τότε τα σύνολα $P_0 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ και $P_1 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ που ορίζονται ως εξής,

$$(x, y, z) \in P_0 \iff (x, y) \in Q_0$$
$$(x, y, z) \in P_1 \iff (x, z, y) \in Q_1$$

ανήκουν επίσης στη Γ. Για να το δούμε αυτό παίρνουμε $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$, $\mathcal{X}_2 = \mathcal{Z}$ και $\mathcal{X}_3 = \mathcal{Y}$ και εφαρμόζουμε την παρατήρηση παίρνοντας

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pr} : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \to \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 : \mathrm{pr}(x, y, z) = (x, y)\\
&\tau : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\} : \tau_1(1) = 1, \tau_1(2) = 3, \tau_1(3) = 2.
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα εφαρμόζουμε την παρατήρηση χωρίς αναφορά στις λεπτομέρειες. Ως κανόνα έχουμε ότι μπορούμε να *αναδιατάξουμε και να παραλείψουμε μεταβλητές παραμένοντας στην κλάση*.

Παρατήρηση 3.1.6. Υπό κάποιες προϋποθέσεις για την κλάση Γ μπορούμε να παραμείνουμε σε αυτήν αν αντικαταστήσουμε τον όρο $n \leqslant m$ με τον πιο γενικό $n \leqslant f(x, y)$ όπου η $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{N}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Συγκεκριμένα θεωρούμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή $\exists^{\leqslant}$, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και ένα σύνολο $P \in \Gamma(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$.

Τότε για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ και κάθε συνεχή συνάρτηση $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{N}$ το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ με

$$(x, y) \in Q \iff \exists n \leqslant f(x, y)\ (x, n) \in P$$

ανήκει στη Γ.

Για να το δούμε αυτό θεωρούμε το σύνολο S με

$$(x, m) \in S \iff \exists n \leqslant m\ (x, n) \in P$$

και παρατηρούμε ότι

$$(x, y) \in Q \iff \exists n \leqslant f(x, y)\ (x, n) \in P \iff (x, f(x, y)) \in S.$$

Το σύνολο S ανήκει στην κλάση $\exists^{\leqslant}\Gamma \subseteq \Gamma$. Η συνάρτηση $h(x, y) = (x, f(x, y))$ είναι συνεχής και από το πιο πάνω ισχύει $Q = h^{-1}[S]$. Λόγω της κλειστότητας της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση έχουμε ότι το Q ανήκει επίσης στην Γ.

3.2. Εκτιμήσεις με βάση τους τελεστές

Όταν θέλουμε να περιγράψουμε ένα σύνολο δίνουμε συνήθως έναν προτασιακό τύπο με βάση τους γνωστούς λογικούς ποσοδείκτες (καθολικό και υπαρξιακό) και τους λογικούς τελεστές (σύζευξη, διάζευξη, άρνηση, συνεπαγωγή). Ο τύπος καταλήγει σε μια πιο απλή έκφραση.

Για παράδειγμα το σύνολο Bd_A *όλων των φραγμένων ακολουθιών μέσα από ένα δοσμένο σύνολο* $A \subseteq \mathbb{R}$ περιγράφεται ως εξής:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Bd_A \iff \exists k\ \forall n\ (x_n \in A\ \&\ |x_n| \leqslant k).$$

Αυτή η πιο "απλή έκφραση" που αναφέρουμε πιο πάνω ορίζει στην ουσία ένα σύνολο του οποίου οι μεταβλητές είναι κάποιες (ίσως όλες) από τις αρχικές μεταβλητές μαζί με όσες μεταβλητές εμφανίστηκαν μπροστά από τους λογικούς ποσοδείκτες. Στο προηγούμενο παράδειγμα αυτό το σύνολο είναι το

$$C_A = \{((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, n, k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x_n \in A\ \&\ |x_n| \leqslant k\}$$

έτσι που $Bd_A = \exists^{\mathbb{N}}\forall^{\mathbb{N}} C_A$.

Αν το σύνολο A ανήκει σε μια κλάση Γ είναι φυσικό να αναρωτηθούμε σε ποια κλάση ανήκει το Bd_A. Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι το προηγούμενο C_A ανήκει επίσης στη Γ και ότι η Γ είναι κλειστή ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$. Τότε είναι σαφές ότι το $Bd_A = \exists^{\mathbb{N}}\forall^{\mathbb{N}} C_A$ ανήκει στην $\exists^{\mathbb{N}}\forall^{\mathbb{N}}\Gamma \subseteq \exists^{\mathbb{N}}\Gamma$.

Στη συνέχεια δίνουμε μια μέθοδο εκτίμησης της κλάσης στην οποία ανήκει το σύνολο που ασχολούμαστε με βάση την περιγραφή του και τις ιδιότητες κλειστότητας της Γ.

Παράδειγμα 3.2.1. Παίρνουμε μια κλάση Γ που είναι συνεχή ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή της διάζευξης. Όπως είδαμε πιο πάνω μπορούμε να αναδιατάξουμε ή να παραλείψουμε μεταβλητές χωρίς να εξέλθουμε της Γ. Συνδυάζοντας αυτό με την κλειστότητα ως προς $\vee$ μπορούμε να κάνουμε πιο σύνθετους υπολογισμούς.

Παίρνουμε δύο σύνολα $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Y}$, $R \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ που ανήκουν στη Γ και ορίζουμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ με

$$(x, y, z) \in P \iff (x, z, y) \in Q \quad \text{ή} \quad (y, z) \in R.$$

Δείχνουμε ότι το P ανήκει στη Γ. Για να το δούμε αυτό παίρνουμε τα σύνολα Q^*, R^* με

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in Q^* &\iff (x, z, y) \in Q\\ (x, y, z) \in R^* &\iff (y, z) \in R\end{aligned}$$

έτσι που

$$(x, y, z) \in P \iff (x, y, z) \in Q^* \ \vee \ (x, y, z) \in R^*.$$

Από την κλειστότητα της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή $\vee$ έχουμε ότι τα σύνολα Q^*, R^* και $P = Q^* \vee R^*$ ανήκουν στη Γ.

Παράδειγμα 3.2.2. Η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση εφαρμόζεται χωρίς πολλές λεπτομέρειες και σε συναρτήσεις που είναι πιο σύνθετες από αυτές της Παρατήρησης 3.1.5 (αναδιάταξη και παράλειψη μεταβλητών). Για παράδειγμα θυμίζουμε την $(\alpha)_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : t \mapsto \alpha(\langle 0, t\rangle)$, δείτε τη (2.12).

Από την Άσκηση 2.3.18 η συνάρτηση $h : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : h(\alpha, n) = (\alpha)_n$ είναι συνεχής και συνεπώς η $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : f(\alpha) = (\alpha)_0 = h(\alpha, 0)$ είναι επίσης συνεχής.

Θεωρούμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και παίρνουμε ένα $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ που ανήκει στη Γ. Ορίζουμε το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με

$$(x, \alpha) \in P \iff (x, (\alpha)_0) \in Q.$$

Τότε το P ανήκει επίσης στη Γ. (Με λεπτομέρεια αυτό συμβαίνει γιατί $P = g^{-1}[Q]$ όπου $g : \mathcal{X} \times \mathcal{N} \to \mathcal{X} \times \mathcal{N} : g(x, \alpha) = (x, (\alpha)_0)$, προφανώς η g είναι συνεχής.)

Φυσικά μπορούμε να συνδυάσουμε το προηγούμενο με αναδιάταξη και παράλειψη μεταβλητών. Για παράδειγμα αν πάρουμε το Q από πιο πάνω, τότε το σύνολο $P' \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ με

$$(\alpha, \beta, x) \in P' \iff (x, (\alpha)_0) \in Q$$

ανήκει επίσης στη Γ. (Με λεπτομέρεια αυτό συμβαίνει γιατί $P' = r^{-1}[Q]$ όπου $r : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{N} : r(\alpha, \beta, x) = (x, (\alpha)_0)$, προφανώς η r είναι συνεχής.)

Παράδειγμα 3.2.3. Θεωρούμε όπως πριν μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση όπως επίσης τη συνεχή συνάρτηση $h : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : h(\alpha, n) = (\alpha)_n$. Τότε για κάθε σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ που ανήκει στη Γ το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathbb{N}$ με

$$(x, \alpha, n) \in P \iff (x, (\alpha)_n) \in Q$$

ανήκει επίσης στη Γ. Όπως πιο πάνω αυτό είναι σαφές από την κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση. Στη συνέχεια μπορούμε να πάρουμε το σύνολο $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με

$$(x, \alpha) \in R \iff \forall n\, (x, \alpha, n) \in P \iff \forall n\, (x, (\alpha)_n) \in Q.$$

Είναι τότε σαφές ότι το R ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathbb{N}}\Gamma$.

Παράδειγμα 3.2.4. Επανερχόμαστε στο αρχικό παράδειγμα του συνόλου $Bd_A \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *όλων των φραγμένων ακολουθιών μέσα από ένα δοσμένο σύνολο* $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Bd_A \iff \exists k\, \forall n\, (x_n \in A \,\&\, |x_n| \leqslant k).$$

Παίρνουμε για Γ την κλάση όλων των κλειστών συνόλων. Αυτή είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, γιατί η αντίστροφη εικόνα ενός κλειστού συνόλου μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό σύνολο. Επίσης είναι κλειστή ως προς τον τελεστή & (τομή δύο κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο), και όπως θα δούμε αργότερα είναι επίσης κλειστή ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$. Για τους σκοπούς του παραδείγματος θεωρούμε δεδομένο ότι η κλάση η $\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$ είναι ακριβώς η κλάση των F_σ συνόλων.

Δείχνουμε ότι αν το A είναι κλειστό σύνολο τότε το Bd_A είναι F_σ σύνολο, δηλαδή ότι ανήκει στην $\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$. Αυτό είναι σαφές σε σχέση με τα προηγούμενα, τα πιο κάτω σύνολα ανήκουν στη Γ λόγω της κλειστότητας ως προς συνεχή αντικατάσταση και $\forall^{\mathbb{N}}$:

$$((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, k, n) \in F_1 \iff x_n \in A$$

(παίρνουμε τη συνεχή συνάρτηση $g((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, k, n) = x_n$ έτσι που $F_1 = g^{-1}[A]$)

$$((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, k, n) \in F_2 \iff |x_n| \leqslant k$$

(παίρνουμε τη συνεχή συνάρτηση $h((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, k, n) = k - |x_n|$ έτσι που $F_2 = h^{-1}[[0,\infty)]$)

$$((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, k, n) \in F_3 \iff ((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, n, k) \in F_1 \;\&\; ((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, k, n) \in F_2$$
$$((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, k, n) \in F_4 \iff \forall n \; ((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, n, k) \in F_3.$$

Είναι σαφές ότι $Bd_A = \exists^{\mathbb{N}} F_4$ και επομένως το Bd_A ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$.

Διαγραμματικός Συλλογισμός. Αντί να γράφουμε κάθε φορά ένα ξεχωριστό σύνολο μπορούμε να συνοψίσουμε την προηγούμενη ανάλυση χρησιμοποιώντας διαγράμματα ως εξής:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Bd_A \iff \underbrace{\exists k \; \underbrace{\forall n \; \underbrace{(\underbrace{x_n \in A}_{\Gamma} \;\&\; \underbrace{|x_n| \leqslant k}_{\Gamma})}_{\&\Gamma\subseteq\Gamma}}_{\forall^{\mathbb{N}}\Gamma\subseteq\Gamma}}_{\exists^{\mathbb{N}}\Gamma}.$$

[Πιο αναλυτικά στον προτασιακό τύπο της παρένθεσης "$x_n \in A \;\&\; |x_n| \leqslant k$" θεωρούμε για μεταβλητές τα $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, k και n. Όταν γράφουμε για παράδειγμα $\underbrace{x_n \in A}_{\Gamma}$ εννοούμε ότι το σύνολο όλων των τριάδων $((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, k, n)$ για τις οποίες ισχύει $x_n \in A$ ανήκει στη Γ. Στον προτασιακό τύπο "$\forall n \; (x_n \in A \;\&\; |x_n| \leqslant k)$" θεωρούμε για μεταβλητές τα $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ και k. Όταν γράφουμε $\underbrace{\forall n \; (x_n \in A \;\&\; |x_n| \leqslant k)}_{\forall^{\mathbb{N}}\Gamma\subseteq\Gamma}$ εννοούμε ότι το σύνολο όλων των ζευγών $((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, k)$ για τα οποία ισχύει $\forall n \; (x_n \in A \;\&\; |x_n| \leqslant k)$ ανήκει στη $\forall^{\mathbb{N}}\Gamma$ η οποία περιέχεται στη Γ λόγω της κλειστότητας της τελευταίας ως προς συνεχή αντικατάσταση. Όμως θα αποφεύγουμε την αναφορά σε τόσες λεπτομέρειες.]

Αυτή είναι μια αρκετά ισχυρή και κομψή μέθοδος καθώς μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την κλάση στην οποία ανήκει το δοσμένο σύνολο **κατευθείαν από την περιγραφή του** και με σχετικά **άμεσο τρόπο**.

Για να αναδείξουμε το τελευταίο ας επιχειρήσουμε να δείξουμε ότι το σύνολο Bd_A του Παραδείγματος 3.2.4 είναι F_σ σύνολο με κλασσικές μεθόδους παίρνοντας δεδομένο ότι το A είναι κλειστό. Αρχικά ορίζουμε τα σύνολα $F_{n,k}$, $M_{n,k}$, $M_{n,k}$, όπου $k, n \in \mathbb{N}$ ως εξής:

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in F_{n,k} \iff x_n \in A$$
$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in M_{n,k} \iff |x_n| \leqslant k$$
$$L_{n,k} = F_{n,k} \cap M_{n,k}.$$

Αυτά είναι εύκολα κλειστά σύνολα. Επιπλέον

$$Bd_A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_{n,k}.$$

Το σύνολο $N_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_{n,k}$ είναι κλειστό ως τομή κλειστών, συνεπώς το $Bd_A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών δηλαδή F_σ.

Η κομψότητα του διαγραμματικού συλλογισμού γίνεται πιο εμφανής σε πιο σύνθετα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.2.5. Θεωρούμε μια κλάση Γ που περιέχει τα κλειστά σύνολα και που είναι κλειστή ως προς τους τελεστές $\vee$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\exists^{\mathcal{N}}$ και συνεχή αντικατάσταση. Ορίζουμε το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P \iff \forall n\, \exists\alpha\, \forall m\, (x = f_n(\alpha) \ \vee\ g_m(x,\alpha) = 0)$$

όπου οι $f_n, g_m, m, n \in \mathbb{N}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Δείχνουμε ότι το P ανήκει στη Γ. Αυτό είναι άμεσο με χρήση του διαγραμματικού συλλογισμού που περιγράψαμε προηγουμένως και των ιδιοτήτων κλειστότητας της Γ:

$$x \in P \iff \underbrace{\forall n\ \underbrace{\exists\alpha\ \underbrace{\forall m\ \underbrace{(\underbrace{x = f_n(\alpha)}_{\Gamma} \ \vee\ \underbrace{g_m(x,\alpha) = 0}_{\Gamma})}_{\vee\Gamma\subseteq\Gamma}}_{\forall^{\mathbb{N}}\Gamma\subseteq\Gamma}}_{\exists^{\mathcal{N}}\Gamma\subseteq\Gamma}}_{\forall^{\mathbb{N}}\Gamma\subseteq\Gamma}.$$

Αφήνουμε για άσκηση την αντίστοιχη κλασσική απόδειξη με βάση τις συνολοθεωρητικές ισότητες ότι το προηγούμενο P ανήκει στη Γ (Άσκηση 3.2.13, για να γίνουν πιο εμφανείς οι διαφορές κάνουμε μια μικρή αναδιατύπωση του προβλήματος.)

Ο υπαρξιακός ποσοδείκτης υπεράνω του $\mathbb{N}$ και η αριθμήσιμη ένωση. Όπως γίνεται σαφές από τα προηγούμενα υπάρχει μια αλληλεπίδραση ανάμεσα στους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Για παράδειγμα αναφέραμε ότι αν Γ είναι η κλάση όλων των κλειστών συνόλων τότε η $\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$ συμπίπτει με την κλάση όλων των F_σ συνόλων, δηλαδή με την $\bigvee_{\mathbb{N}} \Gamma$.

Φαίνεται ότι οι τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\mathbb{N}}$ περιγράφουν την ίδια μαθηματική έννοια, καθώς και οι δύο αναφέρονται στην ύπαρξη κάποιου φυσικού αριθμού n ώστε το δοσμένο x να ανήκει σε ένα σύνολο P_n. Συγκεκριμένα:

Αν έχουμε μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων κάποιου Πολωνικού χώρου και ορίσουμε

$$P = \{(x,n) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid x \in P_n\} \tag{3.1}$$

τότε είναι άμεσο πως $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Αντίστροφα αν έχουμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και ορίσουμε

$$P_n = \{x \in \mathcal{X} \mid (x,n) \in P\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

τότε πάλι έχουμε $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

Με άλλα λόγια βλέπουμε ότι ο ένας τελεστής *ανάγεται* στον άλλο. *Δεν σημαίνει όμως* ότι η *κλειστότητα* μιας κλάσης Γ ως προς τον έναν τελεστή *είναι το ίδιο με την κλειστότητα* της Γ ως προς τον άλλον.

Για να εξηγήσουμε το τελευταίο καλύτερα ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$ και ας εξετάσουμε αν η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Θεωρούμε μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων κάποιου Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην Γ. Σύμφωνα με όσα περιγράψαμε πιο πάνω υπάρχει ένας "φυσιολογικός" τρόπος να προχωρήσουμε.

Θεωρούμε το σύνολο P όπως ορίζεται στην (3.1) έτσι που $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Αν γνωρίζαμε ότι το P ανήκει στη Γ τότε λόγω της κλειστότητας της Γ ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ θα είχαμε

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n = \exists^{\mathbb{N}} P \in \Gamma(\mathcal{X}).$$

Εδώ ακριβώς εντοπίζεται η διαφορά ανάμεσα στους δύο τελεστές. *Δεν είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε ότι το προηγούμενο σύνολο P ανήκει στη* Γ χωρίς να γνωρίζουμε κάτι περισσότερο για τη δομή της Γ. Συνεπώς ο "φυσιολογικός" τρόπος για να δείξουμε ότι η κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ συνεπάγεται και την κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ αποτυγχάνει.

Μάλιστα υπάρχουν παραδείγματα κλάσεων Γ που είναι κλειστές ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ αλλά όχι ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Ένα τέτοιο παράδειγμα κλάσης Γ μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα (Άσκηση 3.2.11). Το παράδειγμα είναι κάπως τεχνητό αλλά υπάρχουν και άλλα παραδείγματα τέτοιων κλάσεων Γ που προκύπτουν με πιο φυσιολογικό τρόπο. Αυτές οι κλάσεις είναι αντικείμενο μελέτης της *κατασκευαστικής* περιγραφικής θεωρίας συνόλων (effective descriptive set theory) που δεν μας απασχολεί στο παρόν σύγγραμμα.

Ο αντίστοιχος συλλογισμός μπορεί να γίνει αν αλλάξουν θέσεις οι δύο τελεστές. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις και ας επιχειρήσουμε να δείξουμε ότι η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$. Θεωρούμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ανήκει στη Γ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε P_n όπως στην (3.2) ώστε να έχουμε $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

Αν γνωρίζαμε ότι κάθε P_n ανήκει στη Γ, λόγω της κλειστότητας της τελευταίας ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ θα είχαμε ότι $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ που είναι στη Γ. Όμως, όμοια με πριν, δεν είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε ότι τα σύνολα P_n, $n \in \mathbb{N}$, ανήκουν στη Γ. Για την ακρίβεια μπορεί κανείς να δώσει παραδείγματα κλάσεων Γ που είναι είναι κλειστές ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ αλλά όχι ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ (Άσκηση 3.2.12). Σε αυτή την περίπτωση όμως, τα παραδείγματα που γνωρίζουμε είναι τεχνητά. Στις κλάσεις Γ που προκύπτουν με φυσιολογικό τρόπο, η κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ συνεπάγεται και κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$. Αυτό γίνεται εμφανές από το επόμενο αποτέλεσμα και την παρατήρηση που το ακολουθεί.

Πρόταση 3.2.6. Για κάθε κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση έχουμε τα εξής.

(i) Αν το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ανήκει στη Γ τότε για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ η y-τομή

$$P_y = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, y) \in P\}$$

ανήκει επίσης στη Γ.

(ii) Προκύπτει ότι ισχύει η εξής συνεπαγωγή,

$$\Gamma\text{: κλειστή ως προς } \bigvee_{\mathbb{N}} \implies \Gamma\text{: κλειστή ως προς } \exists^{\mathbb{N}}.$$

Απόδειξη. Για το (i) θεωρούμε $y \in \mathcal{Y}$ και παρατηρούμε ότι

$$x \in P_y \iff (x, y) \in P \iff a_{\mathcal{X},y}(x) \in P \iff x \in a^{-1}_{\mathcal{X},y}[P]$$

όπου

$$a_{\mathcal{X},y} : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : a_{\mathcal{X},y}(x) = (x, y).$$

Είναι σαφές ότι οι $a_{\mathcal{X},y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Επομένως από την κλειστότητα της Γ ως προς συνεχή αντικατάσταση προκύπτει ότι το σύνολο P_y ανήκει στη Γ για κάθε $y \in \mathcal{Y}$.

Για το (ii) εφαρμόζουμε τις παρατηρήσεις της προηγούμενης συζήτησης για $\mathcal{Y} = \mathbb{N}$ και το (i). Θεωρούμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ανήκει στη Γ και δείχνουμε ότι το σύνολο $\exists^{\mathbb{N}} P \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει επίσης στη Γ. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x \in \exists^{\mathbb{N}} P &\iff \exists n\, (x, n) \in P \\ &\iff \exists n\, x \in P_n \end{aligned}$$

όπου P_n είναι η n-τομή $\{x \in \mathcal{X} \mid (x, n) \in P\}$. Από το (i) κάθε P_n ανήκει στη Γ και από την κλειστότητα της Γ ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ έχουμε ότι το σύνολο $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} a^{-1}_{\mathcal{X},n}[P]$ ανήκει επίσης στη Γ. □

Παρατήρηση 3.2.7. Είναι άμεσο ότι τα συμπεράσματα στα (i) και (ii) της προηγούμενης πρότασης ισχύουν ακόμα και αν η Γ είναι κλειστή ως προς την αντικατάσταση από μια μικρή συλλογή συνεχών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα στην προηγούμενη πρόταση αρκεί να υποθέσει κανείς ότι η Γ είναι κλειστή ως προς Γ'-αντικατάσταση, όπου Γ' είναι η κλάση όλων των συναρτήσεων $a_{\mathcal{X},y}$ της τελευταίας απόδειξης.

Η κλειστότητα ως προς Γ'-αντικατάσταση είναι το ελάχιστο που θα θέλαμε να ικανοποιεί μια ενδιαφέρουσα κλάση Γ, συνεπώς για τις ενδιαφέρουσες κλάσεις η κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ συνεπάγεται την κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας βοηθά να συμπεράνουμε την αντίστροφη συνεπαγωγή της Πρότασης 3.2.6.

Πρόταση 3.2.8. *Θεωρούμε μια κλάση Γ που ικανοποιεί την ιδιότητα:*

$$\left\{\begin{array}{l}\text{για κάθε Πολωνικό χώρο } \mathcal{X} \text{ και κάθε ακολουθία } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ από}\\ \text{σύνολα της } \Gamma(\mathcal{X}) \text{ το σύνολο } P \subseteq \mathcal{X}\times\mathbb{N} \text{ που ορίζεται ως εξής}\\ \qquad\qquad (x,n)\in P \iff x\in P_n\\ \text{ανήκει στη } \Gamma.\end{array}\right. \tag{3.3}$$

Αν η Γ είναι επιπλέον κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$, τότε είναι επίσης κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από υποσύνολα του ίδιου χώρου $\mathcal{X}$ που ανήκουν στη Γ και το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}\times\mathbb{N}$ που ορίζεται όπως στην (3.3). Από την υπόθεση το P ανήκει στη Γ. Επιπλέον για κάθε $x\in\mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x\in \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n &\iff \exists n\, x\in P_n\\ &\iff \exists n\, (x,n)\in P.\end{aligned}$$

Επομένως αν η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ τότε από τις προηγούμενες ισοδυναμίες το σύνολο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ ανήκει στη Γ και άρα η τελευταία είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$. □

Η προηγούμενη πρόταση είναι προφανής υπό το φως της προηγούμενης συζήτησης, αποτελεί όμως ένα χρήσιμο εργαλείο. Θα δούμε ότι όλες οι κλάσεις που μας απασχολούν στο παρόν σύγγραμμα ικανοποιούν την ιδιότητα (3.3) και επίσης είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση. Με βάση τις τελευταίες δύο προτάσεις συμπεραίνουμε ότι οι κλειστότητες ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\mathbb{N}}$ για τις κλάσεις μας είναι ισοδύναμες ιδιότητες. Αξίζει να απομονώσουμε αυτό τον συλλογισμό σε ένα ξεχωριστό αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.2.9. *Θεωρούμε μια κλάση Γ που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και που ικανοποιεί την πιο πάνω ιδιότητα* (3.3). *Τότε η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Άμεση από τις Προτάσεις 3.2.6 και 3.2.8. □

Τέλος παρατηρούμε ότι τα προηγούμενα ισχύουν και για άλλα ζεύγη τελεστών στη θέση των $(\bigvee_{\mathbb{N}}, \exists^{\mathbb{N}})$.

Πρόταση 3.2.10. *Οι Προτάσεις 3.2.6 και 3.2.8 και συνεπώς το Πόρισμα 3.2.9 ισχύουν αν αντικαταστήσουμε το ζεύγος τελεστών $(\bigvee_{\mathbb{N}}, \exists^{\mathbb{N}})$ με οποιαδήποτε από τα $(\exists^{\leqslant}, \bigvee_{\leqslant})$, $(\forall^{\mathbb{N}}, \bigwedge_{\mathbb{N}})$ και $(\forall^{\leqslant}, \bigwedge_{\leqslant})$.*

Η απόδειξη είναι ουσιαστικά η ίδια – αποφεύγουμε να εισέλθουμε σε περαιτέρω λεπτομέρειες.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.2.11. Θεωρούμε την κλάση Γ των *μονοσυνόλων* σε Πολωνικούς χώρους, δηλαδή

$$\Gamma(\mathcal{X}) = \{\{x\} \mid x\in\mathcal{X}\}$$

για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Εξετάστε την κλειστότητα της Γ ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.2.12. Θεωρούμε την κλάση Γ των υποσυνόλων Πολωνικών χώρων με *τουλάχιστον δύο στοιχεία*, δηλαδή

$$\Gamma(\mathcal{X}) = \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \mid \exists a, b \in A\ a \neq b\}$$

για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Εξετάστε την κλειστότητα της Γ ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.2.13. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και συνεχείς συναρτήσεις

$$f_n : \mathcal{X} \to \mathcal{N}, g_m : \mathcal{X} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}.$$

Ορίζουμε το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ ως εξής,

$$x \in P \iff \forall n\, \exists \alpha\, \forall m\, (x = f_n(\alpha) \ \vee\ g_m(x, \alpha) = 0).$$

Τότε το P γράφεται ως αριθμήσιμη τομή συνόλων που είναι προβολές κλειστών συνόλων.

Άσκηση 3.2.14. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και T κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ (όπου στο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ θεωρούμε τη διακριτή μετρική), έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το σύνολο $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ να είναι δένδρο. Τότε για κάθε $u \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$A_u = \{x \in \mathcal{X} \mid \text{το υποδένδρο } T_u(x) \text{ έχει κόμβους οσοδήποτε μεγάλου μήκους}\}$$

ανήκει στην $\forall^{\mathbb{N}}\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$, όπου Γ είναι η κλάση των κλειστών συνόλων σε Πολωνικούς χώρους.

Άσκηση 3.2.15. *Επαναλαμβάνουμε την Άσκηση 2.5.26 όπου τώρα ζητείται οι υπολογισμοί να γίνουν με χρήση των τελεστών. Συγκρίνετε τις λύσεις των δύο ασκήσεων.*

Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, ένα σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί την ισοδυναμία (2.26),

$$(x, u) \in T \iff \forall v \in J\, \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u|\ (x \notin V_n\ \&\ v \not\sqsubseteq u)$$

και η συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr}$

$$f(x) = T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}.$$

Παίρνουμε δεδομένο ότι η κλάση των κλειστών συνόλων είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\forall^{\mathbb{N}}$. Τότε το T είναι κλειστό σύνολο και για κάθε $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο $P_{u,w} \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P_{u,w} \iff u \in f(x)\ \&\ w \notin f(x)$$

είναι F_σ.

Μάλιστα αν τα V_n είναι κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ τα $P_{u,w}$ είναι ανοικτά σύνολα.

3.3. Οι κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης

Ορισμός 3.3.1. Ορίζουμε με αναδρομή στο $n \geqslant 1$ τις εξής κλάσεις συνόλων σε Πολωνικούς χώρους:

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1 = \text{η κλάση όλων των ανοικτών συνόλων}$$
$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1 = \mathrm{c}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1 = \text{η κλάση όλων των κλειστών συνόλων}$$

και

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1} &= \textstyle\bigvee_{\mathbb{N}}\ \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n \\
&= \text{οι αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων της } \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n \\
\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1} &= \mathrm{c}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1} \\
&= \text{τα συμπληρώματα των συνόλων της } \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}.
\end{aligned}$$

Τέλος θέτουμε

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n \cap \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n.$$

Είναι άμεσο ότι ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$ αν και μόνο αν τα σύνολα P και $\mathcal{X} \setminus P$ ανήκουν στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Επιπλέον είναι εύκολο να δει κανείς (Άσκηση 3.3.11) ότι

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1} = \bigwedge\nolimits_{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n.$$

Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι οι **κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης** ενώ οι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ είναι οι **δυϊκές** (dual) και **αμφίσημες** (ambiguous) αντίστοιχα κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης.

Η συλλογή των προηγούμενων κλάσεων ονομάζεται **ιεραρχία των Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης**.

Παρατήρηση 3.3.2. Η κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ αποτελείται ακριβώς από τα F_σ σύνολα και συνεπώς η $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_2$ αποτελείται ακριβώς από τα G_δ σύνολα.

Πρόταση 3.3.3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε*

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$$

και επομένως ισχύει επίσης

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}(\mathcal{X}).$$

Απόδειξη. Δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X}) \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}(\mathcal{X}). \tag{3.4}$$

Προφανώς από το πιο πάνω προκύπτουν οι εγκλεισμοί $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$.

Για $n = 1$, από την Πρόταση 2.1.6 κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ είναι F_σ και G_δ, οπότε από την Παρατήρηση 3.3.2 ισχύει $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2(\mathcal{X})$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_2(\mathcal{X})$.

Θεωρούμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ ισχύει η (3.4) και δείχνουμε το αντίστοιχο για το $n+1$. Έστω $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$. Τότε από τον ορισμό υπάρχει μια ακολουθία $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ από $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$.

Έχουμε

$$\mathcal{X} \setminus B_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$$

όπου στον τελευταίο εγκλεισμό χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση. Άρα $B_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και

$$A = \bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \bigvee\nolimits_{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}(\mathcal{X}) = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+2}(\mathcal{X}).$$

Επιπλέον αν πάρουμε $A_i = A$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ και $A_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$\mathcal{X} \setminus A = \bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{X} \setminus A_i) \in \bigvee\nolimits_{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}(\mathcal{X}) = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+2}(\mathcal{X})$$

και άρα $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+2}(\mathcal{X})$. Έτσι έχουμε δείξει την (3.4) για το $n+1$.

Είναι επίσης σαφές ότι οι εγκλεισμοί $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$ είναι άμεσοι από αυτούς της (3.4) παίρνοντας τα συμπληρώματα. □

Στο επόμενο βήμα εξασφαλίζουμε κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες κλειστότητας των πιο πάνω κλάσεων. Οι πλήρης λίστα με τις ιδιότητες κλειστότητας δίνεται σε μεταγενέστερο στάδιο στο Θεώρημα 3.3.8.

Λήμμα 3.3.4. *Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$, $n \geqslant 1$ είναι κλειστές ως προς $\vee$, &, και συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι οι ιδιότητες κλειστότητας για τις κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_n$ είναι άμεσες από τις αντίστοιχες των κλάσεων $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Για παράδειγμα για να δείξουμε ότι η $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{17}$ και η $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{17}$ είναι κλειστές ως προς $\vee$ τότε για κάθε $A, B \in \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_{17}(\mathcal{X})$ έχουμε $A, B \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{17}(\mathcal{X})$ και $A, B \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{17}(\mathcal{X})$ και άρα

$$A \vee B \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{17}(\mathcal{X}) \cap \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{17}(\mathcal{X}) = \utilde{\mathbf{\Delta}}^0_{17}(\mathcal{X}).$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση της $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση της $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$, γιατί για κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και κάθε $A \subseteq \mathcal{Y}$ έχουμε

$$f^{-1}[\mathcal{Y} \setminus A] = \mathcal{X} \setminus A.$$

Με άλλα λόγια αν η f αντιστρέφει στοιχεία της $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σε στοιχεία της $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ τότε αντιστρέφει και στοιχεία της $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ σε στοιχεία της $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και αντίστροφα.

Τέλος παρατηρούμε ότι η κλειστότητα της $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς $\vee$ και & είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα της $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ ως προς τους ίδιους τελεστές και αντίστροφα. Αυτό συμβαίνει λόγω των *νόμων του de Morgan*,

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \setminus (A \cup B) &= (\mathcal{X} \setminus A) \ \cap \ (\mathcal{X} \setminus B) \\ \mathcal{X} \setminus (A \cap B) &= (\mathcal{X} \setminus A) \ \cup \ (\mathcal{X} \setminus B). \end{aligned}$$

Για παράδειγμα αν έχουμε ότι η $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς $\vee$ και πάρουμε $A, B \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$ τότε τα σύνολα $\mathrm{c}_{\mathcal{X}} A = \mathcal{X} \setminus A$ και $\mathrm{c}_{\mathcal{X}} B = \mathcal{X} \setminus B$ ανήκουν στην $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και συνεπώς το σύνολο $\mathrm{c}_{\mathcal{X}}(A \cap B) = \mathrm{c}_{\mathcal{X}} A \cup \mathrm{c}_{\mathcal{X}} B$ ανήκει επίσης στη $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Επομένως το σύνολο $A \& B = A \cap B$ ανήκει στη $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και άρα η τελευταία κλάση είναι κλειστή ως προς &.

Έπειτα δείχνουμε με επαγωγή στο n ότι οι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n, \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ έχουν τις ζητούμενες ιδιότητες κλειστότητας.

Για $n = 1$ αφού η πεπερασμένη ένωση και η πεπερασμένη τομή ανοικτών (αντίστοιχα κλειστών) συνόλων είναι ανοικτό (αντίστοιχα κλειστό) υποσύνολο του ίδιου χώρου έχουμε ότι οι κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ και $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1$ είναι κλειστές ως προς $\vee$ και &. Επίσης η $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση γιατί η αντίστροφη εικόνα ανοικτού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι ανοικτό σύνολο.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το ζητούμενο για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε το ζητούμενο για το $n + 1$. Έστω $A, B \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκουν στην $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ και $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ συνεχής. Σύμφωνα με τα προηγούμενα αρκεί να δείξουμε ότι τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και $f^{-1}[A]$ ανήκουν στη $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$.

Υπάρχουν ακολουθίες $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ και $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με $A_i, B_i \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ώστε

$$A = \bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \text{και} \quad B = \bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} B_i.$$

Τότε

$$\begin{aligned} A \cup B &= \bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i) \\ A \cap B &= \bigcup\nolimits_{i,j \in \mathbb{N}} (A_i \cap B_j) \\ f^{-1}[A] &= \bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}[A_i]. \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση η κλάση $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς $\vee$, &, και συνεχή αντικατάσταση. Άρα τα σύνολα $A_i \cup B_i$, $A_i \cap B_j$ και $f^{-1}[A_i]$ στις πιο πάνω ισότητες ανήκουν στην $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Αφού οι πιο πάνω ενώσεις είναι αριθμήσιμες έχουμε ότι τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και $f^{-1}[A]$ ανήκουν στην $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Πριν προχωρήσουμε στις υπόλοιπες ιδιότητες κλειστότητας είναι χρήσιμο να χαρακτηρίσουμε τις κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ με βάση τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists^{\mathbb{N}}$. Δίνουμε πρώτα κάποια βοηθητικά αποτελέσματα.

Παρατήρηση 3.3.5. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$, κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $A \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ τα σύνολα $A_i \subseteq \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$, που ορίζονται ως εξής

$$x \in A_i \iff (x, i) \in A$$

ανήκουν επίσης στην κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Αυτό είναι άμεσο από το (i) της Πρότασης 3.2.6 γιατί κάθε A_i είναι η i-τομή του A και η $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση (Λήμμα 3.3.4). Φυσικά μπορεί κανείς να το αποδείξει κατευθείαν όπως στην Πρόταση 3.2.6 παρατηρώντας ότι

$$A_i = f_i^{-1}[A] \quad \text{όπου} \quad f_i : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathbb{N} : f_i(x) = (x, i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Προφανώς ισχύουν τα ίδια αν αντί της κλάσης $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ έχουμε την $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι οι κλάσεις Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης ικανοποιούν την ιδιότητα (3.3) της Πρότασης 3.2.8.

Λήμμα 3.3.6 ([**Mos09**], 1F.7)**.** *Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$, έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, και μια ακολουθία συνόλων $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ που ανήκουν στην οικογένεια $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$. Τότε το σύνολο $B \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής*

$$(x, i) \in B \iff x \in B_i$$

ανήκει στην κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Τα πιο πάνω ισχύει επίσης αν αντικαταστήσουμε την κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ με την $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$.

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός για την $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ προκύπτει από αυτόν για την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ παίρνοντας τα συμπληρώματα. Γι' αυτό δείχνουμε μόνο τον ισχυρισμό για την $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Ορίζουμε τα σύνολα $C_i \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$, ως εξής:

$$(x, s) \in C_i \iff x \in B_i \ \& \ s = i.$$

Για κάθε i το σύνολο $V_i = \{(x, s) \mid s = i\}$ είναι προφανώς ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και από το Λήμμα 3.3.4 ανήκει στην $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Πάλι με εφαρμογή του τελευταίου λήμματος το σύνολο $C_i = B_i \cap V_i$ ανήκει επίσης στη $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
(x, s) \in \textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i &\iff \exists i \ (x, s) \in C_i \\
&\iff \exists i \ (x \in B_i \ \& \ s = i) \\
&\iff x \in B_s \\
&\iff (x, s) \in B,
\end{aligned}$$

δηλαδή $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$.

Αν $n = 1$ τότε κάθε C_i είναι ανοικτό σύνολο και άρα το B είναι επίσης ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων, δηλαδή $B \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1(\mathcal{X})$. Αν $n > 1$ τότε για κάθε i υπάρχει ακολουθία συνόλων $(C^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ από $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n-1}$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με

$$C_i = \textstyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} C^i_j.$$

Επομένως

$$B = \textstyle\bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} C^i_j$$

και άρα το B είναι αριθμήσιμη ένωση $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n-1}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$, δηλαδή $B \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X})$. □

Πρόταση 3.3.7 (Ισοδύναμος ορισμός των κλάσεων $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, [**Kle43**], [**Mos47**])**.** *Για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε*

$$\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1} = \exists^{\mathbb{N}} \utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$$

και συνεπώς

$$\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1} = \forall^{\mathbb{N}} \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε προσωρινά τις κλάσεις

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^*_1 = \text{η κλάση όλων των ανοικτών συνόλων} = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$$
$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^*_1 = \text{η κλάση όλων των κλειστών συνόλων} = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1$$
$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^*_{n+1} = \exists^{\mathbb{N}}\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^*_n$$
$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^*_{n+1} = \mathrm{c}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^*_{n+1}.$$

Δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^*_n(\mathcal{X}) \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^*_n(\mathcal{X}).$$

(Προφανώς η τελευταία ισότητα προκύπτει από την προτελευταία παίρνοντας τα συμπληρώματα.)

Για $n = 1$ το ζητούμενο είναι άμεσο από τον ορισμό. Θεωρούμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ έχουμε το ζητούμενο και δείχνουμε το ίδιο για το $n+1$.

Έστω $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^*_{n+1}$. Τότε υπάρχει $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^*_n(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ με $P = \exists^{\mathbb{N}}A$. Από την Επαγωγική Υπόθεση $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$. Εφαρμόζουμε την Παρατήρηση 3.3.5 για την κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και έχουμε ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$A_i = \{x \mid (x,i) \in A\}$$

ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Επιπλέον

$$x \in P \iff \exists i\,(x,i) \in A \iff \exists i\, x \in A_i,$$

άρα $P = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Προκύπτει ότι το P ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$.

Αντίστροφα θεωρούμε ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ και $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X})$ έτσι ώστε $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Από το Λήμμα 3.3.6 το σύνολο

$$B = \{(x,i) \mid x \in B_i\}$$

ανήκει επίσης στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Από την Επαγωγική Υπόθεση $B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^*_n(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$. Επιπλέον

$$x \in P \iff \exists i\, x \in B_i \iff \exists i\,(x,i) \in B$$

και άρα $P = \exists^{\mathbb{N}}B \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^*_{n+1}(\mathcal{X})$. □

Θεώρημα 3.3.8 (Οι Θεμελιώδεις Ιδιότητες Κλειστότητας των Borel κλάσεων πεπερασμένης τάξης, [**Kur66**], [**Mos09**]). *Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$, όπου $n \geqslant 1$, είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση καθώς και ως προς τους τελεστές $\vee$, &, $\exists^{\leqslant}$, $\forall^{\leqslant}$, $\bigvee_{\leqslant}$ και $\bigwedge_{\leqslant}$.*

Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τους τελεστές

*$\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\exists^{\mathbb{N}}$ και γενικότερα $\exists^Y$ όπου Y είναι **αριθμήσιμος** Πολωνικός χώρος.*

Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τους τελεστές

*$\bigwedge_{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$ και γενικότερα $\forall^Y$ όπου Y είναι **αριθμήσιμος** Πολωνικός χώρος.*

Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^0_n$ είναι επιπλέον κλειστές ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος c.

Απόδειξη. Η κλειστότητα των κλάσεων ως προς συνεχή αντικατάσταση και ως προς τους τελεστές $\vee$, & αποδείχθηκε στο Λήμμα 3.3.4. Η κλειστότητα ως προς τους τελεστές της πεπερασμένης ένωσης $\bigvee_{\leqslant}$ και τομής $\bigwedge_{\leqslant}$ προκύπτει από την κλειστότητα ως προς $\vee$ και & αντίστοιχα με επαγωγή στο πλήθος της πεπερασμένης ακολουθίας συνόλων που θεωρούμε.

Από την Πρόταση 3.2.10 η κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς $\exists^{\leqslant}$ και $\forall^{\leqslant}$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\leqslant}$ και $\bigwedge_{\leqslant}$ αντίστοιχα, (εδώ χρησιμοποιούμε φυσικά την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς συνεχή αντικατάσταση).

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τις επιπλέον ιδιότητες κλειστότητας της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Θεωρούμε αρχικά μια ακολουθία $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ που ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και δείχνουμε ότι η ένωση $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i$ είναι ανοικτό σύνολο.

Αν $n = 1$ τότε τα P_i είναι ανοικτά σύνολα και συνεπώς το P είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων. Αν $n > 1$ τότε κάθε P_i είναι η ένωση μια ακολουθίας $(Q^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ από $\boldsymbol{\Pi}^0_{n-1}$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Επομένως

$$P = \bigcup\nolimits_{i,j} Q^i_j$$

και άρα το P είναι αριθμήσιμη ένωση ακολουθίας $\boldsymbol{\Pi}^0_{n-1}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$, δηλαδή $P \in \boldsymbol{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$.

Το πιο πάνω δείχνει την κλειστότητα της $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Από το Πόρισμα 3.2.9 η κλειστότητα της $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Για την κλειστότητα της $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ ως προς $\exists^Y$ όπου Y είναι ένας αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος, θεωρούμε μια απαρίθμηση $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow Y$. Αφού το $\mathbb{N}$ θεωρείται με τη διακριτή τοπολογία η f είναι συνεχής. Για κάθε $Q \in \boldsymbol{\Sigma}^0_n(\mathcal{X} \times Y)$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \exists^Y Q &\iff \exists y\ (x, y) \in Q \\ &\iff \exists n\ (x, f(n)) \in Q \end{aligned}$$

και το σύνολο $\exists^Y Q$ ανήκει στην κλάση $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ λόγω της κλειστότητας της τελευταίας ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και συνεχή αντικατάσταση.

Οι ιδιότητες κλειστότητας της $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ ως προς $\exists^{\leqslant}$, $\forall^{\leqslant}$, $\bigwedge_{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\forall^Y$, όπου Y είναι αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος προκύπτουν από τις αντίστοιχες της $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ παίρνοντας τον τελεστή του συμπληρώματος. Προκύπτει ότι η $\boldsymbol{\Delta}^0_n$ είναι επίσης κλειστή ως προς $\exists^{\leqslant}$ και $\forall^{\leqslant}$. Τέλος είναι σαφές ότι η $\boldsymbol{\Delta}^0_n$ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος c. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ▫

Η κλειστότητα ως προς $\exists^Y$ ή $\forall^Y$, όπου Y είναι ένας αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον Πολωνικό χώρο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ χωρίς να χρειαστεί να καταφύγουμε σε κάποια απαρίθμησή του όπως έχουμε κάνει στην επίλυση της Άσκησης 3.2.14. Δείτε για παράδειγμα τις λύσεις των Ασκήσεων 3.3.13 και 3.3.15.

Οι ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης μας επιτρέπουν να εκτιμήσουμε σε ποια κλάση ανήκει το δοσμένο σύνολο. Δίνουμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.3.9. Θεωρούμε τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$ και το σύνολο

$$P = \{\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x\big) \in \mathcal{X} \mid x_n \to x\}.$$

Δείχνουμε ότι το P είναι $\boldsymbol{\Pi}^0_3$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x\big) \in P &\iff \forall k\ \exists n_0\ \forall n\ \geqslant n_0\ |x_n - x| \leqslant 2^{-k} \\ &\iff \forall k\ \exists n_0\ \forall n\ (n < n_0\ \vee\ |x_n - x| \leqslant 2^{-k}). \end{aligned}$$

Με χρήση του διαγραμματικού συλλογισμού υπολογίζουμε:

$$\underbrace{\forall k\ \underbrace{\exists n_0\ \underbrace{\forall n\ \underbrace{(\underbrace{n < n_0}_{\boldsymbol{\Pi}^0_1}\ \vee\ \underbrace{|x_n - x| \leqslant 2^{-k}}_{\boldsymbol{\Pi}^0_1})}_{\boldsymbol{\Pi}^0_1 \text{ κλειστότητα ως προς } \vee}}_{\forall^{\mathbb{N}}\boldsymbol{\Pi}^0_1 = \boldsymbol{\Pi}^0_1}}_{\exists^{\mathbb{N}}\boldsymbol{\Pi}^0_1 = \boldsymbol{\Sigma}^0_2}}_{\forall^{\mathbb{N}}\boldsymbol{\Sigma}^0_2 = \boldsymbol{\Pi}^0_3}.$$

Πιο πάνω έχουμε χρησιμοποιήσει την Πρόταση 3.3.7 (ισοδύναμος ορισμός των $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ με βάση τον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$) καθώς και την κλειστότητα της κλάσης $\boldsymbol{\Pi}^0_1$ ως προς $\vee$ και συνεχή αντικατάσταση (Θεώρημα 3.3.8).

Δίνουμε κάποιες εξηγήσεις. Αυστηρά θεωρούμε τα σύνολα A, B με

$$\begin{aligned}
\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \in A &\iff n < n_0 \\
&\iff f\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) > 0 \\
&\iff \big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \in f^{-1}[(0,\infty) \cap \mathbb{N}] \\
\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \in B &\iff |x_n - x| \leqslant 2^{-k} \\
&\iff g\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \geqslant 0 \\
&\iff \big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) \in g^{-1}[[0,\infty)],
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
f\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) &= n - n_0 \\
g\big((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x, k, n_0, n\big) &= 2^{-k} - |x_n - x|.
\end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι οι πιο πάνω συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς. Επειδή τα σύνολα $(0,\infty) \cap \mathbb{N}$ και $[0,\infty)$ είναι κλειστά υποσύνολα των $\mathbb{N}$ και $\mathbb{R}$ αντίστοιχα, έχουμε από την κλειστότητα της $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_1$ ως προς συνεχή αντικατάσταση ότι τα σύνολα A, B είναι κλειστά.

Επιπλέον από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$P = \forall^{\mathbb{N}}\, \exists^{\mathbb{N}}\, \forall^{\mathbb{N}}\, A \vee B$$

Επομένως το P είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_3$ σύνολο.

Όπως έχουμε εξηγήσει στην Ενότητα 3.1 (δείτε τα Παραδείγματα 3.2.1 και 3.2.5) δεν θα κάνουμε συνήθως αναφορά στις πιο πάνω συναρτήσεις f, g ούτε στα ενδιάμεσα σύνολα A, B, αλλά θα εφαρμόζουμε κατευθείαν τον πιο πάνω διαγραμματικό συλλογισμό.

Ορισμός 3.3.10 (Θεμελιώδη $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολα)**.** Ορίζουμε κάποια σύνολα P_n, όπου $n \geqslant 2$ τα οποία είναι θεμελιώδη για τις κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Ο ορισμός γίνεται με επαγωγή στο n αλλά είναι χρήσιμο να απομονώσουμε τα πρώτα βήματα:

$$\begin{aligned}
\alpha \in P_2 &\iff \exists i_0\, \forall j \geqslant i_0\, \alpha(j) = 0, \quad \text{όπου } \alpha \in 2^{\mathbb{N}}, \\
\beta \in P_3 &\iff \exists i_1\, \forall i_0\, \exists j \geqslant i_0\, \beta(i_1, j) = 1, \quad \text{όπου } \beta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \\
\gamma \in P_4 &\iff \exists i_2\, \forall i_1\, \exists i_0\, \forall j \geqslant j_0\, \gamma(i_2, i_1, j) = 0, \quad \text{όπου } \gamma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $P_2 \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $P_3 \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ και $P_4 \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Επιπλέον για κάθε $\beta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ έχουμε

$$\beta \in P_3 \iff \exists i_1\, \beta_{i_1} \notin P_2$$

όπου $\beta_{i_1} : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\} : \beta_{i_1}(t) = \beta(i_1, t)$. Όμοια για κάθε $\gamma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ έχουμε

$$\gamma \in P_4 \iff \exists i_2\, \gamma_{i_2} \notin P_3$$

όπου $\gamma_{i_2} : \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \{0,1\} : \gamma_{i_2}(t) = \gamma(i_2, t)$.

Αυστηρά τα σύνολα P_n, $n \geqslant 2$, είναι υποσύνολα του $\{0,1\}^{\mathbb{N}^{n-1}}$ και ορίζονται με αναδρομή. Το P_2 είναι όπως πιο πάνω και για κάθε $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^n}$ ορίζουμε

$$x \in P_{n+1} \iff \exists i\, x_i \notin P_n$$

όπου $x_i : \{0,1\}^{\mathbb{N}^{n-1}} \to \{0,1\} : x_i(t) = x(i,t)$.

Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς με επαγωγή στο n ότι κάθε P_n είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολο. (Θεωρούμε κάθε $\mathbb{N}^k$ με τη διακριτή τοπολογία.) Θα δούμε αργότερα ότι το P_n δεν είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_n$ υποσύνολο του $\{0,1\}^{\mathbb{N}^{n-1}}$ και μάλιστα ότι ικανοποιεί μια θεμελιώδη ιδιότητα που αφορά την κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.3.11. Για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1} = \bigwedge_{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n = \mathrm{c}\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n.$$

Άσκηση 3.3.12. Για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1} = \bigvee_{\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \leqslant n} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_k\right).$$

Δηλαδή ένα σύνολο $A \subseteq \mathcal{X}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ έτσι ώστε για κάθε i υπάρχει $n_i \leqslant n$ με $B_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n_i}(\mathcal{X})$.

Άσκηση 3.3.13. Κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_{n+1}$ σύνολο μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση μιας *αύξουσας* ακολουθίας $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ συνόλων.

Άσκηση 3.3.14. Χρησιμοποιήστε την κλειστότητα της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ ως προς $\exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ για να δείξετε ότι τα σύνολα A_u της Άσκησης 3.2.14 είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_3$.

Άσκηση 3.3.15. Το σύνολο όλων των δένδρων πεπερασμένης διακλάδωσης είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_3$ υποσύνολο του Tr.

Άσκηση 3.3.16. Δείξτε την κλειστότητα των κλάσεων $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ($n \geqslant 1$) ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ κατευθείαν από την κλειστότητα των τελευταίων ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ χωρίς την επίκληση του Πορίσματος 3.2.9.

Άσκηση 3.3.17. Δείξτε την κλειστότητα των κλάσεων $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ($n \geqslant 1$) ως προς $\exists^{\leqslant}$ και $\forall^{\leqslant}$ κατευθείαν από την κλειστότητα των τελευταίων ως προς $\bigvee_{\leqslant}$ και $\bigwedge_{\leqslant}$ αντίστοιχα, χωρίς την επίκληση της Πρόταση 3.2.10.

Άσκηση 3.3.18. Το Λήμμα 3.3.6 αποτυγχάνει για την κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ αν αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathbb{N}$ με τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y} = [0, 1]$.

Μάλιστα για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει οικογένεια $(V_y)_{y \in [0,1]}$ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ έτσι ώστε το σύνολο $V \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ με

$$(x, y) \in V \iff x \in V_y$$

δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Άσκηση 3.3.19. Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}_i$, $i \in \mathbb{N}$ και έναν φυσικό αριθμό $n \geqslant 1$. Τότε για κάθε ακολουθία συνόλων $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με $A_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}_i)$, όπου $i \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_{n+1}$ υποσύνολο του χώρου γινόμενο $\mathcal{X} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_i$.

Επίσης για κάθε $m \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_0 \times \cdots \times A_m$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}_0 \times \cdots \times \mathcal{X}_m$.

Διατυπώστε τα ανάλογα συμπεράσματα για ακολουθία συνόλων $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ με $A_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}_i)$.

3.4. Οι προβολικές κλάσεις συνόλων

Ορισμός 3.4.1 (Ορισμός των προβολικών κλάσεων, [**Lus25c**], [**Lus25b**], [**Lus25a**], [**Sie25**], [**Mos09**]). Ορίζουμε με αναδρομή στο $n \geqslant 1$ τις εξής κλάσεις συνόλων σε Πολωνικούς χώρους:

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1 &= \exists^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1 \\
&= \text{οι προβολές κλειστών } F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \text{ υπεράνω του } \mathcal{X}, \\
&\quad \ \text{όπου } \mathcal{X} \text{ Πολωνικός χώρος} \\
\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1 &= \mathrm{c}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1 = \text{τα συμπληρώματα των } \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1 \text{ συνόλων}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1} &= \exists^{\mathcal{N}}\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n \\
&= \text{οι προβολές } \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n \text{ συνόλων } F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \text{ υπεράνω του } \mathcal{X}, \\
&\quad\ \text{όπου } \mathcal{X} \text{ Πολωνικός χώρος} \\
\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1} &= \mathrm{c}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1} \\
&= \text{τα συμπληρώματα των } \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1} \text{ συνόλων.}
\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ (ή $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$) σύνολο αν και μόνο αν υπάρχει ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1$ (ή $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ αντίστοιχα) σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in P \iff \exists \alpha\, (x, \alpha) \in Q.$$

Παίρνοντας τα συμπληρώματα έχουμε ότι ένα $P_* \subseteq \mathcal{X}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ (ή $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1}$) σύνολο αν και μόνο αν υπάρχει ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$ (ή $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ αντίστοιχα) σύνολο $Q_* \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in P_* \iff \forall \alpha\, (x, \alpha) \in Q_*.$$

Είναι αρκετά βολικό να θέσουμε

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_0 = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1 \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_0 = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_1$$

έτσι που

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n = \exists^{\mathcal{N}}\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1} \quad \text{και} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n = \forall^{\mathcal{N}}\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n-1}$$

για κάθε $n \geqslant 1$.

Τέλος θέτουμε

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n \cap \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n.$$

Είναι άμεσο ότι ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$ αν και μόνο αν τα σύνολα P και $\mathcal{X} \setminus P$ ανήκουν στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$.

Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ λέγονται **προβολικές** ή αλλιώς **κλάσεις του Lusin** ενώ οι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ είναι οι **δυϊκές** (dual) και **αμφίσημες** (ambiguous) αντίστοιχα προβολικές κλάσεις.

Η συλλογή των προηγούμενων κλάσεων ονομάζεται **ιεραρχία των προβολικών συνόλων**.

Τα σύνολα της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ ονομάζονται **αναλυτικά** (analytic) και αυτά της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ **συναλυτικά** (coanalytic). Τα σύνολα της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ ονομάζονται **αμφι-αναλυτικά** (bi-analytic).

Λήμμα 3.4.2. *Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$ είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 3.3.4 παρατηρούμε ότι η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ ως προς συνεχή αντικατάσταση. (Γενικότερα μια κλάση Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση αν και μόνο αν η cΓ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.)

Επιπλέον η κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$ ως προς συνεχή αντικατάσταση είναι άμεση από την ίδια ιδιότητα των κλάσεων $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ και $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν μια κλάση Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση τότε και η $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma$ έχει την ίδια ιδιότητα. Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ και ένα $P \subseteq \mathcal{Y}$ που ανήκει στη $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma$, όπου η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Πρέπει να δείξουμε ότι το σύνολο $f^{-1}[P]$ ανήκει στη $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma$.

Υπάρχει $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ που ανήκει στη Γ έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[P] &\iff f(x) \in P \\ &\iff \exists \alpha\ (f(x), \alpha) \in Q \\ &\iff \exists \alpha\ h(x, \alpha) \in Q \\ &\iff \exists \alpha (x, \alpha) \in h^{-1}[Q], \end{aligned}$$

όπου $h(x, \alpha) = (f(x), \alpha)$. Η h είναι συνεχής συνάρτηση και από την υπόθεσή μας για τη Γ το σύνολο $h^{-1}[Q]$ ανήκει στη Γ. Από τις πιο πάνω ισοδυναμίες προκύπτει $f^{-1}[P] = \exists^{\mathcal{N}} h^{-1}[Q]$ και συνεπώς το $f^{-1}[P]$ ανήκει στη Γ.

Τέλος δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι η κλάση $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Για $n = 1$ έχουμε ότι η $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1 = \exists^{\mathcal{N}} \undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_1$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση από τα πιο πάνω και από το ότι η κλάση $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_1$ έχει αυτή την ιδιότητα.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ η κλάση $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Επομένως και η $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ έχει την ίδια ιδιότητα και από τα πιο πάνω το ίδιο ισχύει και για την $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1} = \exists^{\mathcal{N}} \undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$. ▫

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι οι προβολικές κλάσεις ικανοποιούν τις ανάλογες συμπεριλήψεις με τις κλάσεις των Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης. Ξεκινάμε με ένα βοηθητικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.4.3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε κλειστό $F \subseteq \mathcal{X}$ έχουμε $F \in \undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$.*

(Το προηγούμενο επεκτείνεται πέραν των κλειστών συνόλων, δείτε την Πόρισμα 3.4.6.)

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $F \subseteq \mathcal{X}$ κλειστό. Θεωρούμε το $Q = F \times \mathcal{N}$ και τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in F \iff \exists \alpha\ (x, \alpha) \in Q.$$

Το Q είναι προφανώς κλειστό σύνολο, επομένως το F είναι $\exists^{\mathcal{N}} \undertilde{\mathbf{\Pi}}^0_1 = \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ σύνολο.

Το F, ως κλειστό, είναι επίσης G_δ σύνολο επομένως υπάρχει ακολουθία $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Θεωρούμε το σύνολο

$$V = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid x \in V_{\alpha(0)}\}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το V είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Επιπλέον για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in F &\iff \forall n\ x \in V_n \\ &\iff \forall \alpha\ x \in V_{\alpha(0)} \\ &\iff \forall \alpha\ (x, \alpha) \in V. \end{aligned}$$

Συνεπώς το F είναι $\forall^{\mathcal{N}} \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1 = \undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_1$ σύνολο. ▫

Πρόταση 3.4.4. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε*

$$\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_{n+1}(\mathcal{X})$$

και επομένως ισχύει επίσης

$$\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_{n+1}(\mathcal{X}).$$

Απόδειξη. Προφανώς ο δεύτερος εγκλεισμός προκύπτει από τον πρώτο παίρνοντας το συμπλήρωμα του συνόλου. Αρχικά δείχνουμε τη συμπερίληψη $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1}(\mathcal{X})$. Θεωρούμε $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στην $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ και $Q \subseteq \times \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ που ανήκει στη $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Θέτουμε

$$R = Q \times \mathcal{N}$$

και ισχυριζόμαστε ότι το R είναι επίσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ σύνολο. Για κάθε $(x, \alpha, \beta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ έχουμε

$$(x, \alpha, \beta) \in R \iff (x, \alpha) \in Q$$

και το R ανήκει στην $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ λόγω της κλειστότητας της τελευταίας ως προς συνεχή αντικατάσταση, δείτε το Λήμμα 3.4.2.

Επιπλέον για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in P &\iff \exists \alpha\, (x, \alpha) \in Q \\ &\iff \forall \beta\, \exists \alpha\, (x, \alpha, \beta) \in R. \end{aligned}$$

Άρα το P ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathcal{N}} \exists^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1} = \forall^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1}$.

Έπειτα δείχνουμε με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ ότι *για κάθε Πολωνικό χώρο* $\mathcal{X}$ ισχύει $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}(\mathcal{X})$. Με βάση αυτό και τις προηγούμενες συμπεριλήψεις έχουμε το ζητούμενο.

Για $n = 1$, θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και $P \subseteq \mathcal{X}$ που ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$. Πρέπει να δείξουμε ότι ανήκει στην κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_2$. Υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}} F$.

Δείξαμε ότι το F ως κλειστό είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ (Πρόταση 3.4.3). Επομένως το P είναι $\exists^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1 = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_2$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ και κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ ισχύει

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}(\mathcal{X}), \quad \text{ισοδύναμα} \quad \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n(\mathcal{X}) \subseteq \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1}(\mathcal{X}).$$

Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$ σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$. Δείχνουμε ότι το P είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+2}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Από τον ορισμό υπάρχει ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Από την Επαγωγική Υπόθεση εφαρμοσμένη στον χώρο $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ το Q είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1}$ σύνολο. Συνεπώς το P είναι $\exists^{\mathcal{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+2}$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. □

Θεώρημα 3.4.5 (Οι Θεμελιώδεις Ιδιότητες Κλειστότητας των κλάσεων του Lusin, [**Sie28**], [**Mos09**]). *Οι κλάσεις* $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ *και* $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$, $n \geqslant 1$, *είναι κλειστές ως προς συνεχή αντικατάσταση και τους τελεστές* $\vee$, &, $\exists^{\leqslant}, \forall^{\leqslant}, \bigvee_{\leqslant}, \bigwedge_{\leqslant}, \exists^{\mathbb{N}}, \forall^{\mathbb{N}}, \bigvee_{\mathbb{N}}, \bigwedge_{\mathbb{N}}$.

Οι κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ *είναι επιπλέον κλειστές ως προς τον τελεστή* $\exists^{\mathcal{Y}}$ *και οι* $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ *ως προς τον* $\forall^{\mathcal{Y}}$ *για κάθε Πολωνικό χώρο* $\mathcal{Y}$. *Οι κλάσεις* $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$ *είναι επιπλέον κλειστές ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος* c.

Απόδειξη. Η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση έχει δειχθεί στο Λήμμα 3.4.2.

Ως συνήθως οι ιδιότητες κλειστότητας των κλάσεων $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ δίνουν τις αντίστοιχες για τις κλάσεις $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ και κατά συνέπεια και για τις $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_n$. Επιπλέον είναι σαφές ότι οι τελευταίες είναι κλειστές ως προς το συμπλήρωμα. Επομένως δείχνουμε τις ζητούμενες ιδιότητες για τις $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$.

Αν δείξουμε ότι οι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστές ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ τότε θα έχουμε και κλειστότητα ως προς πεπερασμένη ένωση (υποσυνόλων του ίδιου χώρου), γιατί το κενό σύνολο ανήκει σε όλες αυτές τις κλάσεις. Δηλαδή θα έχουμε και την κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\leqslant}$ και $\vee$. Επιπλέον από την Άσκηση 3.4.11 η κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\leqslant}$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\leqslant}$ αντίστοιχα.

Με όμοια συλλογιστική έχουμε επίσης ότι η κλειστότητα των $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ συνεπάγεται και την κλειστότητα ως προς $\bigwedge_{\leqslant}$ και & χρησιμοποιώντας ότι κάθε Πολωνικός χώρος $\mathcal{X}$ ανήκει σε όλες αυτές τις κλάσεις. Επιπλέον πάλι από την Άσκηση 3.4.11 η κλειστότητα ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ και $\bigwedge_{\leqslant}$ είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$ και $\forall^{\leqslant}$ αντίστοιχα.

Επομένως αρκεί να δείξουμε την κλειστότητα των κλάσεων $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\mathcal{Y}}$, όπου $\mathcal{Y}$ είναι τυχαίος Πολωνικός χώρος.

Υπενθυμίζουμε τη συνάρτηση κωδικοποίησης $\langle\,\cdot\,\rangle$ από το (2.7) και τους συμβολισμούς

$$\alpha^* = (\alpha(1), \dots, \alpha(n), \dots) \in \mathcal{N}$$
$$(\alpha)_i = (\alpha(\langle i, 0\rangle), \alpha(\langle i, 1\rangle), \dots, \alpha(\langle i, t\rangle), \dots) \in \mathcal{N}.$$

από τα (2.9), και (2.12) αντίστοιχα, όπου $i \in \mathbb{N}$ και $\alpha \in \mathcal{N}$. Όπως έχουμε πει οι συναρτήσεις $(\alpha \mapsto \alpha^*)$ και $((i, \alpha) \mapsto (\alpha)_i)$ είναι συνεχείς (Άσκηση 2.3.18.)

Παρατηρούμε ότι για κάθε ακολουθία $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του $\mathcal{N}$ μπορούμε να βρούμε ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ με την ιδιότητα $(\alpha)_i = \alpha_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Μια τέτοια επιλογή α είναι η

$$\alpha(\langle i, t\rangle) = \alpha_i(t) \qquad \text{και} \qquad \alpha(k) = 0, \quad \text{αν } k \neq \langle i, t\rangle \text{ για κάθε } i, t.$$

Αρχικά δείχνουμε ότι κάθε κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $n \geqslant 1$, είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$. Θεωρούμε $n \geqslant 1$, ένα $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ και ένα $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε $P = \exists^{\mathcal{N}} Q$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \exists^{\mathbb{N}} P &\iff \exists i\, (x, i) \in P \\ &\iff \exists i\, \exists \alpha\, (x, i, \alpha) \in Q \\ &\iff \exists \beta\, (x, \beta(0), \beta^*) \in Q, \end{aligned}$$

όπου πιο πάνω παίρνουμε $\beta = (i, \alpha(0), \alpha(1), \dots)$. Αφού η κλάση $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία ότι το σύνολο $\exists^{\mathbb{N}} P$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}} \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1} = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$.

Επομένως οι κλάσεις $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $n \geqslant 1$ είναι κλειστές ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$. Για την κλειστότητα ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$, θεωρούμε ένα $n \geqslant 1$ και P, Q όπως πιο πάνω. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \forall^{\mathbb{N}} P &\iff \forall i\, (x, i) \in P \\ &\iff \forall i\, \exists \alpha\, (x, i, \alpha) \in Q \\ &\iff \exists \alpha \forall i\, (x, i, (\alpha)_i) \in Q. \end{aligned}$$

Για την τελευταία ισοδυναμία αν για κάθε i υπάρχει κάποιο $\alpha \equiv \alpha_i$ με $(x, i, \alpha_i) \in Q$ τότε μπορούμε μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\alpha \in \mathcal{N}$ με $(\alpha)_i = \alpha_i$ για κάθε i, όπως έχουμε εξηγήσει πιο πάνω. Τότε θα έχουμε $(x, i, (\alpha)_i) \in Q$ για κάθε i.

Από την τελευταία ισοδυναμία προκύπτει ότι το σύνολο $\forall^{\mathbb{N}} P$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}} \forall^{\mathbb{N}} \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$. Όπως έχουμε δείξει πιο πάνω η κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n-1}$ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$. (Για $n = 1$ το ζητούμενο προκύπτει από τις ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_0 = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_1$, δείτε το Θεώρημα 3.3.8.) Παίρνοντας το συμπλήρωμα η $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ είναι κλειστή ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$. Επομένως το σύνολο $\forall^{\mathbb{N}} P$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}} \forall^{\mathbb{N}} \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1} = \exists^{\mathcal{N}} \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1} = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$.

Τέλος δείχνουμε την κλειστότητα των $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ ως προς $\exists^{\mathcal{Y}}$ όπου $\mathcal{Y}$ Πολωνικός χώρος. Θεωρούμε $n \geqslant 1$, ένα $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ σύνολο $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, και ένα $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{N}$. Πρέπει να δείξουμε ότι το $\exists^{\mathcal{Y}} P$ ανήκει στην κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$. Στην περίπτωση όπου $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$ έχουμε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in \exists^{\mathcal{N}} P &\iff \exists \alpha\, (x, \alpha) \in P \\ &\iff \exists \alpha\, \exists \beta\, (x, \alpha, \beta) \in Q \\ &\iff \exists \gamma\, (x, (\gamma)_0, (\gamma)_1) \in Q. \end{aligned}$$

Επομένως το σύνολο $\exists^{\mathcal{N}} P$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}} \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1} = \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$. Αυτό δείχνει την κλειστότητα της $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ ως προς $\exists^{\mathcal{N}}$. Στη γενική περίπτωση ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{Y}$ θεωρούμε έναν συνεχή επιμορφισμό $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{Y}$ (Θεώρημα 2.3.7) και για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \exists^{\mathcal{Y}} P &\iff \exists y\, (x, y) \in P \\ &\iff \exists \alpha\, (x, \pi(\alpha)) \in P, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε ότι η π είναι επί. Από την κλειστότητα της κλάσης $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ ως προς συνεχή αντικατάσταση προκύπτει ότι το σύνολο $\exists^{\mathcal{Y}} P$ ανήκει στην $\exists^{\mathcal{N}} \boldsymbol{\Sigma}^1_n$. Όπως είδαμε προηγουμένως η $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathcal{N}}$ άρα το $\exists^{\mathcal{Y}} P$ ανήκει στην $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$. ▫

Τα ακόλουθα πορίσματα είναι άμεσα από τις ιδιότητες κλειστότητας των προβολικών κλάσεων. Το πρώτο από αυτά δίνει τη σχέση συμπερίληψης των κλάσεων Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης και των προβολικών κλάσεων.

Πόρισμα 3.4.6. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ έχουμε*

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \boldsymbol{\Delta}^1_1(\mathcal{X}) \quad \textit{ισοδύναμα} \quad \boldsymbol{\Pi}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \boldsymbol{\Delta}^1_1(\mathcal{X}).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο $n \geqslant 1$. Η περίπτωση $n = 1$ είναι το Λήμμα 3.4.3. Αφήνουμε το επαγωγικό βήμα για άσκηση (Άσκηση 3.4.9) . ▫

Πόρισμα 3.4.7 (Ισοδύναμος ορισμός των κλάσεων $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$)**.** *Για κάθε $n \geqslant 1$ η κλάση $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ αποτελείται ακριβώς από τις συνεχείς εικόνες $\boldsymbol{\Pi}^1_{n-1}$ συνόλων.*

Απόδειξη. Κάθε $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ σύνολο είναι προβολή (και επομένως είναι συνεχής εικόνα) ενός $\boldsymbol{\Pi}^1_{n-1}$ συνόλου, επομένως πρέπει να δείξουμε το αντίστροφο. Έστω $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ συνεχής και $Q \subseteq \mathcal{X}$ το οποίο είναι $\boldsymbol{\Pi}^1_{n-1}$. Πρέπει να δείξουμε ότι η εικόνα $f[Q]$ είναι $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ σύνολο. Πράγματι, για κάθε $y \in \mathcal{Y}$ έχουμε

$$\begin{aligned} y \in f[Q] &\iff \exists x\, (x \in Q \;\&\; f(x) = y) \\ &\iff \exists x\, (x \in Q \;\&\; (x, y) \in Graph(f)) \end{aligned}$$

Το γράφημα της f είναι κλειστό σύνολο και επομένως από την Πρόταση 3.4.4 (και την απόδειξή της) είναι $\boldsymbol{\Pi}^1_{n-1}$ σύνολο. Από το Θεώρημα 3.4.5 (Ιδιότητες Κλειστότητας των κλάσεων του Lusin) η κλάση $\boldsymbol{\Pi}^1_{n-1}$ είναι κλειστή ως προς &. Στην περίπτωση όπου $n = 1$ αυτό προκύπτει από τις ιδιότητες κλειστότητας των κλειστών συνόλων.

Με βάση την τελευταία από τις πιο πάνω ισοδυναμίες καταλήγουμε ότι $f[Q] = \exists^{\mathcal{X}} R$ όπου το R είναι ένα $\boldsymbol{\Pi}^1_{n-1}$ υποσύνολο του $\mathcal{Y} \times \mathcal{X}$. Συνεπώς το $f[Q]$ είναι $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. ▫

Πόρισμα 3.4.8. *Η συνεχής εικόνα $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ συνόλου είναι $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ σύνολο.*

Απόδειξη. Αφήνεται στην Άσκηση 3.4.10. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 3.4.9. Συμπληρώστε την απόδειξη του Πορίσματος 3.4.6: για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ η οικογένεια $\boldsymbol{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$ περιέχεται στην $\boldsymbol{\Delta}^1_1(\mathcal{X})$.

Άσκηση 3.4.10. Κάθε κλάση $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχείς εικόνες.

Άσκηση 3.4.11. Έστω Γ οποιαδήποτε από τις κλάσεις $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ και $\boldsymbol{\Pi}^1_n$, $n \geqslant 1$. Τότε για κάθε ακολουθία $(P_s)_{s \in \mathbb{N}}$ από υποσύνολα του ίδιου Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ που ανήκουν στην Γ το σύνολο

$$P = \{(x, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid x \in P_s\}$$

ανήκει στην $\Gamma(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$.

Αντιστρόφως για κάθε $R \in \Gamma(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ και κάθε $s \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$R_s = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, s) \in R\}$$

ανήκει στην Γ.

Συμπεράνετε ότι ο ισχυρισμός πως η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και $\bigvee_{\leqslant}$ είναι αντίστοιχα ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$ και $\exists^{\leqslant}$, (όπου $\Gamma = \boldsymbol{\Sigma}^1_n, \boldsymbol{\Pi}^1_n$).

Όμοια ο ισχυρισμός πως η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ και $\bigwedge_{\leqslant}$ είναι αντίστοιχα ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι η Γ είναι κλειστή ως προς $\forall^{\mathbb{N}}$ και $\forall^{\leqslant}$, (όπου $\Gamma = \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$).

Άσκηση 3.4.12. Θεωρούμε μια κλάση συνόλων Γ που περιέχει τα κλειστά σύνολα, και είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση όπως επίσης ως προς τον τελεστή $\&$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathcal{N}}$.

(ii) Η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathcal{Y}}$ για όλους τους Πολωνικούς χώρους $\mathcal{Y}$.

(iii) Η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχείς εικόνες.

Συμπεράνετε ότι ο ισχυρισμός πως η $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathcal{Y}}$ για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι η $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι κλειστή ως προς συνεχείς εικόνες, όπου $n \geqslant 1$.

3.5. Μετρησιμότητα συνάρτησης ως προς κλάση

3.6. Παραμετρικοποίηση και Καθολικά Σύνολα

3.7. Πληρότητα κλάσης

3.8. Η ιδιότητα της ομαλοποίησης (uniformization property)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Borel σύνολα

4.1. Θεμελιώδεις ιδιότητες

Ορισμός 4.1.1. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X και μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ είναι **σ-άλγρεβρα** στο X αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

(i) Τα σύνολα $\varnothing$, X ανήκουν στην $\mathcal{A}$.
(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Μερικά τετριμμένα παραδείγματα σ-αλγεβρών στο X είναι το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ και το $\{\varnothing, X\}$.

Όπως είναι γνωστό αν έχουμε ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{F}$ από σ-άλγεβρες στο ίδιο σύνολο X τότε η τομή

$$\bigcap \mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}\ A \in \mathcal{A}\}$$

είναι επίσης σ-άλγεβρα στο X.

Ορισμός 4.1.2. Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X και το σύνολο $\mathcal{F}$ όλων των σ-αλγεβρών στο X που περιέχουν τα ανοικτά υποσύνολα του X, δηλαδή

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{A} \mid \text{η } \mathcal{A} \text{ είναι } \sigma\text{-άλγεβρα στο } X \text{ και για κάθε ανοικτό } V \subseteq X \text{ έχουμε } V \in \mathcal{A}\}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}$ και συνεπώς $\mathcal{F} \neq \varnothing$. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ των **Borel υποσυνόλων του** X είναι η οικογένεια

$$\mathcal{B}(X) = \bigcap \mathcal{F}.$$

Ένα υποσύνολο του X ονομάζεται **Borel** αν ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$.

Είναι σαφές από τα προηγούμενα ότι η οικογένεια $\mathcal{B}(X)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) Η $\mathcal{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X περιέχεται στην $\mathcal{B}(X)$, δηλαδή η $\mathcal{B}(X)$ είναι στοιχείο της πιο πάνω $\mathcal{F}$.
(2) Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο $\mathcal{X}$ που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X τότε $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$.

Με άλλα λόγια η $\mathcal{B}(X)$ είναι *η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο X που περιέχει τα ανοικτά σύνολα*. Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}$ την **κλάση** όλων των Borel συνόλων σε *μετρικούς* χώρους.

Μερικά *παραδείγματα Borel συνόλων* είναι όλα τα ανοικτά σύνολα και τα συμπληρώματά τους δηλαδή τα κλειστά σύνολα. Τα F_σ σύνολα είναι επίσης Borel ως αριθμήσιμη ένωση Borel συνόλων και τα G_δ είναι ως συμπληρώματα F_σ συνόλων, τα οποία είναι Borel.

Πρόταση 4.1.3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει*

$$\underset{\sim}{\Sigma}{}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

δηλαδή κάθε $\underset{\sim}{\Sigma}{}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$ είναι και Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $n \geqslant 1$. □

Ο ορισμός των Borel συνόλων μας υπαγορεύει μια **θεμελιώδη μέθοδο** για να αποδεικνύουμε ιδιότητες των Borel συνόλων. Συγκεκριμένα ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δείξουμε μια πρόταση της μορφής

$$\text{για κάθε Borel σύνολο } B \subseteq \mathcal{X} \text{ ισχύει η ιδιότητα } Q.$$

Τότε θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathcal{X} \mid \text{το } A \text{ έχει την ιδιότητα } Q\}.$$

Αν δείξουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ τότε θα έχουμε $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{A}$ και επομένως θα έχουμε αποδείξει την πιο πάνω πρόταση. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής αυτής της μεθόδου είναι το επόμενο αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.1.4. *Η κλάση των Borel συνόλων είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μετρικούς χώρος X, Y και μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$. Θα δείξουμε ότι για κάθε Borel $A \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[A]$ είναι Borel υποσύνολο του X. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq Y \mid f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(X)\}$$

και δείχνουμε ότι είναι σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολο του Y. Εφόσον η $\mathcal{B}(X)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y, προκύπτει από το προηγούμενο ότι $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ που είναι και το ζητούμενο.

Θεωρούμε ένα ανοικτό $V \subseteq Y$. Αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[V]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και συνεπώς είναι Borel σύνολο. Άρα $V \in \mathcal{A}$ και η $\mathcal{A}$ περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι $\emptyset, Y \in \mathcal{A}$ γιατί τα σύνολα $\emptyset, Y$ είναι ανοικτά. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε

$$f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(X)$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(X)$ και ότι η οικογένεια των Borel υποσυνόλων του X είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα στο X. ▫

Θεώρημα 4.1.5 (Οι Θεμελιώδεις Ιδιότητες Κλειστότητας της κλάσης των Borel συνόλων)**.** *Η κλάση $\mathcal{B}$ των Borel συνόλων είναι κλειστή*

(i) *ως προς συνεχή αντικατάσταση,*

(ii) *ως προς τους τελεστές $\vee$, &, $\exists^{\leqslant}$, $\forall^{\leqslant}$, $\bigvee_{\leqslant}$, $\bigwedge_{\leqslant}$, c_X, όπου X είναι μετρικός χώρος, και*

(iii) *ως προς τους τελεστές $\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\exists^{\mathbb{N}}$, $\exists^{Y}$, $\bigwedge_{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\forall^{Y}$, όπου Y είναι **αριθμήσιμος** Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Η κλειστότητα ως προς συνεχή αντικατάσταση είναι το Λήμμα 4.1.4. Η κλειστότητα ως προς $\vee$ και $\bigvee_{\leqslant}$ είναι άμεση από την κλειστότητα ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$. Όμοια η κλειστότητα ως προς & και $\bigwedge_{\leqslant}$ είναι άμεση από την κλειστότητα ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$.

Οι κλειστότητες ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και c_X είναι σαφείς γιατί για κάθε μετρικό χώρο X η $\mathcal{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα. Για την κλειστότητα ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X και μια ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Borel υποσυνόλων του X. Παρατηρούμε ότι

$$X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n \in \mathcal{B}(X)$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $A_n \in \mathcal{B}(X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι η $\mathcal{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα. Αφού $X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε και ότι $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(X)$.

Στη συνέχεια ισχυριζόμαστε ότι για κάθε μετρικό χώρο X και κάθε ακολουθία $(B_s)_{s\in\mathbb{N}}$ από Borel υποσύνολα του X το σύνολο $B \subseteq X \times \mathbb{N}$ με

$$(x, s) \in B \iff x \in B_s$$

είναι επίσης Borel. Η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν του Λήμματος 3.3.6, με τη $\mathcal{B}$ στην θέση της $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. (Χρησιμοποιούμε ότι η κλάση όλων των Borel συνόλων περιέχει όλα τα ανοικτά σύνολα και είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, & καθώς και $\bigvee_{\mathbb{N}}$.)

Αφού η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή ως προς τους τελεστές $\bigvee_{\mathbb{N}}$, $\bigvee_{\leqslant}$, $\bigwedge_{\mathbb{N}}$, και $\bigwedge_{\leqslant}$, προκύπτει από τα Πορίσματα 3.2.9 και 3.2.10 ότι η $\mathcal{B}$ είναι επίσης κλειστή ως προς τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$, $\exists^{\leqslant}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, και $\forall^{\leqslant}$.

Τέλος θεωρούμε έναν αριθμήσιμο Πολωνικό χώρο Y, μια απαρίθμηση $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow Y$ και ένα Borel $B \subseteq \mathcal{X} \times Y$, όπου $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in \exists^Y B &\iff \exists y \in Y\ (x, y) \in B \\ &\iff \exists n\ (x, f(n)) \in B \end{aligned}$$

και όμοια

$$x \in \forall^Y B \iff \forall n\ (x, f(n)) \in B.$$

Αφού η f είναι συνεχής και η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, προκύπτει από τις προηγούμενες ισοδυναμίες ότι τα σύνολοα $\exists^Y B, \forall^Y B$ ανήκουν στη $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. ▫

Πόρισμα 4.1.6. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ έχουμε*

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subseteq \undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X}).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.4.5 (και την απόδειξή της Πρότασης 3.3.3) η οικογένεια $\undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$. ▫

Πρόταση 4.1.7. *Αν X είναι μετρικός χώρος και το Y είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X τότε ένα $A \subseteq Y$ είναι Borel στον μετρικό χώρο Y αν και μόνο αν είναι της μορφής $B \cap Y$ όπου το B είναι Borel στον X. Δηλαδή*

$$\mathcal{B}(Y) = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Ειδικότερα αν το Y είναι Borel υποσύνολο του X και το $A \subseteq Y$ είναι Borel στον Y τότε το A είναι Borel στον X.

Απόδειξη. Για ευκολία θέτουμε προσωρινά

$$\mathcal{B}^*(Y) = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Δείχνουμε αρχικά ότι $\mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}^*(Y)$. Αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{B}^*(Y)$ είναι σ-άλγεβρα στο Y που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y.

Έστω $V \subseteq Y$ ανοικτό στο Y. Τότε όπως είναι γνωστό υπάρχει $U \subseteq X$ που είναι ανοικτό στο X ώστε $V = U \cap Y$. Τότε $U \in \mathcal{B}(X)$ και άρα $V \in \mathcal{B}^*(Y)$, δηλαδή η τελευταία οικογένεια περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y.

Ειδικότερα έχουμε $\varnothing, Y \in \mathcal{B}^*(Y)$ γιατί τα σύνολα $\varnothing, Y$ είναι ανοικτά. Για τις άλλες δύο ιδιότητες παρατηρούμε ότι

$$Y \setminus (B \cap Y) = (X \setminus B) \cap Y \tag{4.1}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap Y) = \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) \cap Y. \tag{4.2}$$

Επομένως αν $A = B \cap Y \in \mathcal{B}^*(Y)$, όπου $B \in \mathcal{B}(X)$, τότε $X \setminus B \in \mathcal{B}(X)$ και με χρήση της (4.1)

$$Y \setminus A = Y \setminus (B \cap Y) = (X \setminus B) \cap Y \in \mathcal{B}(Y).$$

Με χρήση της (4.2) δείχνει όμοια κανείς ότι η $\mathcal{B}^*(Y)$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις υποσυνόλων του Y. Προκύπτει ότι η $\mathcal{B}^*(Y)$ είναι σ-άλγεβρα στο Y που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του Y.

Για να δείξουμε τον εγκλεισμό $\mathcal{B}^*(Y) \subseteq \mathcal{B}(Y)$ θεωρούμε την οικογένεια υποσυνόλων του $\mathcal{X}$,

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq X \mid B \cap Y \in \mathcal{B}(Y)\}.$$

Αν δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X τότε θα έχουμε $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ και συνεπώς για κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$ θα ισχύει $B \cap Y\mathcal{B}(Y)$, δηλαδή $\mathcal{B}^*(Y) \subseteq \mathcal{B}(Y)$.

Για να δείξουμε ότι η πιο πάνω $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά σύνολα, θεωρούμε $V \subseteq X$ ανοικτό. Τότε το $V \cap Y$ είναι ανοικτό στο Y και ειδικότερα $V \cap Y \in \mathcal{B}(Y)$. Προκύπτει ότι $V \in \mathcal{A}$.

Όπως προηγουμένως προκύπτει επίσης ότι $\varnothing, X \in \mathcal{A}$. Αν $B \in \mathcal{A}$ τότε από την (4.1),

$$(X \setminus B) \cap Y = Y \setminus (B \cap Y) \in \mathcal{B}(Y),$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $B \cap Y \in \mathcal{B}(Y)$. Προκύπτει ότι $X \setminus B \in \mathcal{A}$.

Όμοια με χρήση της (4.2) δείχνει κανείς ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις υποσυνόλων του X.

Καταλήγουμε ότι $\mathcal{B}(Y) = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}(X)\}$. Τέλος αν το Y είναι Borel υποσύνολο του X και το A είναι Borel υποσύνολο του Y τότε $A = B \cap Y$ για κάποιο $B \in \mathcal{B}(X)$. Άρα το A είναι Borel υποσύνολο του X από την κλειστότητα της $\mathcal{B}(X)$ ως προς &. □

4.2. Borel-μετρησιμότητα

Ορισμός 4.2.1. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X και Y. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι **Borel-μετρήσιμη** αν αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ έχουμε $f^{-1}[U] \in \mathcal{B}(X)$.

Προφανώς κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι Borel-μετρήσιμη γιατί για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι ανοικτό και συνεπώς Borel.

Ένας ισομορφισμός $f : X \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow Y$ είναι **Borel ισομορφισμός** αν οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $f^{-1} : Y \to X$ είναι Borel-μετρήσιμες.

Οι μετρικοί χώροι X και Y είναι **Borel ισομορφικοί** αν υπάρχει Borel ισομορφισμός $f : X \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow Y$.

Οι Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις χαρακτηρίζονται ως εξής.

Πρόταση 4.2.2. *Θεωρούμε μετρικούς χώρους X, Y και μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Τα εξής είναι ισοδύναμα.*

(1) *Η f **αντιστρέφει τα ανοικτά** υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή η f είναι Borel-μετρήσιμη.*

(2) *Η f **αντιστρέφει τα Borel** υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[B]$. (Μερικές φορές ο ορισμός των Borel-μετρησίμων συναρτήσεων δίνεται με αυτή τη συνθήκη.)*

Απόδειξη. Εργασία. □

Ορισμός 4.2.3. Θεωρούμε δύο Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και έναν μονομορφισμό $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$. Η f λέγεται **καλός Borel μονομορφισμός** αν

(i) είναι Borel-μετρήσιμη,

(ii) η εικόνα $f[\mathcal{X}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$, και

(iii) η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$ είναι Borel μετρήσιμη. (Θεωρούμε το $f[\mathcal{X}]$ ως μετρικό υπόχωρο του $\mathcal{Y}$.)

Σχόλιο. Είναι γνωστό ότι κάθε ένα-προς-ένα Borel-μετρήσιμη συνάρτηση ικανοποιεί όλες τις πιο πάνω ιδιότητες, δηλαδή είναι καλός Borel-μονομορφισμός. Αυτό όμως είναι συνέπεια ενός δύσκολου θεωρήματος, το οποίο δεν παίρνουμε δεδομένο στο παρόν στάδιο.

Παρατήρηση 4.2.4. Για κάθε καλό Borel-μονομορφισμό $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$ και κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$ το σύνολο $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$f[B] = g^{-1}[B] \quad \text{όπου } g = f^{-1} : f[\mathcal{X}] \rightarrowtail \mathcal{X}.$$

Επειδή η g είναι Borel-μετρήσιμη από την Πρόταση 4.2.2 το σύνολο $g^{-1}[B] = f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του χώρου $f[\mathcal{X}]$. Επειδή η f είναι καλός Borel-ισομορφισμός το $f[\mathcal{X}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$ και από την Πρόταση 4.1.7 το $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. □

Παρατήρηση 4.2.5. Η σύνθεση καλών Borel-μονομορφισμών είναι Borel μονομορφισμός.

Απόδειξη. Θεωρούμε καλούς Borel μονομορφισμούς $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$ και $g : \mathcal{Y} \rightarrowtail \mathcal{Z}$. Οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ είναι Borel-μετρήσιμες από την Άσκηση 4.2.16.

Αφού το $\mathcal{X}$ είναι προφανώς Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$ και η f είναι καλός Borel μονομορφισμός έχουμε ότι το σύνολο $f[\mathcal{X}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. Εφόσον η g είναι επίσης καλός Borel μονορφισμός προκύπτει από την Παρατήρηση ότι η εικόνα

$$(g \circ f)[\mathcal{X}] = g[f[\mathcal{X}]]$$

είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Z}$. □

Λήμμα 4.2.6. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας καλός Borel μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$. Δείχνουμε ότι η τ είναι επίσης καλός Borel-μονομορφισμός. Επειδή η τ είναι συνεχής είναι και Borel-μετρήσιμη. Επιπλέον το σύνολο $\tau[2^{\mathbb{N}}]$ είναι συμπαγές (ως συνεχής εικόνα συμπαγούς) και άρα είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Ειδικότερα το $\tau[2^{\mathbb{N}}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Τέλος η αντίστροφη συνάρτηση $\tau^{-1} : \tau[2^{\mathbb{N}}] \to 2^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής και άρα Borel-μετρήσιμη. (Θεωρούμε γνωστό ότι αν ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος και η $f : X \rightarrowtail Y$ είναι συνεχής και ένα-προς-ένα τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f[X] \to X$ είναι συνεχής.) □

Λήμμα 4.2.7. *Υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $\rho : \mathcal{N} \rightarrowtail 2^{\mathbb{N}}$ για την οποία η συνάρτηση $f^{-1} : f[\mathcal{N}] \rightarrowtail 2^{\mathbb{N}}$ να είναι συνεχής και το σύνολο $f[\mathcal{N}]$ είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_2$ υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Εργασία. □

Λήμμα 4.2.8. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας καλός Borel μονομορφισμός $f : \mathcal{N} \rightarrowtail \mathcal{X}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\rho : \mathcal{N} \rightarrowtail 2^{\mathbb{N}}$ όπως στο 4.2.7. Επειδή κάθε συνεχής συνάρτηση είναι Borel-μετρήσιμη και τα $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_2$ σύνολα είναι Borel προκύπτει ότι η ρ είναι καλός Borel μονομορφισμός.

Από το Λήμμα 4.2.7 υπάρχει καλός Borel μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{X}$ και από την Παρατήρηση 4.2.5 η σύνθεση

$$f = \tau \circ \rho : \mathcal{N} \rightarrowtail \mathcal{X}$$

είναι καλός Borel μονομορφισμός. □

Λήμμα 4.2.9. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ υπάρχει ένας καλός Borel μονομορφισμός $\tau : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια κατάλληλη μετρική d στον $\mathcal{X}$ και ένα αριθμήσιμο $D = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ και πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \setminus \{\Lambda\} \mapsto x_u \in \mathcal{X}$$

που ορίζεται ως εξής:

$$x_{(k)} = r_k \quad \text{και} \quad x_{u*(k)} = \begin{cases} r_k, \text{ αν } d(r_k, x_u) < 2^{-(|u|+1)} \\ x_u, \text{ αν } d(r_k, x_u) \geqslant 2^{-(|u|+1)} \end{cases}$$

Όπως έχουμε δει στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.7 καθώς και στην επακόλουθη Παρατήρηση 2.3.8 η συνάρτηση

$$\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X} : \pi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha|n}$$

είναι συνεχής επιμορφισμός και η συνάρτηση

$$\tau : \mathcal{X} \to \mathcal{N} : \tau(x)(n) = \text{ο ελάχιστος } k \text{ με } d(r_k, x) < 2^{-(n+2)}$$

είναι μονομορφισμός που ικανοποιεί

$$\pi(\tau(x)) = x,\ x \in \mathcal{X} \quad \text{και} \quad \tau(\pi(\alpha)) = \alpha,\ \alpha \in \tau[\mathcal{X}].$$

Δείχνουμε ότι η τ είναι καλός Borel μονομορφισμός. Αρχικά θεωρούμε την

$$\tau^{-1} : \tau[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$$

και παρατηρούμε ότι για κάθε $\alpha = \tau(x) \in \tau[\mathcal{X}]$ ισχύει $\tau^{-1}(\alpha) = x = \pi(\alpha)$, δηλαδή $\tau^{-1} = \pi|\tau[\mathcal{X}]$. Αφού η π είναι συνεχής έπεται ότι και η τ^{-1} είναι συνεχής.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η τ αντιστρέφει τα ανοικτά σύνολα του $\mathcal{N}$ σε $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$. Αφού τα $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ σύνολα είναι Borel προκύπτει από αυτό ότι η τ είναι Borel-μετρήσιμη. Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\tau(x) \in \mathcal{N}_u &\iff u \sqsubseteq \tau(x) \\
&\iff \forall n < |u|\ u(n) = \tau(x)(n) \\
&\iff \forall n < |u|\ u(n) = \text{ ο ελάχιστος } k \text{ με } d(r_k, x) < 2^{-(n+2)} \\
&\iff \forall n < |u|\ (d(r_{u(n)}, x) < 2^{-(n+2)}\ \&\ \forall t < u(n)\ d(r_t, x) \geqslant 2^{-(n+2)}).
\end{aligned}$$

Προκύπτει ότι το σύνολο $\tau^{-1}[\mathcal{N}_u]$ είναι $\utilde{\mathbf{\Delta}}^0_2$ επομένως και $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Επειδή κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{N}$ είναι ένωση συνόλων της μορφής $\mathcal{N}_u$ για κάποια $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έχουμε από την κλειστότητα της $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ ως προς τον τελεστή της αριθμήσιμης ένωσης ότι η τ αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^0_2$.

Τέλος αναγνωρίζουμε το σύνολο $\tau[\mathcal{X}]$. Όπως είδαμε πιο πάνω, το $\pi(\alpha)$ είναι το μοναδικό $x \in \mathcal{X}$ με $\alpha = \tau(x)$ για κάθε $\alpha \in \tau[\mathcal{X}]$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\alpha \in \tau[\mathcal{X}] &\iff \alpha = \tau(\pi(\alpha)) \\
&\iff \forall n\ \alpha(n) = \tau(\pi(\alpha))(n) \\
&\iff \forall n\ \alpha(n) = \text{ ο ελάχιστος } k \text{ με } d(r_k, \pi(\alpha)) < 2^{-(n+2)} \\
&\iff \forall n\ (d(\pi(\alpha), r_{\alpha(n)}) < 2^{-(n+2)} \&\ \forall t < \alpha(n)\ d(\pi(\alpha), r_t) \geqslant 2^{-(n+2)}.
\end{aligned}$$

Το πιο πάνω δείχνει ότι το $\tau[\mathcal{X}]$ είναι $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_2$ υποσύνολο του $\mathcal{N}$. ▫

Θεώρημα 4.2.10 (Schröder-Bernstein για καλούς Borel μονομορφισμούς)**.** *Για κάθε δύο Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ αν υπάρχουν καλοί Borel μονομορφισμοί*

$$f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y} \quad g : \mathcal{Y} \rightarrowtail \mathcal{X}$$

τότε υπάρχει Borel ισομορφισμός $h : \mathcal{X} \twoheadrightarrow \mathcal{Y}$.

Απόδειξη. (Α. Τσαρπαλιάς) Εργασία. ▫

Θεώρημα 4.2.11. *Κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος είναι Borel-ισομορφικός με τον χώρο του Baire.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Από τα Λήμματα 4.2.9 και 4.2.9 υπάρχουν καλοί Borel μονομορφισμοί $f : \mathcal{N} \rightarrowtail \mathcal{X}$ και $\tau : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{N}$. Επομένως από το Θεώρημα 4.2.10 υπάρχει Borel ισομορφισμός $h : \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{X}$. □

Πόρισμα 4.2.12. *Κάθε δύο υπεραριθμήσιμοι Πολωνικοί χώροι είναι Borel ισομορφικοί.*

Απόδειξη. Αν $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ είναι υπεραριθμήσιμοι Πολωνικοί χώροι τότε από το Θεώρημα 4.2.11 υπάρχουν Borel ισομορφισμοί

$$f : \mathcal{X} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{N} \quad \text{και} \quad g : \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{Y}.$$

Είναι άμεσο από την Άσκηση 4.2.16 ότι η σύνθεση $g \circ f : \mathcal{X} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{Y}$ είναι Borel ισομορφισμός.

□

Ασκήσεις

Η έννοια της σ-άλγεβρας επιδέχεται διάφορους χαρακτηρισμούς. Δίνουμε έναν από τους πιο χρήσιμους.

Άσκηση 4.2.13. Για κάθε μετρικό χώρο X και κάθε οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(1) Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα.
(2) Η $\mathcal{A}$ περιέχει τα σύνολα $\emptyset, X$, είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα και ως προς τις αριθμήσιμες τομές.

Άσκηση 4.2.14 (Χαρακτηρισμοί οικογένειας Borel συνόλων)**.** Για κάθε μετρικό χώρο X και κάθε οικογένεια $\mathcal{A}$ από υποσύνολα του X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(1) Η $\mathcal{A}$ είναι η οικογένεια των Borel υποσυνόλων του X.
(2) Η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο X που περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του X.
(3) Η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη οικογένεια από υποσύνολα του X που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X και είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις καθώς και τις αριθμήσιμες τομές.
(4) Η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη οικογένεια από υποσύνολα του X που περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του X και είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις καθώς και τις αριθμήσιμες τομές.

Άσκηση 4.2.15. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X, Y, Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις $f_1, f_2 : X \to Y$ και ένα Borel σύνολο $B \subseteq X$. Τότε η συνάρτηση $f : X \to Y$ με

$$\begin{cases} f_1(x), & x \in B, \\ f_2(x), & x \notin B, \end{cases}$$

είναι Borel-μετρήσιμη.

Άσκηση 4.2.16. Η σύνθεση Borel-μετρησίμων συναρτήσεων είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Ειδικότερα η σύνθεση μιας Borel-μετρήσιμης συνάρτησης με μία συνεχή είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση.

Άσκηση 4.2.17. Για κάθε ακολουθία $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ από μετρικούς χώρους και κάθε ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $B_n \in \mathcal{B}(X_n)$, το γινόμενο $\prod_{n\in\mathbb{N}} B_n$ είναι Borel υποσύνολο του $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Όμοια για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $B_0, \ldots, B_n$ με $B_i \in \mathcal{B}(X_i)$ για $i = 0, \ldots, n$ το γινόμενο $B_0 \times \cdots \times B_n$ είναι Borel υποσύνολο του $X_0 \times \cdots \times X_n$.

Άσκηση 4.2.18. Θεωρούμε μετρικούς χώρους (X, d), (Y_n, ρ_n), $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε συνάρτηση

$$f : X \to \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n : f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$$

η f είναι Borel-μετρήσιμη αν και μόνο αν κάθε συνάρτηση f_n είναι Borel-μετρήσιμη.

Όμοια για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε συνάρτηση

$$f : X \to Y_0 \times \cdots \times Y_n : f(x) = (f_0(x), \ldots, f_n(x))$$

η f είναι Borel-μετρήσιμη αν και μόνο αν οι $f_0, \ldots, f_n$ είναι Borel-μετρήσιμες.

Άσκηση 4.2.19. Για κάθε μετρικό χώρο X και κάθε Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις $f, g : X \to \mathbb{R}$, οι συναρτήσεις

$$f + g,\ f \cdot g,\ |f|,\ \lambda \cdot f,\ (\lambda \in \mathbb{R}),\ \max\{f + g\},\ \min\{f + g\},$$

είναι Borel-μετρήσιμες.

4.3. Ο χώρος Effros-Borel

4.4. Οι κλάσεις Borel συνόλων υπεπεπερασμένης τάξης

Ασκήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αναλυτικά σύνολα

5.1. Ιδιότητες και χαρακτηρισμοί

Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ είναι **αναλυτικό (analytic)** αν είναι $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ δηλαδή υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$x \in P \iff \exists \alpha \, (x, \alpha) \in F.$$

Πρόταση 5.1.1 (Θεμελιώδεις ιδιότητες της κλάσης των αναλυτικών συνόλων)**.** *Η κλάση $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ των αναλυτικών συνόλων περιέχει τα Borel σύνολα και είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση, τον τελεστή της προβολής $\exists^{\mathcal{Y}}$, τις συνεχείς εικόνες, τους τελεστές $\exists^{\mathbb{N}}$, $\forall^{\mathbb{N}}$, $\vee$, $\&$, όπως επίσης τον τελεστή της αριθμήσιμης διάζευξης $\bigvee_{\mathbb{N}}$ και τον τελεστή της αριθμήσιμης σύζευξης $\bigwedge_{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Οι ιδιότητες κλειστότητας είναι άμεσες από το Θεώρημα 3.4.5 και την Άσκηση 3.4.10 (κλειστότητα ως προς συνεχείς εικόνες).

Για να δείξουμε ότι κάθε Borel σύνολο είναι αναλυτικό θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathcal{X} \mid \text{τα σύνολα } B \text{ και } \mathcal{X} \setminus B \text{ είναι αναλυτικά}\}.$$

Δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Από αυτό προκύπτει ότι κάθε Borel σύνολο περιέχεται στην $\mathcal{A}$ και ειδικότερα κάθε Borel σύνολο είναι αναλυτικό.

Προφανώς η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή του συμπληρώματος μέσα στον $\mathcal{X}$. Αν $B_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε τα σύνολα B_n είναι αναλυτικά και λόγω της κλειστότητας ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ το σύνολο είναι $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ είναι αναλυτικό. Επιπλέον

$$\mathcal{X} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{X} \setminus B_n) \ \in \mathcal{A}$$

επειδή $B_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και λόγω της κλειστότητας της κλάσης των αναλυτικών συνόλων ως προς $\bigwedge_{\mathbb{N}}$.

Ο ισχυρισμός ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ είναι άμεσος από την Άσκηση 3.4.9, παραθέτουμε όμως το επιχείρημα χάριν πληρότητας της απόδειξης. Θεωρούμε αρχικά ένα κλειστό $C \subseteq \mathcal{X}$. Το σύνολο $F = C \times \{\mathbf{0}\}$, όπου $\mathbf{0}$ είναι η σταθερή ακολουθία $(0, 0, \dots, 0, \dots) \in \mathcal{N}$, είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και προφανώς

$$x \in C \iff \exists \alpha \, (x, \alpha) \in F$$

για κάθε $x \in \mathcal{X}$. Συνεπώς το $C = \exists^{\mathcal{N}} F$ είναι αναλυτικό υποσύνολο του X.

Κάθε ανοικτό $V \subseteq \mathcal{X}$ είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$, και από τα πιο πάνω το V είναι αριθμήσιμη ένωση αναλυτικών συνόλων, επομένως αναλυτικό σύνολο.

Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε ανοικτό και κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ είναι αναλυτικό, ισοδύναμα η $\mathcal{A}$ περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$. □

Όπως θα δούμε στη συνέχεια (Θεώρημα του Suslin 5.2.3) η σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ της πιο πάνω απόδειξης αποτελείται ακριβώς από τα Borel σύνολα, με άλλα λόγια *τα Borel υποσύνολα του $\mathcal{X}$ είναι ακριβώς τα αναλυτικά σύνολα με αναλυτικό συμπλήρωμα.*

Προχωράμε στους βασικότερους χαρακτηρισμούς της κλάσης των αναλυτικών συνόλων.

Πρόταση 5.1.2. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας Πολωνικός χώρος και $P \subseteq \mathcal{X}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το P είναι αναλυτικό.*

(ii) *Υπάρχει Πολωνικός χώρος $\mathcal{Y}$ και $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ κλειστό με $P = \exists^{\mathcal{Y}} F$.*

(iii) *Υπάρχει Πολωνικός χώρος $\mathcal{Y}$ και $B \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ Borel με $P = \exists^{\mathcal{Y}} B$.*

Απόδειξη. Οι συνεπαγωγές (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) είναι άμεσες θεωρώντας $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$ και $B = F$. Η συνεπαγωγή (iii) $\Longrightarrow$ (i) είναι επίσης άμεση επειδή κάθε Borel σύνολο είναι αναλυτικό (Πρόταση 5.1.1) και η κλάση των αναλυτικών συνόλων είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{Y}}$ για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$. ▫

Πρόταση 5.1.3 ([**Mos09**], [**Kec95**])**.** *Έστω $\mathcal{X}$ ένας Πολωνικός χώρος και $P \subseteq \mathcal{X}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το P είναι αναλυτικό.*

(ii) *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ με $P = f[\mathcal{N}]$.*

(iii) *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ και Borel $B \subseteq \mathcal{N}$ με $P = g[B]$.*

(iv) *Υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ και Borel $B \subseteq \mathcal{N}$ με $P = h[B]$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Υποθέτουμε ότι $P = \exists^{\mathcal{N}} F$ όπου $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ κλειστό. Το F με τον περιορισμό της τοπολογίας του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ είναι Πολωνικός χώρος και επομένως από το Θεώρημα 2.3.7 υπάρχει συνεχής επιμορφισμός $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow F$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in P &\iff \exists \alpha \, (x, \alpha) \in F \\ &\iff \exists \beta \, (\pi(\beta) \in F \,\&\, (\mathrm{pr}_1 \circ \pi)(\beta) = x) \\ &\iff \exists \beta \, (\mathrm{pr}_1 \circ \pi)(\beta) = x. \end{aligned}$$

όπου στις πιο πάνω ισοδυναμίες χρησιμοποιήσαμε ότι η π είναι επί και ότι παίρνει τιμές στο σύνολο F. Με $\mathrm{pr}_1 \equiv \mathrm{pr}_1^{\mathcal{X},\mathcal{N}} : \mathcal{X} \times \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ εννοούμε τη συνάρτηση προβολής στην πρώτη συντεταγμένη. Παίρνουμε τη συνάρτηση $f = \mathrm{pr}_1 \circ \pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$. Η f είναι συνεχής και είναι σαφές από τις πιο πάνω ισοδυναμίες ότι $P = f[\mathcal{N}]$.

Οι συνεπαγωγές (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) είναι σαφείς παίρνοντας $h = g = f$ και $B = \mathcal{N}$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι $P = h[B]$, όπου η $h : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ είναι Borel-μετρήσιμη και $B \subseteq \mathcal{N}$ είναι Borel σύνολο. Θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $(N_s)_{s \in \mathbb{N}}$ του $\mathcal{X}$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in P &\iff \exists \beta \, (\beta \in B \,\&\, x = h(\beta)) \\ &\iff \exists \beta \, (\beta \in B \,\&\, \forall s \, (x \in N_s \longrightarrow h(\beta) \in N_s)) \\ &\iff \exists \beta \, (\beta \in B \,\&\, \forall s \, (x \notin N_s \vee h(\beta) \in N_s)). \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 5.1.1 το δεξιό σκέλος της τελευταίας ισοδυναμίας ορίζει ένα αναλυτικό υποσύνολο του $\mathcal{X}$ (Άσκηση 5.1.6). ▫

Πρόταση 5.1.4. *Το σύνολο* IF *των μη θεμελιωμένων δένδρων είναι αναλυτικό υποσύνολο του* Tr.

Απόδειξη. Για κάθε $T \in \mathrm{Tr}$ έχουμε

$$\begin{aligned} T \in \mathrm{IF} &\iff \exists \alpha \; \alpha \in [T] \\ &\iff \exists \alpha \forall t \; \alpha|t \in T. \end{aligned}$$

Το σύνολο $F = \{(T,\alpha) \in \mathrm{Tr} \times \mathcal{N} \mid \forall t\ \alpha|t \in T\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathrm{Tr} \times \mathcal{N}$ και από τις πιο πάνω ισοδυναμίες $\mathrm{IF} = \exists^{\mathcal{N}} F$. ▫

Το IF θεωρείται το “πιο πρωτογενές” αναλυτικό σύνολο κυρίως λόγω του επόμενου αποτελέσματος.

Θεώρημα 5.1.5 (Το Βασικό Θεώρημα Αναπαράστασης των Αναλυτικών Συνόλων, Lusin-Sierpinski, [**LS23**])**.** *Για κάθε αναλυτικό υποσύνολο P ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ υπάρχει μια $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr}$ με την ιδιότητα*

$$x \in P \iff f(x) \in \mathrm{IF}$$

όπου $x \in \mathcal{X}$.

*Μάλιστα αν ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος τότε η f μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι **συνεχής** συνάρτηση και άρα το IF είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$-πλήρες αναλυτικό σύνολο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα κλειστό σύνολο F με $P = \exists^{\mathcal{N}} F$. Από το Βασικό Λήμμα Αναπαράστασης Κλειστών Συνόλων 2.5.14 υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $T \subseteq \mathcal{X} \times \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με

$$(x,\alpha) \in F \iff \alpha \in [T(x)]$$

για κάθε x, α, όπου το σύνολο $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x,u) \in T\}$ είναι δένδρο. Ορίζουμε

$$f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr} : f(x) = T(x).$$

Από την Άσκηση 2.5.26 η f είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$-μετρήσιμη και αν ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος η f είναι συνεχής. Τέλος για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε,

$$\begin{aligned} x \in P &\iff \exists\alpha\ (x,\alpha) \in F \\ &\iff \exists\alpha\ (\alpha \in [T(x)]) \\ &\iff f(x) = T(x) \in \mathrm{IF}\,. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ▫

Ασκήσεις

Άσκηση 5.1.6. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, μια Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$, και ένα Borel υποσύνολο $B \subseteq \mathcal{N}$. Εξηγήστε γιατί το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P \iff \exists\beta\ (\beta \in B\ \&\ \forall s\ (x \notin N_s\ \vee\ h(\beta) \in N_s))$$

είναι αναλυτικό σύνολο.

5.2. Τα Θεωρήματα Διαχωρισμού των Lusin και Suslin

Ορισμός 5.2.1. Θεωρούμε σύνολα $A, B \subseteq X$ με $A \cap B = \varnothing$. Ένα σύνολο $C \subseteq X$ **διαχωρίζει** το A από το B αν $A \subseteq C$ και $C \cap B = \varnothing$.

Παρατηρούμε ότι αν το C διαχωρίζει το A από το B τότε το $X \setminus C$ διαχωρίζει το B από το A.

Θεώρημα 5.2.2 (Το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin, [**LS18**], [**LS23**], [**Lus72**])**.** *Για κάθε δύο ξένα αναλυτικά υποσύνολα A, B ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ υπάρχει ένα Borel σύνολο C που διαχωρίζει το A από το B.*

Απόδειξη. Δίνουμε την απόδειξη όπως στο [**Kec95**, 14.7]. Από την Πρόταση 5.1.3 υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις

$$f, g : \mathcal{N} \to \mathcal{X} \quad \text{με} \quad A = f[\mathcal{N}] \quad \text{και} \quad B = g[\mathcal{N}].$$

Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ θέτουμε

$$A_u = f[\mathcal{N}_u] \quad \text{και} \quad B_u = g[\mathcal{N}_u].$$

Παρατηρούμε ότι $A_\Lambda = f[\mathcal{N}_\Lambda] = f[\mathcal{N}] = A$ και όμοια $B_\Lambda = B$. Ακόμα είναι ξεκάθαρο από τον ορισμό ότι $A_u \subseteq A$ και $B_w \subseteq B$. Αφού τα A και B είναι ξένα προκύπτει ότι $A_u \cap B_w = \varnothing$ για κάθε $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Επιπλέον έχουμε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} x \in A_u &\iff \exists \alpha \in \mathcal{N}_u \; x = f(\alpha) \\ &\iff \exists m \; \exists \alpha \in \mathcal{N}_{u*(m)} \; x = f(\alpha) \\ &\iff \exists m \; x \in f[\mathcal{N}_{u*(m)}] \\ &\iff \exists m \; x \in A_{u*(m)}, \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη από τις πιο πάνω ισοδυναμίες παίρνουμε $m = \alpha(|u|)$. Επομένως

$$A_u = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{u*(m)} \quad \text{και όμοια} \quad B_w = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{w*(n)} \tag{5.1}$$

για κάθε $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Ισχυρισμός. Δοσμένων $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, αν για κάθε m, n υπάρχει Borel σύνολο $C^{u,w}_{m,n} \equiv C_{m,n}$ που διαχωρίζει το $A_{u*(m)}$ από το $B_{u*(n)}$ τότε υπάρχει Borel σύνολο C που διαχωρίζει το A από το B.

Απόδειξη ισχυρισμού. Θεωρούμε u, w και $C_{m,n}$ όπως στην εκφώνηση και ορίζουμε

$$C = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{m,n}.$$

Προφανώς το C είναι Borel σύνολο. Δείχνουμε ότι $A_u \subseteq C$. Έστω $x \in A_u$, τότε από την (5.1) υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $x \in A_{u*(m)}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει από την υπόθεση

$$A_{u*(m)} \subseteq C_{m,n} \qquad \text{και} \qquad B_{w*(n)} \cap C_{m,n} = \varnothing. \tag{5.2}$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \in C_{m,n}$ δηλαδή $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{m,n} \subseteq C$.

Έπειτα δείχνουμε ότι $C \cap B_w = \varnothing$. Έστω $x \in C$, τότε υπάρχει m έτσι ώστε $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{m,n}$. Αν είχαμε $x \in B_w$ τότε από την (5.1) θα υπήρχε $n \in \mathbb{N}$ με $x \in B_{w*(n)}$. Συνεπώς θα είχαμε $x \in C_{m,n} \cap B_{w*(n)}$ που αντιβαίνει στην (5.2). Άρα $x \notin B_w$ και άρα ισχύει $C \cap B_w = \varnothing$. □ (*ισχυρισμός*)

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι δεν υπάρχει Borel σύνολο που διαχωρίζει το $A = A_\Lambda$ από το $B = B_\Lambda$. Εφαρμόζουμε τον προηγούμενο ισχυρισμό με $u = w = \Lambda$ και καταλήγουμε ότι υπάρχουν $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε δεν υπάρχει Borel σύνολο που να διαχωρίζει το $A_{u*(m_0)} = A_{(m_0)}$ από το $B_{w*(n_0)} = B_{(n_0)}$.

Εφαρμόζουμε ξανά τον πιο πάνω ισχυρισμό με $u = (m_0)$ και $v = (n_0)$ και παίρνουμε $m_1, n_1 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε δεν υπάρχει Borel σύνολο που να διαχωρίζει το $A_{u*(m_1)} = A_{(m_0,m_1)}$ από το $B_{w*(n_1)} = B_{(n_0,n_1)}$. Συνεχίζουμε αναδρομικά και βρίσκουμε στοιχεία του χώρου του Baire,

$$\gamma = (m_0, m_1, \dots) \quad \delta = (n_0, n_1, \dots)$$

έτσι ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ δεν υπάρχει Borel σύνολο που να διαχωρίζει το $A_{(m_0,m_1,\dots,m_{k-1})} = A_{\gamma|k}$ από το $B_{(n_0,n_1,\dots,n_{k-1})} = B_{\delta|k}$.

Αφού $A = f[\mathcal{N}]$ και $B = g[\mathcal{N}]$ έχουμε ειδικότερα ότι $f(\gamma) \in A$ και $g(\delta) \in B$. Επειδή τα A και B είναι ξένα σύνολα προκύπτει ότι $f(\gamma) \neq g(\delta)$. Θεωρούμε ανοικτές περιοχές $U, W \subseteq \mathcal{X}$ των $f(\gamma)$ και $g(\delta)$ αντίστοιχα με $U \cap W = \varnothing$.

Από τη συνέχεια των f και g υπάρχουν $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $\gamma \in \mathcal{N}_u$, $f[\mathcal{N}_u] \subseteq U$, $\delta \in \mathcal{N}_w$ και $g[\mathcal{N}_w] \subseteq W$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα u, w έχουν το ίδιο μήκος. [Σε διαφορετική περίπτωση (ας πούμε $|u| < |w|$) προεκτείνουμε το u στο u' κατά μήκος του γ ώστε να έχουμε $|u'| = |w|$. Τότε ισχύει $\gamma \in \mathcal{N}_{u'}$ και $f[\mathcal{N}_{u'}] \subseteq f[\mathcal{N}_u] \subseteq U$.]

Εφόσον $u \sqsubseteq \gamma$, $w \sqsubseteq \delta$ και $|u| = |w|$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $u = \gamma|k$ και $w = \delta|k$. Προκύπτει από τα προηγούμενα ότι

$$A_u = f[\mathcal{N}_u] \subseteq U \quad \text{και} \quad B_w \cap U = f[\mathcal{N}_w] \cap U \subseteq W \cap U = \varnothing.$$

Δηλαδή το ανοικτό σύνολο U διαχωρίζει το $A_u = A_{\gamma|k}$ από το $B_w = B_{\delta|k}$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την επιλογή των γ και δ. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 5.2.3 (Το Θεώρημα του Suslin, [**Lus72**]). *Τα Borel σύνολα ενός Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ είναι ακριβώς τα αμφι-αναλυτικά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, δηλαδή*

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}{}^1_1(\mathcal{X}).$$

Απόδειξη. Κάθε Borel σύνολο είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}{}^1_1$ από το Πόρισμα 4.1.6. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό θεωρούμε ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}{}^1_1$ σύνολο $A \subseteq \mathcal{X}$ και θεωρούμε το $B = \mathcal{X} \setminus A$. Τότε τα A, B είναι ξένα αναλυτικά σύνολα και από το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin (Θεώρημα 5.2.2) υπάρχει ένα Borel $C \subseteq \mathcal{X}$ με $A \subseteq C$ και $B \cap C = \emptyset$.

Εφόσον $B = \mathcal{X} \setminus A$ είναι άμεσο ότι $A = C$ και επομένως το A είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$. ▫

Πόρισμα 5.2.4 (Το γράφημα Borel-μετρήσιμης συνάρτησης). *Για κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η f είναι Borel-μετρήσιμη.*
(2) *Το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι Borel σύνολο.*
(3) *Το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι αναλυτικό σύνολο.*

Απόδειξη. Για την κατεύθυνση (1) $\implies$ (2) θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $(V_s)_{s\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{Y}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} (x, y) \in Graph(f) &\iff \forall s\, (y \in V_s \longrightarrow f(x) \in V_s) \\ &\iff \forall s\, (y \notin V_s \vee f(x) \in V_s). \end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης των Borel συνόλων προκύπτει ότι το $Graph(f)$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Η κατεύθυνση (2) $\implies$ (3) είναι προφανής αφού κάθε Borel σύνολο είναι αναλυτικό.

Τέλος για την κατεύθυνση (3) $\implies$ (1) θεωρούμε ένα ανοικτό $U \subseteq \mathcal{Y}$. Πρέπει να δείξουμε ότι το $f^{-1}[U]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[U] &\iff f(x) \in U \\ &\iff \exists y\, ((x, y) \in Graph(f)\ \&\ y \in U). \end{aligned}$$

Επειδή η κλάση των αναλυτικών συνόλων είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{Y}}$ έχουμε από την πιο πάνω ισοδυναμία ότι το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι αναλυτικό. Επιπλέον για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[U] &\iff f(x) \in U \\ &\iff \forall y\, ((x, y) \in Graph(f) \longrightarrow y \in U) \\ &\iff \forall y\, ((x, y) \notin Graph(f) \vee y \in U). \end{aligned}$$

Προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία (και την κλειστότητα της κλάσης των συναναλυτικών συνόλων ως προς $\forall^{\mathcal{Y}}$) ότι το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι συναναλυτικό.

Από το Θεώρημα του Suslin (Πόρισμα 5.2.3) το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι Borel. ▫

5.3. Το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου

5.4. Το Θεώρημα Kunen-Martin

5.5. Μετρησιμότητα των Αναλυτικών Συνόλων

5.6. Αναλυτικά Σύνολα και Ομαλοποίηση

Α′

Λύσεις Ασκήσεων και Υποδείξεις

Κεφάλαιο 2

Άσκηση 2.1.10. Αρχικά δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις ρ και d είναι μετρικές. Θεωρούμε $x, y \in X$. Είναι σαφές ότι $\rho(x,y), \sigma(x,y) \geqslant 0$ και πως $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$.

Επιπλέον αν $\rho(x,y) = 0$ τότε $\rho(x,y) < 1$ άρα $\rho(x,y) = d(x,y) = 0$ και $x = y$. Αν $\sigma(x,y) = 0$ είναι σαφές ότι $d(x,y) = 0$ και $x = y$.

Επαληθεύουμε την τριγωνική ανισότητα για την ρ, παρατηρούμε ότι αν $\rho(x,z) \geqslant 1$ ή $\rho(z,y) \geqslant 1$ τότε $\rho(x,y) \leqslant 1 \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$. Επομένως υποθέτουμε ότι $\rho(x,z), \rho(z,y) < 1$, οπότε έχουμε $\rho(x,z) = d(x,z)$ και $\rho(z,y) = d(z,y)$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει

$$\rho(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Η τριγωνική ανισότητα για την σ προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση $f(t) = \dfrac{t}{1+t}, t \geqslant 0$ είναι αύξουσα. (Ένας τρόπος για να το δούμε αυτό είναι παίρνοντας την 1η παράγωγο της f η οποία είναι θετική.)

Θα έχουμε λοιπόν $\sigma(x,y) = f(d(x,y)) \leqslant f(d(x,z) + d(z,y))$ οπότε

$$\begin{aligned}
\sigma(x,y) &\leqslant \frac{d(x,z) + d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \\
&= \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \\
&\leqslant \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(z,y)} \\
&= \sigma(x,z) + \sigma(z,y).
\end{aligned}$$

Έπειτα δείχνουμε ότι οι μετρικές είναι ισοδύναμες. Θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X και $x \in X$. Αν $d(x_n, x) \to 0$ τότε για όλα τα μεγάλα n θα έχουμε $d(x_n, x) < 1$ και άρα $\rho(x_n, x) = d(x_n, x)$. Επομένως $\rho(x_n, x) \to 0$. Αντίστροφα αν $\rho(x_n, x) \to 0$ τότε για όλα τα μεγάλα n έχουμε $\rho(x_n, x) < 1$, επομένως $\rho(x_n, x) = d(x_n, x) \to 0$.

Για την σ χρησιμοποιούμε ότι οι συναρτήσεις $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$, $t \geqslant 0$, και $g(s) = \dfrac{s}{1-s}$, $s \in [0,1)$ είναι συνεχείς στο 0.

Επειδή η διαχωρισιμότητα είναι τοπολογική ιδιότητα και οι μετρικές είναι ισοδύναμες είναι σαφές ότι αν ο (X,d) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος τότε και οι μετρικοί χώροι (X,ρ) και (X,σ) είναι διαχωρίσιμοι.

Τέλος δείχνουμε το ζητούμενο για την πληρότητα. Υποθέτουμε ότι ο (X,d) είναι πλήρης μετρικός χώρος και θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X. Αν η ακολουθία είναι ρ-Cauchy τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n, m \geqslant N$ ισχύει $\rho(x_n, x_m) < 1$, άρα $\rho(x_n, x_m) = d(x_n, x_m)$. Από αυτό προκύπτει ότι η ακολουθία

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d-Cauchy και αφού ο (X,d) είναι πλήρης υπάρχει $x \in X$ με $d(x_n,x) \to x$. Όπως είδαμε πιο πάνω αυτό είναι ισοδύναμο με $\rho(x_n,x) \to 0$.

Υποθέτουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σ-Cauchy και δείχνουμε ότι είναι και d-Cauchy. Θεωρούμε $r > 0$, αφού η προηγούμενη συνάρτηση g είναι συνεχής στο 0 υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $s \in [0,1)$ με $|s| < \delta$ ισχύει $g(s) < r$. Για το $\delta > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n,m \geqslant n_0$ έχουμε $s_{n,m} = \sigma(x_n,x_m) < \delta$, άρα $g(s_{n,m}) = g(\sigma(x_n,x_m)) = d(x_n,x_m) < r$. Επομένως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d-Cauchy και όπως πριν, αφού ο (X,d) είναι πλήρης, έχουμε ότι υπάρχει $x \in X$ με $d(x_n,x) \to 0$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα $\sigma(x_n,x) \to 0$.

Καταλήγουμε ότι οι μετρικοί χώροι (X,ρ) και (X,σ) είναι πλήρεις.

Άσκηση 2.1.11. Είναι σαφές ότι η f είναι ένα-προς-ένα γιατί αν $f(y_1) = f(y_2)$ τότε $\rho(y_1,y_2) = d(f(y_1),f(y_2)) = 0$ και $y_1 = y_2$. Επίσης είναι σαφές ότι για κάθε ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον και κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$y_n \xrightarrow{\rho} y \iff f(y_n) \xrightarrow{d} f(y),$$

συνεπώς τόσο η f όσο και η f^{-1} είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Για κάθε Cauchy ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον (Y,ρ) η ακολουθία $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον (X,d), επομένως αν ο (X,d) είναι πλήρης τότε υπάρχει $x \in X$ με $f(y_n) \xrightarrow{d} x = f(y)$ και όπως πιο πάνω έχουμε $y_n \xrightarrow{\rho} y$.

Άσκηση 2.1.12. Αν έχουμε μια ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $C([a,b])$ που είναι $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy τότε για κάθε $x \in [a,b]$ η ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Όπως είναι γνωστό η f είναι συνεχής και η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή $f \in C([a,b])$ και $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Επομένως ο $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

Επίσης είναι γνωστό ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι το ομοιόμορφο όριο ακολουθίας πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές. Δηλαδή το σύνολο όλων των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές, που είναι αριθμήσιμο σύνολο, είναι πυκνό στον $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$.

Καταλήγουμε ότι ο $C([a,b])$ με την τοπολογία της νόρμας $\|\cdot\|_\infty$ είναι Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.13. Είναι γνωστό από τη Συναρτησιακή Ανάλυση ότι ο χώρος $(\ell^p,\|\cdot\|_p)$ είναι πλήρης για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Μάλιστα για $1 \leqslant p < \infty$ το σύνολο όλων των τελικά μηδενικών ακολουθιών ρητών αριθμών

$$D = \{(q_0,\dots,q_n,0,0,\dots) \mid \forall i \leqslant n\ q_i \in \mathbb{Q}\}$$

είναι πυκνό στον $(\ell^p,\|\cdot\|_p)$. Το D είναι αριθμήσιμο σύνολο, επομένως ο ℓ^p με την τοπολογία της p-νόρμας $\|\cdot\|_p$ είναι Πολωνικός χώρος.

Άσκηση 2.1.14. Θεωρούμε αρχικά αριθμήσιμα σύνολα $D_X \subseteq X$ και $D_Y \subseteq Y$ που είναι πυκνά στους χώρους (X,d) και (Y,ρ) αντίστοιχα.

Τότε τα σύνολα $(\{0\}\times D_X)\cup(\{1\}\times D_Y)$ και $D_X \times D_Y$ είναι αριθμήσιμα και πυκνά στους χώρους $X \oplus Y$ και $X \times Y$ αντίστοιχα. Επομένως οι δύο τελευταίοι μετρικοί χώροι είναι διαχωρίσιμοι.

Για την πληρότητα του $X \oplus Y$ θεωρούμε μια ακολουθία $((i_n,a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του $X \oplus Y$ που είναι $d_\oplus$-Cauchy, όπου $d_\oplus$ είναι η μετρική στον $X \oplus Y$ που ορίσαμε στην Εισαγωγή.

Τότε υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $d_\oplus((i_n,a_n),(i_{n_0},a_{n_0})) < 1$. Από τον ορισμό της $d_\oplus$ έχουμε $i_n = i_{n_0}$ για κάθε $n \geqslant n_0$.

Αν $i_{n_0} = 0$ τότε για κάθε $n, m \geqslant n_0$ έχουμε $i_n = i_m = i_{n_0} = 0$ και συνεπώς $a_n, a_m \in X$ καθώς και $d_\oplus((i_n, a_n), (i_m, a_m)) = d(a_n, a_m)$. Επομένως η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον (X, d) και αφού ο τελευταίος μετρικός χώρος είναι πλήρης, υπάρχει $a \in X$ με $a_n \xrightarrow{d} a$. Άρα $d_\oplus((i_n, a_n), (0, a)) = d(a_n, a)$ για κάθε $n \geqslant n_0$ και συνεπώς $d_\oplus((i_n, a_n), (0, a)) \to 0$.

Η περίπτωση $i_{n_0} = 1$ είναι όμοια. Άρα ο $(X \oplus Y, d_{X\oplus Y})$ είναι πλήρης.

Τέλος για την πληρότητα του $X \times Y$ έχουμε ότι για κάθε $d_{X\times Y}$-Cauchy ακολουθία $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$, εφόσον $d, \rho \leqslant d_{X\times Y}$, οι ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d-Cauchy και ρ-Cauchy αντίστοιχα. Εφόσον οι (X, d) και (Y, ρ) είναι πλήρεις υπάρχουν $x \in X$ και $y \in Y$ με $x_n \xrightarrow{d} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$. Τότε

$$d_{X\times Y}((x_n, y_n), (x, y)) = d(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0.$$

Αυτό δείχνει την πληρότητα του $(X \times Y, d_{X\times Y})$.

Άσκηση 2.1.15. Θεωρούμε σύνολα D_n, $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε κάθε D_n είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του (X_n, d_n). Θεωρούμε επίσης ένα στοιχείο $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Τότε το σύνολο

$$\textstyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_0 \times \cdots \times D_m \times \{a_{m+1}\} \times \{a_{m+2}\} \times \ldots$$

είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, d)$, όπου d είναι η μετρική της Εισαγωγής,

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}, \quad \vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \vec{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Αυτό συμβαίνει γιατί μια βάση για την τοπολογία της d είναι η οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής

$$\mathcal{V} = V_0 \times \cdots \times V_m \times \mathcal{X}_{m+1} \times \mathcal{X}_{m+2} \times \ldots$$

όπου $m \in \mathbb{N}$ και τα V_i είναι d_i-ανοικτά υποσύνολα του X_i για κάθε $i = 0, \ldots, m$. Επομένως για κάθε $\mathcal{V}$ όπως πιο πάνω, υπάρχουν από την πυκνότητα των D_i στοιχεία $x_0, \ldots, x_m$ με $x_i \in D_i$, $i = 0, \ldots, m$ και άρα

$$(x_0, \ldots, x_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots) \in (D_0 \times \cdots \times D_m \times \{a_{m+1}\} \times \{a_{m+2}\}) \cap \mathcal{V}.$$

Για την πληρότητα θεωρούμε μια d-Cauchy ακολουθία $(\vec{x}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Γράφουμε $\vec{x}_i = (x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(x_n^i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία του (X_m, d_m). Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε αρχικά ότι

$$d(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \geqslant 2^{-n} \cdot \frac{d_n(x_n^i, x_n^j)}{1 + d_n(x_n^i, x_n^j)} \geqslant 2^{-m} \frac{d_n(x_m^i, x_m^j)}{1 + d_n(x_m^i, x_m^j)} .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma_m = \dfrac{d_m}{1 + d_m}$. Από την Άσκηση 2.1.10 η σ_m είναι μετρική στο X_m που είναι ισοδύναμη με την d_m και ο (X_m, σ_m) είναι πλήρης. Είναι σαφές από την πιο πάνω ανισότητα ότι η ακολουθία $(x_m^i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι σ_m-Cauchy και συνεπώς υπάρχει $x_m \in X_m$ με $x_m^i \xrightarrow{\sigma_m} x_m$. Αφού οι μετρικές d_m και σ_m είναι ισοδύναμες έχουμε ότι $x_m^i \xrightarrow{d_m} x_m$. (Εναλλακτικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όπως και στην λύση της Άσκησης 2.1.10 $(x_m^i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι d_m-Cauchy και επομένως υπάρχει $x_m \in X_m$ με $x_m^i \xrightarrow{d_m} x_m$.)

Στη συνέχεια θεωρούμε την ακολουθία $\vec{x} = (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \prod_{m\in\mathbb{N}} X_m$, όπου x_m όπως πιο πάνω. Τότε ισχύει $\vec{x}_i \xrightarrow{d} \vec{x}$, δίνουμε μια συνοπτική περιγραφή. Αρχικά Θεωρούμε ένα $r > 0$ και $m \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $2^{-m} < r/2$. Η ιδέα είναι να χωρίσουμε το άπειρο άθροισμα στον ορισμό του $d(\vec{x}_i, \vec{x})$ στο πεπερασμένο άθροισμα από 0 μέχρι m και στο άπειρο άθροισμα από $m + 1$. Το τελευταίο θα είναι μικρότερο ή ίσο του

$\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-m} < r/2$. Σχετικά με το πεπερασμένο άθροισμα χρησιμοποιούμε ότι $x_n^i \xrightarrow{d_n} x_n$ για κάθε $n = 0, \dots, m+1$. Οπότε

$$\sum_{n=0}^{m} 2^{-n} \cdot \frac{d_n(x_n^i, x_n)}{1 + d_n(x_n^i, x_n)} \to \sum_{n=0}^{m} 2^{-n} \cdot \frac{0}{1+0} = 0$$

και άρα για όλα τα μεγάλα $i \in \mathbb{N}$ θα έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{m} 2^{-n} \cdot \frac{d_n(x_n^i, x_n)}{1 + d_n(x_n^i, x_n)} < r/2.$$

Καταλήγουμε ότι $d(\vec{x}_i, x) < r$ για όλα τα μεγάλα $i \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.1.16. Άμεσο από την Άσκηση 2.1.15.

Άσκηση 2.1.17. Θεωρούμε $x, y \in A$ και υποθέτουμε αρχικά ότι $d(x, A) \geqslant d(y, A)$. Τότε $|d(x, A) - d(y, A)| = d(x, A) - d(y, A)$, οπότε πρέπει να δείξουμε ότι

$$d(x, A) \leqslant d(y, A) + d(x, y), \quad \text{ισοδύναμα} \quad d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, A).$$

Επειδή $d(y, A) = \inf\{d(y, z) \mid z \in A\}$ αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός $d(x, A) - d(x, y)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{d(y, z) \mid z \in A\}$. Θεωρούμε λοιπόν $z \in A$ και δείχνουμε ότι

$$d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, z) \quad \text{ισοδύναμα} \quad d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Αφού $z \in A$ έχουμε από τον ορισμό του $d(x, A)$ ότι

$$d(x, A) \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z),$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Η περίπτωση $d(x, A) < d(y, A)$ αντιμετωπίζεται ανάλογα. Ένας διαφορετικός τρόπος είναι να πούμε ότι αυτή η περίπτωση προκύπτει από την προηγούμενη εναλλάσσοντας το x με το y: με αυτή την εναλλαγή έχουμε από την πρώτη περίπτωση ότι $|d(y, A) - d(x, A)| \leqslant d(y, x)$ απ' όπου το ζητούμενο είναι προφανές.

Άσκηση 2.1.18. Έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x \in X$ αν και μόνο αν

$$\forall r > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y \in B_{(X,d)}(x, \delta) \; y \in B_{(Y,\rho)}(f(x), r)$$

$$(\star 1) \qquad \iff \forall n \in \mathbb{N} \, \exists k \in \mathbb{N} \, \forall y \in B_{(X,d)}(x, 2^{-k}) \; y \in B_{(Y,\rho)}(f(x), 2^{-n}).$$

Η τελευταία ισοδυναμία είναι μια χαρακτηριστική μέθοδος για να περνάμε σε αριθμήσιμες τομές ή/και ενώσεις. Χρειαζόμαστε μια τελευταία αναδιατύπωση. Η $(\star 1)$ είναι ισοδύναμη με την

$$\forall n \, \exists k \, \forall y, z \in B_{(X,d)}(x, 2^{-k}) \; \rho(z, y) < 2^{-n}.$$

Θέτουμε $V_n = \{x \in X \mid \exists k \, \forall y, z \in B_{(X,d)}(x, 2^{-k}) \; \rho(z, y) < 2^{-n}\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έτσι που σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$f\text{: συνεχής στο } x \iff \forall n \; x \in V_n,$$

δηλαδή το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι το $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι κάθε V_n είναι ανοικτό σύνολο. Θεωρούμε λοιπόν $x \in V_n$ και $k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $y, z \in B_{(X,d)}(x, 2^{-k})$ ισχύει $\rho(z, y) < 2^{-n}$. Δείχνουμε ότι $B_{(X,d)}(x, 2^{-k}) \subseteq V_n$, τότε θα έχουμε ότι το x είναι εσωτερικό σημείο του V_n και επομένως θα έχουμε τελειώσει.

Παίρνουμε $x' \in B_{(X,d)}(x, 2^{-k})$, επειδή το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό υπάρχει $k' \in \mathbb{N}$ με $B_{(X,d)}(x', 2^{-k'}) \subseteq B_{(X,d)}(x, 2^{-k})$. Συνεπώς για κάθε $y, z \in B_{(X,d)}(x', 2^{-k'})$ έχουμε $y, z \in B_{(X,d)}(x, 2^{-k})$ και από την επιλογή των x, k ισχύει $\rho(z, y) < 2^{-n}$. Αυτό δείχνει ότι $x' \in V_n$ και έχουμε τελειώσει.

Παρατήρηση. Η αντικατάσταση του $\delta > 0$ με το 2^{-k} στην $(\star 1)$ δεν είναι απαραίτητη γιατί πέραν της αριθμήσιμης τομής ως προς n χρειαζόμαστε μόνο να γνωρίζουμε ότι το V_n είναι ανοικτό σύνολο. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε ανεξάρτητα από το αν χρησιμοποιήσουμε το $\delta > 0$ ή το 2^{-k}.

Άσκηση 2.1.19. Έχουμε

$$(0,1] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,1+2^{-n}) \quad \text{και} \quad [0,1)\cup\{3\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\big((-2^{-n},1)\cup(3-2^{-n},3+2^{-n})\big),$$

οπότε τα σύνολα $(0,1]$ και $[0,1)\cup\{3\}$ είναι G_δ υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και συνεπώς Πολωνικοί χώροι με τη σχετική τοπολογία.

Αν το $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ ήταν Πολωνικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ τότε θα ήταν G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Το σύνολο $\mathbb{R}\times\{\sqrt{2}\}$ είναι κλειστό, και επομένως G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Άρα και η τομή

$$(\mathbb{Q}\times\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(\mathbb{R}\times\{\sqrt{2}\}) = \mathbb{Q}\times\{\sqrt{2}\}$$

θα ήταν G_δ.

Αν γράψουμε $\mathbb{Q}\times\{\sqrt{2}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ όπου τα U_n είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ τότε

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R} \mid (x,\sqrt{2})\in U_n\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[U_n],$$

όπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 : f(x) = f(x,\sqrt{2})$. Προφανώς η f είναι συνεχής και άρα τα σύνολα $f^{-1}[U_n]$, $n\in\mathbb{N}$, είναι ανοικτά. Αλλά τότε το $\mathbb{Q}$ θα ήταν G_δ σύνολο που είναι άτοπο.

Άρα το $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ δεν είναι Πολωνικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 2.2.1. Έστω $u = (u_0,\ldots,u_{n-1})$ και $(v_0,\ldots,v_{m-1})\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με

$$\langle u_0,\ldots,u_{n-1}\rangle = \langle v_0,\ldots,v_{m-1}\rangle.$$

Αν το u είναι η κενή ακολουθία τότε $\langle u_0,\ldots,u_{n-1}\rangle = 1$. Επειδή η συνάρτηση $\langle\,\cdot\,\rangle$ λαμβάνει άρτιες τιμές στις μη κενές ακολουθίες έχουμε αναγκαστικά ότι και το v είναι η κενή ακολουθία, άρα $u = v$.

Αν $u \neq \Lambda$ τότε όπως πιο πάνω $v\neq\Lambda$. Άρα $n,m\geqslant 1$. Αν είχαμε $n\neq m$, ας πούμε $n<m$ τότε, εφόσον ο όρος $\mathrm{p}_n^{v(n)+1}\neq 1$ είναι παράγοντας στον αριθμό $\langle v_0,\ldots,v_{m-1}\rangle$, θα ήταν επίσης παράγοντας στον αριθμό $\langle u_0,\ldots,u_{n-1}\rangle$. Από την άλλη εξ ορισμού ο τελευταίος αριθμός έχει για παράγοντες δυνάμεις των $\mathrm{p}_0,\ldots,\mathrm{p}_{n-1}$ και από τη μοναδικότητα του αναπτύγματος σε γινόμενο πρώτων αριθμών έχει *μόνο* αυτούς τους παράγοντες. Καταλήγουμε λοιπόν σε άτοπο. Επομένως $n = m$ και

$$\mathrm{p}_0^{u_0+1}\cdot\ldots\mathrm{p}_{n-1}^{u_{n-1}+1} = \mathrm{p}_0^{v_0+1}\cdot\ldots\mathrm{p}_{n-1}^{v_{n-1}+1}.$$

Πάλι από τη μοναδικότητα του αναπτύγματος σε γινόμενο πρώτων αριθμών έχουμε $u_i = v_i$ για κάθε $i<n$ και άρα $u = v$.

Άσκηση 2.2.2. Ο αριθμός $10 = 2\cdot 5$ είναι ένας άρτιος αριθμός που δεν λαμβάνεται ως τιμή της $\langle\,\cdot\,\rangle$. Για να έχουμε το 5, που είναι ο τρίτος στη σειρά πρώτος αριθμός, ως παράγοντα στο $\langle u_0,\ldots,u_{n-1}\rangle$ θα πρέπει το μήκος της ακολουθίας $u = (u_0,\ldots,u_{n-1})$ να είναι τουλάχιστον 3, οπότε και ο αριθμός $\mathrm{p}_1^{u_1+1} = 3^{u_1+1} = 3\cdot 3^{u_1}$ θα είναι και αυτός παράγοντας του αριθμού $\langle u_0,\ldots,u_{n-1}\rangle$. Δηλαδή το 3 θα πρέπει να διαιρεί τον $\langle u_0,\ldots,u_{n-1}\rangle$. Αφού όμως το 3 δεν διαιρεί το 10 έχουμε $\langle u_0,\ldots,u_{n-1}\rangle \neq 10 = 2\cdot 5$ για κάθε $u = (u_0,\ldots,u_{n-1})\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Άσκηση 2.2.3. Η δοσμένη πρόταση είναι ισοδύναμη με την

$$\forall n\,\exists s\,\forall i,j<2n\ \ (\,(n,\langle n,(s)_i\rangle)\in Q\ \&\ (i\neq j\ \longrightarrow\ (s)_i\neq(s)_j)\,).$$

Άσκηση 2.3.14. Είναι σαφές από τον ορισμό ότι $d_{\mathcal{N}}(\alpha,\beta)\geqslant 0$, $d_{\mathcal{N}}(\alpha,\beta) = 0 \iff \alpha = \beta$ και ότι $d_{\mathcal{N}}(\alpha,\beta) = d_{\mathcal{N}}(\beta,\alpha)$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathcal{N}$. Στη συνέχεια δείχνουμε την ανισότητα της υπερμετρικής.

Θεωρούμε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{N}$. Αν $\alpha = \beta$ τότε $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 0 \leqslant \max\{d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma), d_{\mathcal{N}}(\gamma, \beta)\}$, ενώ αν $\alpha = \gamma$ τότε $\max\{d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma), d_{\mathcal{N}}(\gamma, \beta)\} = d_{\mathcal{N}}(\gamma, \beta) = d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta)$. Όμοια η ανισότητα είναι προφανής αν $\beta = \gamma$, επομένως υποθέτουμε ότι τα α, β, γ είναι διαφορετικά ανά δύο. Υπενθυμίζουμε τον φυσικό αριθμό $n(\alpha', \beta')$ από τον ορισμό της $d_{\mathcal{N}}$,

$$n(\alpha', \beta') = \text{ ο ελάχιστος φυσικός } k \text{ με } \alpha'(k) \neq \beta'(k), \text{ για } \alpha', \beta' \in \mathcal{N} \text{ με } \alpha' \neq \beta'.$$

Αν $n(\alpha, \beta) \geqslant n(\alpha, \gamma)$ τότε

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 2^{-n(\alpha,\beta)} \leqslant 2^{-n(\alpha,\gamma)} = d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma) \leqslant \max\{d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma), d_{\mathcal{N}}(\gamma, \beta)\}.$$

Θεωρούμε λοιπόν ότι $n(\alpha, \gamma) > n(\alpha, \beta)$. Τότε ο φυσικός αριθμός $n(\alpha, \beta)$ είναι μικρότερος του ελάχιστου φυσικού στον οποίο διαφέρουν τα α, γ, συνεπώς έχουμε $\alpha(n(\alpha, \beta)) = \gamma(n(\alpha, \beta))$. Επειδή $\alpha(n(\alpha, \beta)) \neq \beta(n(\alpha, \beta))$ έχουμε $\gamma(n(\alpha, \beta)) \neq \beta(n(\alpha, \beta))$.

Προκύπτει ότι ο αριθμός $n(\alpha, \beta)$ είναι ένας φυσικός στον οποίο διαφέρουν τα β, γ, επομένως είναι μεγαλύτερος ή ίσος του ελάχιστου τέτοιου φυσικού $n(\beta, \gamma)$. Δηλαδή ισχύει $n(\alpha, \beta) \geqslant n(\beta, \gamma)$, οπότε όμοια με πριν

$$d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 2^{-n(\alpha,\beta)} \leqslant 2^{-n(\beta,\gamma)} = d_{\mathcal{N}}(\beta, \gamma) \leqslant \max\{d_{\mathcal{N}}(\alpha, \gamma), d_{\mathcal{N}}(\gamma, \beta)\}.$$

Αυτό δείχνει την ανισότητα της υπερμετρικής. Η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της τελευταίας, ειδικότερα η $d_{\mathcal{N}}$ είναι μετρική στο $\mathcal{N}$.

Άσκηση 2.3.15. Εφαρμόζουμε την ισοδυναμία (2.13) η οποία χαρακτηρίζει τη σύγκλιση στον $\mathcal{N}$.

Αν η $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ήταν συγκλίνουσα τότε και η ακολουθία φυσικών αριθμών $(\alpha_i(0))_{i\in\mathbb{N}}$ θα ήταν συγκλίνουσα. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί $\alpha_i(0) = i \to \infty$.

Για την $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ παρατηρούμε ότι

$$\beta_i = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, 0 \dots)$$

όπου το 1 εμφανίζεται πιο πάνω i-φορές. Δείχνουμε ότι $\beta_i \to (1, 1, \dots, 1, \dots)$. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $i \geqslant n$ ισχύει $\beta_i(n) = 1$. Επομένως $\beta_i(n) \xrightarrow{i} 1$.

Παρόμοια δείχνουμε ότι $\gamma_i \to (0, 1, 2, 3, \dots)$. Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $i \geqslant n$ ισχύει $\gamma_i(n) = n$. Επομένως $\gamma_i(n) \xrightarrow{i} n$.

Η $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ δεν είναι συγκλίνουσα γιατί $\delta_i(43) = (-1)^i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και άρα η ακολουθία φυσικών αριθμών $(\delta_i(43))_{i\in\mathbb{N}}$ δεν είναι συγκλίνουσα.

Τέλος η $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $(0, 2, 4, 6, \dots)$. Η απόδειξη είναι όπως και με την $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Παίρνουμε $n \in \mathbb{N}$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $i \geqslant n$ ισχύει $2i \geqslant n$ και επομένως $\varepsilon_i(n) = 2n$. Άρα $\varepsilon_i(n) \xrightarrow{i} 2n$.

Άσκηση 2.3.16. Επαληθεύουμε ότι τα δοσμένα σύνολα είναι κλειστά με τη χρήση συγκλινουσών ακολουθιών. Θεωρούμε μια $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο $\alpha \in \mathcal{N}$. Τότε για κάθε i έχουμε $\alpha_i = (n_i, 0, 0, \dots)$ για κάποιο $n_i \in \mathbb{N}$. Εφόσον η $(\alpha_i(0))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n_i = n$ για όλα τα μεγάλα i. Επομένως $\alpha = (n, 0, 0, \dots) \in A$.

Στη συνέχεια θεωρούμε μια ακολουθία $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ με $\beta_i \to \beta \in \mathcal{N}$. Τότε για κάθε i έχουμε $\beta_i = (0)^{m_i} * (m_i, 1, 1, 1, \dots)$ για κάποιο $i \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $\beta_i(n) = 0$ όταν $m_i > n$.

Αν η $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ έχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία $(m_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ τότε $\beta_{k_i} \to (0, 0, \dots) \in B$. Για να δούμε το τελευταίο θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και $i_0 > n$, επομένως $m_{k_i} \geqslant k_i \geqslant i > n$ και άρα $\beta_{k_i}(n) = 0$.

Αν η $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ δεν έχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία τότε έχει υπακολουθία $(m_{l_i})_{i\in\mathbb{N}}$ που είναι σταθερή σε κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\beta_{m_{l_i}} = \beta_m = (0)^m * (m, 1, 1, \dots)$. Άρα $\beta = \beta_m \in B$.

Με όμοιο τρόπο μπορεί κανείς να δει ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία του C έχει για όριο είτε κάποιο σημείο της μορφής $(1)^n * (2,3,4,5,\dots)$ είτε το $(1,1,1,\dots)$. Σε κάθε περίπτωση το όριο ανήκει στο C, οπότε το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό.

Τέλος παίρνουμε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και θεωρούμε μια ακολουθία $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{N}_u$ με $\delta_i \to \delta$. Τότε για κάθε $k < |u|$ και κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε $\delta_i(k) = u(k)$, άρα $\delta(k) = u(k)$. Προκύπτει ότι $\delta \in \mathcal{N}_u$ και επομένως το $\mathcal{N}_u$ είναι κλειστό.

Τα σύνολα $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}}$, $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ είναι κλειστά στον $2^{\mathbb{N}}$ για τον ίδιο λόγο με πιο πάνω. (Αλλιώς μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι το $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}}$ είναι η τομή ενός κλειστού συνόλου στον $\mathcal{N}$ με τον υπόχωρο $2^{\mathbb{N}}$, που όπως είναι γνωστό αυτό είναι κλειστό υποσύνολο του υπόχωρου.)

Άσκηση 2.3.17. Ένας κατάλληλος τοπολογικός ισομορφισμός είναι η συνάρτηση

$$f_u \equiv f : \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{N}_u : f(\alpha) = u * \alpha.$$

Είναι σαφές ότι η f είναι ένα-προς-ένα. Επίσης είναι επιμορφιμός γιατί κάθε $\beta \in \mathcal{N}_u$ ικανοποιεί $u \sqsubseteq \beta$ και συνεπώς $\beta = u * \alpha$ όπου $\alpha = (\beta(|u|), \beta(|u|+1)\dots)$.

Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής εφαρμόζουμε την Αρχή της Μεταφοράς. Θεωρούμε $\alpha \in \mathcal{N}$ και μια ακολουθία $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{N}$ με $\alpha_i \to \alpha$. Τότε $\alpha_i(k) \to \alpha(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, απ' όπου είναι σαφές ότι $(u * \alpha_i)(m) \to (u * \alpha)(m)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Άρα $f(\alpha_i) \to f(\alpha)$.

Η αντίστροφη συνάρτηση της f δίνεται από πιο πάνω,

$$f^{-1} : \mathcal{N}_u \to \mathcal{N} : f^{-1}(\beta) = (\beta(|u|), \beta(|u|+1)\dots),$$

η οποία όμοια με προηγουμένως είναι συνεχής.

Άσκηση 2.3.18. Η συνέχεια όλων των δοσμένων συναρτήσεων μπορεί να δειχθεί εύκολα με την Αρχή της Μεταφοράς χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό της σύγκλισης ακολουθιών στον χώρο του Baire (2.13).

Για παράδειγμα για την $s : \mathcal{N} \to \mathcal{N} : s(\alpha) = \alpha^*$, αν έχουμε $\alpha_i \to \alpha$ τότε για κάθε n ισχύει $\alpha_i(n) \to \alpha(n)$, επομένως για κάθε n ισχύει $\alpha_i(n+1) \to \alpha(n+1)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε n ισχύει $\alpha_i^*(n) \to \alpha^*(n)$ και άρα $\alpha_i^* \to \alpha^*$.

Δίνουμε και έναν δεύτερο τρόπο που χρησιμοποιεί τις ανοικτές περιοχές του χώρου του Baire. Συγκεκριμένα θεωρούμε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $\alpha \in \mathcal{N}$ με $s(\alpha) = \alpha^* \in \mathcal{N}_u$, και δείχνουμε υπάρχει $v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $\alpha \in \mathcal{N}_v$ και $s[\mathcal{N}_v] \subseteq \mathcal{N}_u$.

Παρατηρούμε ότι αν $\beta(i) = \alpha(i)$ για κάθε $i \leqslant |u|$ τότε $\beta(i+1) = \alpha(i+1)$ για κάθε $i < |u|$ και επομένως $\beta^*(i) = \alpha^*(i)$ για κάθε $i < |u|$. Εφόσον $\alpha^* \in \mathcal{N}_u$, ισχύει $u \sqsubseteq \alpha^*$ άρα $u \sqsubseteq \beta^*$. Αν θέσουμε λοιπόν $v = \alpha|N$ όπου $N = |u|+1$ έχουμε ότι $s[\mathcal{N}_v] \subseteq \mathcal{N}_u$.

Για τις υπόλοιπες συναρτήσεις παρατηρούμε ότι οι βασικές περιοχές του $\mathcal{N} \times \mathbb{N}$ είναι της μορφής $\mathcal{N}_v \times \{n\}$ όπου $v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $n \in \mathbb{N}$, ενώ οι βασικές περιοχές του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι της μορφής $\{u\}$ όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Για να δείξουμε τη συνέχεια της $f : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} :\ f(\alpha, n) = \alpha|n$ θεωρούμε u, α, n με $f(\alpha, n) \in \{u\}$ και βρίσκουμε $v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $\alpha \in \mathcal{N}_v$ και $f[\mathcal{N}_v \times \{n\}] \in \{u\}$. Έχουμε δηλαδή $f(\alpha, n) = u$ και θέλουμε να βρούμε v έτσι ώστε $v \sqsubseteq \alpha$ και για κάθε $\beta \in \mathcal{N}_v$ να ισχύει $f(\beta, n) = u$.

Εφόσον $f(\alpha, n) = \alpha|n = u$ έχουμε $u \sqsubseteq \alpha$ και $n = |u|$. Παίρνουμε $v = u \sqsubseteq \alpha$, τότε για κάθε $\beta \in \mathcal{N}_v$ ισχύει $u = v \sqsubseteq \beta$ και άρα $f(\beta, n) = \beta|n = \beta||u| = u$. Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f.

Για τη συνάρτηση $g : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} :\ g(\alpha, n) = \overline{\alpha(n)} = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$, θεωρούμε m, α, n με $g(\alpha, n) \in \{m\}$ και βρίσκουμε $v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $v \sqsubseteq \alpha$ και $g[\mathcal{N}_v \times \{n\}] \in \{m\}$.

Εφόσον $g(\alpha, n) = \overline{\alpha(n)} = m$ έχουμε $m = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle$. Παίρνουμε λοιπόν $v = \alpha|n \sqsubseteq \alpha$, τότε για κάθε $\beta \in \mathcal{N}_v$ ισχύει $\beta|n = v = \alpha|n$ οπότε

$$g(\beta, n) = \overline{\beta(n)} = \langle \beta(0), \dots, \beta(n-1) \rangle = \langle \alpha(0), \dots, \alpha(n-1) \rangle = m.$$

Αυτό δείχνει τη συνέχεια της g. (Εναλλακτικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $g = \langle \cdot \rangle \circ f$, η f είναι συνεχής και η $\langle \cdot \rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ είναι συνεχής ως συνάρτηση ορισμένη σε διακριτό μετρικό χώρο - επομένως η g ως είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.)

Τέλος για την $h : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \ h(\alpha, n) = (\alpha)_n$ θεωρούμε u, α, n με $h(\alpha, n) \in \mathcal{N}_u$ και βρίσκουμε $v \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $\alpha \in \mathcal{N}_v$ και $h[\mathcal{N}_v \times \{n\}] \subseteq \mathcal{N}_u$.

Εφόσον $h(\alpha, n) = (\alpha(\langle n, 0\rangle), \alpha(\langle n, 1\rangle), \dots) \in \mathcal{N}_u$ έχουμε $u(i) = \alpha(\langle n, i\rangle)$ για κάθε $i < |u|$. Παίρνουμε έναν φυσικό αριθμό $N > \max\{\langle n, i\rangle \mid i < |u|\}$, (για τη συγκεκριμένη συνάρτηση κωδικοποίησης $\langle \cdot \rangle$ το προηγούμενο maximum επιτυγχάνεται στο $i = |u| - 1$), και θέτουμε $v = \alpha|N$. Αν $|u| = 0$ παίρνουμε $N = 0$, παρατηρήστε ότι σε αυτή την περίπτωση $\mathcal{N}_u = \mathcal{N}_\Lambda = \mathcal{N}$ και τότε όλα τα v είναι κατάλληλα -για $N = 0$ έχουμε $\mathcal{N}_v = \mathcal{N}_\Lambda = \mathcal{N}$. Προφανώς $\alpha \in \mathcal{N}_v$ και για κάθε $\beta \in \mathcal{N}_v$ ισχύει $\alpha(j) = v(j) = \beta(j)$ για κάθε $j < N$, ειδικότερα

$$u(i) = \alpha(\langle n, i\rangle) = \beta(\langle n, i\rangle)$$

για κάθε $i < |u|$. Επομένως $u \sqsubseteq (\beta(\langle n, 0\rangle), \beta(\langle n, 1\rangle), \dots)$, δηλαδή $h(\beta, n) \in \mathcal{N}_u$. Αυτό δείχνει τη συνέχεια της h.

Άσκηση 2.4.6. Συμβολίζουμε με P_A, P_B, P_C, S_A, S_B και S_C τον τέλειο πυρήνα των A, B, C και το διάσπαρτο μέρος των A, B, C αντίστοιχα.

Αρχικά παρατηρούμε ότι το $[0, 1]$ είναι τέλειο σύνολο και το $A \setminus [0, 1] = \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμο. Από τη μοναδικότητα της διάσπασης Cantor-Bendixson έχουμε $P_A = [0, 1]$ και $S_A = \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Όμοια για το $B = A \cup \{1 + 2^{-m} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Το $[0, 1]$ είναι τέλειο υποσύνολο του B, ενώ το $B \setminus [0, 1] = \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + 2^{-n} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμο. Επομένως $P_B = [0, 1]$ και $S_B = \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + 2^{-n} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Τέλος παρατηρούμε ότι το C είναι αριθμήσιμο σύνολο, συνεπώς πάλι από τη μοναδικότητα της διάσπασης έχουμε $P_C = \varnothing$ και $S_C = C = \{1\} \cup \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Άσκηση 2.4.7. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κλειστό $C \subseteq \mathcal{X}$ με τέλειο πυρήνα το P και διάσπαρτο μέρος το S. Αν το $x \in \mathcal{X}$ είναι μεμονωμένο σημείο του C τότε υπάρχει $r > 0$ με $B(x, r) \cap C = \{x\}$. Αν ήταν $x \in P$ εφόσον το P είναι τέλειο θα υπήρχε $y \in P$ με $y \neq x$ και $y \in B(x, r)$. Εφόσον $y \in P \subseteq C$ η τομή $B(x, r) \cap C$ θα είχε τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία, τα x, y, που είναι άτοπο. Άρα $x \in C \setminus P = S$.

Γενικά το διάσπαρτο μέρος περιέχει και μη μεμονωμένα σημεία. Ένα παράδειγμα είναι το σύνολο $B = [0, 1] \cup \{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + 2^{-m} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ της Άσκησης 2.4.6. Σύμφωνα με αυτή την άσκηση το διάσπαρτο μέρος S_B του B είναι το σύνολο $\{1 + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + 2^{-n} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Ένα στοιχείο του S_B είναι το $1 + 2^{-0} = 2$. Από την άλλη το 2 δεν είναι μεμονωμένο σημείο του S_B καθώς $2 \neq 1 + 2^{-0} + 3^{-m} \in S_B$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και $1 + 2^{-0} + 3^{-m} \xrightarrow{m} 2$. Μάλιστα με την ίδια απόδειξη βλέπουμε ότι κάθε $1 + 2^{-n}$ είναι στοιχείο του διάσπαρτου μέρους του B που δεν είναι μεμονωμένο σημείο του B.

Άσκηση 2.4.8. Είναι προφανές ότι το σύνολο $\overline{V \cap P}$ είναι κλειστό. Δείχνουμε ότι δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Έστω $y \in \overline{V \cap P}$ και $r > 0$. Θα βρούμε ένα στοιχείο y' του $\overline{V \cap P}$ με $y' \in B(y, r)$ και $y' \neq y$. Αφού $y \in \overline{V \cap P}$ έχουμε

$$B_d(y, r) \cap (V \cap P) = (B_d(y, r) \cap V) \cap P \neq \varnothing.$$

Επομένως υπάρχει $z \in P$ με $z \in U = B_d(y, r) \cap V$. Αφού το P είναι τέλειο και το U είναι ανοικτό υπάρχει $w \in U \cap P$ με $w \neq z$. Τότε ένα από τα w, z είναι διάφορο του y. Το ζητούμενο y' είναι ένα από τα w, z ανάλογα με το ποιο είναι διάφορο του y.

Άσκηση 2.4.9. Έστω P και S ο τέλειος πυρήνας και το διάσπαρτο μέρος του C αντίστοιχα. Για κάθε τέλειο $P_0 \subseteq C$ το $P \cup P_0$ είναι εύκολα τέλειο υποσύνολο του C. Προφανώς το σύνολο $S_0 = C \setminus (P \cup P_0) \subseteq C \setminus P = S$ είναι αριθμήσιμο. Από τη μοναδικότητα της διάσπασης έχουμε $P = P \cup P_0$ και άρα $P_0 \subseteq P$.

Άσκηση 2.4.10. Έστω G ένα G_δ υποσύνολο του Πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$. Από το Θεώρημα 2.1.8 το G με τη σχετική τοπολογία είναι Πολωνικός χώρος. Αν το G είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο έχουμε από το Πόρισμα 2.4.3 έναν συνεχή μονομορφισμό $\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrowtail G$. Επομένως

$$\mathbb{R} =_c 2^{\mathbb{N}} \leqslant_c G \leqslant_c \mathbb{R}$$

όπου στην τελευταία σχέση $\leqslant_c$ χρησιμοποιήσαμε το Πόρισμα 2.3.9. Από το Θεώρημα Schröder-Bernstein έχουμε $G =_c \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.5.15. Παίρνουμε

$$\begin{aligned}
T^0 &= \{\Lambda, (0), (0,0), (0,0,0)\},\\
T^1 &= \{\Lambda\} \cup \{(n) \mid n \in \mathbb{N}\},\\
T^2 &= \{0,1,2\}^{<\mathbb{N}} = \{\Lambda\} \cup \textstyle\bigcup_{n \geqslant 1}\{(k_0,\dots,k_n) \mid k_i = 0,1,2, i = 0,\dots,n\},\\
T^3 &= \{\Lambda\} \cup \{(0)\} \cup \{(0,0),(0,1)\} \cup \{(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2)\} \cup \dots\\
&= \{\Lambda\} \cup \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}}\{(0)^n * (k) \mid k = 0,\dots,n\}.
\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα T^0, T^1, T^2, και T^3 είναι δένδρα στο $\mathbb{N}$. Ειδικά για το T^3 σημειώνουμε ότι κάθε $(0)^n$ για $n \geqslant 1$ λαμβάνεται ως $(0)^{n-1} * (k)$ για $k = 0$.

Οι επιπλέον ζητούμενες ιδιότητες για τα T^0 και T^1 είναι προφανείς. Για το T^2 παρατηρούμε ότι κάθε $u \in T^2$ έχει ακριβώς τρεις άμεσες προεκτάσεις μέσα στο T^2, τις $u * (0)$, $u * (1)$ και $u * (2)$.

Για το T^3 παρατηρούμε ότι κάθε $u \in T^3$ έχει πεπερασμένες το πλήθος άμεσες προεκτάσεις στο T^3. Συγκεκριμένα η κενή ακολουθία έχει για άμεση προέκταση στο T^3 την (0), η (0) τις $(0,0), (0,1)$ και γενικότερα κάθε $(0)^n$ τις $(0)^n * (k)$, για $k = 0,\dots,n$. Οι τελευταίες ακολουθίες είναι τερματικές όταν $n \geqslant k \geqslant 1$. Επομένως για $n = 0$ υπάρχει ακολουθία u που έχει 0 άμεσες προεκτάσεις, δηλαδή είναι τερματική -μια επιλογή είναι η $u = (0,1)$. Για $n \geqslant 1$ η ακολουθία $u = (0)^{n-1} \in T^3$ έχει ακριβώς n άμεσες προεκτάσεις, τις $(0)^{n-1} * (k)$ για $k = 0,\dots,n-1$.

Για το τελευταίο ζητούμενο επιλέγουμε το $u = (0,0,0,1) \in T^3$ και έχουμε ότι

$$T^3_u = \{\Lambda, (0), (0,0), (0,0,0), (0,0,0,1)\},$$

δηλαδή το T^3_u είναι όλα τα αρχικά τμήματα του u, καθώς το τελευταίο είναι τερματικό στο T^3. Αν επιλέξουμε $u' = (0,0,0,0) \in T^3$ τότε

$$T^3_{u'} = \{\Lambda, (0), (0,0), (0,0,0), (0,0,0,0)\} \cup \textstyle\bigcup_{n \geqslant 4}\{(0)^n * (k) \mid k = 0,\dots,n\}.$$

Επιπλέον επιλέγουμε $w = (0,0,0,2)$, τότε

$$T^3_w = \{\varnothing, (0), (0,0), (0,0,0)\},$$

δηλαδή το T^3_w είναι όλα τα αρχικά τμήματα του w που ανήκουν στο T^3. Αν επιλέξουμε $w' = (1,2,3,4)$ τότε $T^3_{w'} = \{\Lambda\}$, γιατί όλες οι μη κενές ακολουθίες του T^3 έχουν για πρώτο όρο το 0.

Άσκηση 2.5.16. Έχουμε $[T^0] = \varnothing$ γιατί το T^0 είναι πεπερασμένο. Επίσης $[T^1] = \varnothing$ γιατί κάθε $u \in T^1$ έχει μήκος το πολύ 1.

Το σώμα του T^2 είναι το σύνολο $[T^2] = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid \forall n\ (\alpha(n) \in \{0,1,2\})\}$. Τέλος έχουμε $[T^3] = \{(0,0,\dots,0,\dots)\}$. Σχετικά με το τελευταίο είναι σαφές ότι το $(0,0,\dots,0,\dots)$ είναι άπειρο κλαδί του T^3 ενώ για κάθε $u \in [T^3]$ με $u(i) \neq 0$ για κάποιο

$i < |u|$ θα έχουμε από τον ορισμό του T^3 ότι $i = |u|$ και άρα το u είναι τερματικό στο T^3. Επομένως αν έχουμε $\alpha \in [T^3]$ τότε $\alpha(i) = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.5.17. Αρχικά δείχνουμε ότι το $T(J)$ είναι δένδρο. Θεωρούμε $w \in J \neq \varnothing$, αφού $\Lambda \sqsubseteq w$ έχουμε $\Lambda \in T(J)$. Αν έχουμε $v \sqsubseteq u$ και $u \in T(J)$ τότε υπάρχει $w \in J$ με $v \sqsubseteq u \sqsubseteq w$, άρα $w \sqsubseteq w \in J$ και $v \in T(J)$.

Είναι σαφές ότι $J \subseteq T(J)$, δείχνουμε ότι το $T(J)$ περιέχεται σε κάθε δένδρο S με $J \subseteq S$. Θεωρούμε ένα τέτοιο S και ένα $u \in T(J)$. Τότε υπάρχει $w \in J$ με $u \sqsubseteq w$ και αφού $J \subseteq S$ έχουμε $w \in J$. Συνεπώς $u \sqsubseteq w \in S$, αφού το S είναι δένδρο προκύπτει ότι $u \in S$. Καταλήγουμε ότι $T(J) \subseteq S$.

Άσκηση 2.5.18. Δείχνουμε αρχικά ότι το T_u είναι δένδρο. Έχουμε ότι $\Lambda \sqsubseteq u$ επομένως $\Lambda \in T_u$. Θεωρούμε ότι έχουμε $v \sqsubseteq w \in T_u$ και δείχνουμε ότι $v \in T_u$, δηλαδή $v||u$. Ισχύει $u||w$, αν $w \sqsubseteq u$ τότε $v \sqsubseteq u$ και άρα $v||u$. Οπότε παίρνουμε την περίπτωση $u \sqsubseteq w$. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι για κάθε $i < \min\{|u|, |v|\}$ ισχύει

$$\begin{aligned} u(i) &= w(i) \quad (\text{γιατί } u \sqsubseteq w) \\ &= v(i) \quad (\text{γιατί } v \sqsubseteq w). \end{aligned}$$

Αν $|v| \leqslant |u|$ τότε από το πιο πάνω έχουμε ότι για κάθε $i < |v|$ ισχύει $v(i) = u(i)$ και άρα $v \sqsubseteq u$. Αν $|u| < |v|$ τότε για κάθε $i < |u|$ ισχύει $u(i) = v(i)$ και άρα $u \sqsubseteq v$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $u||v$ και άρα $v \in T_u$.

Έπειτα θεωρούμε $u \in T$ που δεν είναι τερματικός κόμβος και δείχνουμε την ισότητα $T_u = \bigcup_{u*(x)\in T} T_{u*(x)}$. Παίρνουμε $w \in T_u$ και θεωρούμε την περίπτωση $w \sqsubseteq u$. Αφού το u δεν είναι τερματικό στο T υπάρχει ένα $x \in X$ με $u * (x) \in T$. Τότε $w \sqsubseteq u * (x)$ και αφού $w \in T$ έχουμε $w \in T_{u*(x)}$. Στην περίπτωση όπου $u \sqsubsetneq w$ παίρνουμε για $x = w(|u|)$ οπότε $u * (x) \sqsubseteq w$ και έχουμε πάλι $w \in T_{u*(x)}$. Αντίστροφα αν $w \in T_{u*(x)}$ με $u * (x) \in T$ και $w \sqsubsetneq u * (x)$ τότε $w \in T$ και $w \sqsubseteq u$, επομένως $w \in T_u$. Αν $u * (x) \sqsubseteq w$ τότε $u \sqsubseteq w$ επομένως ισχύει πάλι $w \in T_u$.

Για την ισότητα $[T_u] = \bigcup_{u*(x)\in T}[T_{u*(x)}]$ έχουμε για κάθε $f \in X^{\mathbb{N}}$ ότι

$$\begin{aligned} f \in [T_u] &\iff \forall n\, (f(0), \dots, f(n)) \in T_u \\ &\iff \forall n > |u|\, (f(0), \dots, f(n)) \in T_u \quad (\text{αφού το } T_u \text{ είναι δένδρο}) \\ &\iff \forall n > |u|\; u \sqsubsetneq (f(0), \dots, f(n)) \\ &\iff \exists x\, (\, u * (x) \in T \;\&\; \forall n > |u|\, (f(0), \dots, f(n)) \in T_{u*(x)}\,) \\ &\iff \exists x\, (\, u * (x) \in T \;\&\; f \in [T_{u*(x)}]\,) \\ &\iff f \in \bigcup_{u*(x)\in T} [T_{u*(x)}]. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι εδώ δεν χρησιμοποιήσαμε ότι το u δεν είναι τερματικός κόμβος του T, επομένως η πιο πάνω ισότητα ισχύει για κάθε $u \in T$. Αυτό όμως δεν είναι ουσιαστική γενίκευση γιατί αν το u είναι τερματικός κόμβος του T τότε τα σύνολα και στις δύο πλευρές της ισότητας είναι κενά.

Άσκηση 2.5.19. Ορίζουμε $S = \{u \in T \mid [T_u] \neq \varnothing\}$. Προφανώς $\Lambda \in S \subseteq T$. Επιπλέον αν $u \in S$ και $w \sqsubseteq u$ τότε $\varnothing \neq [T_u] \subseteq [T_w]$ άρα $w \in S$. Επομένως το S είναι υποδένδρο του T.

Αν $u \in S$ τότε υπάρχει $f \in [T]$ με $u \sqsubseteq f$, ειδικότερα $v = u * f(|u|) \in T$. Είναι σαφές ότι $v \sqsubseteq f$ άρα $f \in [T_v]$. Προκύπτει ότι $v \in S$ και επομένως κάθε $u \in S$ έχει μια γνήσια επέκταση στο S, δηλαδή το S είναι κλαδεμένο.

Τέλος δείχνουμε ότι $[S_u] = [T_u]$ για κάθε $u \in T$. Σταθεροποιούμε ένα $u \in T$, είναι σαφές ότι $[S_u] \subseteq [T_u]$, επομένως θεωρούμε $f \in [T_u]$ και δείχνουμε ότι $f \in [S_u]$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε $f|n \in T_u$ και άρα $f|n||u$. Επιπλέον $f \in [T_{f|n}]$, επομένως $f|n \in S$. Έχουμε λοιπόν $f|n||u$ και $f|n \in S$, οπότε $f|n \in S_u$. Καταλήγουμε ότι $f \in [S_u]$.

Άσκηση 2.5.20. Για το A παίρνουμε το δένδρο

$$T^A = \{\Lambda\} \cup \{(n) * (0)^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Για το B παίρνουμε το δένδρο που παράγεται (δείτε την Άσκηση 2.5.17) από το σύνολο

$$J^B = \{(0)^n * (n) * (1)^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Δηλαδή

$$T^B = \{(0)^k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{(0)^n * (n) * (1)^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Για το C παίρνουμε το δένδρο που παράγεται από το σύνολο

$$J^C = \{(1)^n * (2, \dots, m) \mid n, m \in \mathbb{N} \;\&\; m \geqslant 2\}.$$

Δηλαδή

$$T^C = \{(1)^k \mid k \in \mathbb{N}\} \;\cup\; \{(1)^n * (2, \dots, m) \mid n, m \in \mathbb{N} \;\&\; m \geqslant 2\}.$$

Τέλος για τα $\mathcal{N}_u$ παίρνουμε το

$$T^{\mathcal{N}_u} = \{w \in \mathcal{N} \mid w||u\} = T_u \quad \text{όπου } T = \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}.$$

Άσκηση 2.5.21. Παίρνουμε έναν οποιοδήποτε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ (π.χ. $\mathcal{X} = \{0\}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$) και σταθεροποιούμε ένα $x_0 \in \mathcal{X}$.

Θεωρούμε ένα κλειστό $F \subseteq \mathcal{N}$ και ορίζουμε $P = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid x = x_0 \;\&\; \alpha \in P\}$. Με χρήση συγκλινουσών ακολουθιών μπορούμε να δούμε ότι το P είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Από το Λήμμα 2.5.14 υπάρχει ένα κλειστό $T \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το $T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$ είναι δένδρο και $P = \{(x, \alpha) \mid \alpha \in [T(x)]\}$.

Παίρνουμε $x = x_0$ και έχουμε $\alpha \in F \iff (x_0, \alpha) \in P \iff \alpha \in [T(x_0)]$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Επομένως $F = [T(x_0)]$.

Αντίστροφα θεωρούμε ένα δένδρο S στο $\mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι το $[S]$ είναι κλειστό. Ορίζουμε το σύνολο

$$T_0 = \{(x, u) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x = x_0 \;\&\; u \in S) \;\vee\; (x \neq x_0 \;\&\; u = \Lambda)\}.$$

Τότε το T_0 είναι εύκολα κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το $T_0(x)$ είναι είτε το S (όταν $x = x_0$) είτε το $\{\Lambda\}$ (όταν $x \neq x_0$). Άρα κάθε $T_0(x)$ είναι δένδρο. Προκύπτει από το Λήμμα 2.5.14 ότι το σύνολο

$$P_0 = \{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N} \mid \alpha \in [T_0(x)]\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Άρα και το σύνολο

$$F_0 = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid (x_0, \alpha) \in P_0\}$$

είναι κλειστό.

Από την άλλη έχουμε $\alpha \in F_0 \iff (x_0, \alpha) \in P_0 \iff \alpha \in [T_0(x_0)]$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$. Επειδή $T_0(x_0) = S$ έχουμε ότι $F_0 = [S]$ και άρα το $[S]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

Άσκηση 2.5.22. Είναι σαφές ότι $2^{\mathbb{N}} = [T]$ όπου $T = \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$. Επειδή το δένδρο T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης έχουμε από το Πόρισμα 2.5.7 ότι το $[T]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

Άσκηση 2.5.23. Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο n. Προφανώς το $F_0 = \{\Lambda\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Είναι επίσης άμεσο ότι

$$F_{n+1} = \bigcup \{u * (x) \mid x \in X \;\&\; u * (x) \in T \;\&\; u \in F_n\}.$$

Άρα αν το F_n είναι πεπερασμένο, επειδή το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης το F_{n+1} είναι επίσης πεπερασμένο σύνολο.

Άσκηση 2.5.24. Από την Πρόταση 2.5.2 υπάρχουν δένδρα S και T με $[S] = H$ και $[T] = F$. Με εφαρμογή της Πρότασης 2.5.10 αρκεί να βρούμε μια κατάλληλη μονότονη $\varphi : S \to T$ με $\varphi^*(\alpha) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in F$. (Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιούμε την αντίστροφη κατεύθυνση της τελευταίας πρότασης, όπου το S δεν χρειάζεται να είναι κλαδεμένο.)

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T \subseteq S$, αλλιώς αντικαθιστούμε το T με το $T \cap S \subseteq S$, τότε για κάθε $\alpha \in F = [T] \subseteq H = [S]$ και για κάθε n ισχύει $\alpha|n \in T \cap S$, άρα $F = [T] = [T \cap S]$.

Από την Άσκηση 2.5.19 μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το T είναι κλαδεμένο. (Το S θα μπορούσαμε να το αντικαταστήσουμε από την αρχή με ένα κλαδεμένο υποδένδρο του, αλλά όπως εξηγήσαμε πιο πάνω αυτό δεν είναι απαραίτητο.)

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi : S \to T$ με επαγωγή στο μήκος του $u \in S$. Αρχικά ορίζουμε $\varphi(\Lambda) = \Lambda$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $u \in S$ με $|u| = n$, το $\varphi(u)$ έχει οριστεί, ανήκει στο T και ισχύει $\varphi(u) = u$ όταν $u \in T$. Τότε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ με $u * (i) \in S$ ορίζουμε

$$\varphi(u * (i)) = \begin{cases} u * (i), & \text{αν } u * (i) \in T, \\ \varphi(u) * (k), & \text{αν } u * (i) \notin T, \end{cases}$$

όπου k είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με $\varphi(u) * (k) \in T$. Πάντα υπάρχει ένα τέτοιο k γιατί $\varphi(u) \in T$ και το δένδρο T είναι κλαδεμένο.

Εύκολα βλέπουμε ότι $\varphi(u) \in T$ για κάθε $u \in S$, $\varphi(u) = u$ για κάθε $u \in T$, και για κάθε $u \subsetneq v$ ισχύει $\varphi(u) \subsetneq \varphi(v)$. Άρα η φ είναι κατάλληλη και μονότονη. Επιπλέον για κάθε $\alpha \in [T]$ έχουμε $\varphi(\alpha|n) = \varphi(\alpha|n)$ για κάθε n, επομένως $\varphi^*(\alpha) = \alpha$.

Άσκηση 2.5.25. Θεωρούμε την $F : \mathrm{Tr} \to 2^{\mathbb{N}} : F(T) = \alpha_T$ από τον ορισμό του χώρου των δένδρων. Αρχικά δείχνουμε ότι τα σύνολα $B(I, J)$ είναι ανοικτά. Όταν τουλάχιστον ένα από τα I, J είναι μη κενό το $B(I, J)$ είναι πεπερασμένη τομή συνόλων που έχουν μία από τις εξής μορφές,

$$V(u) = \{T \in \mathrm{Tr} \mid u \in T\}, \qquad O(w) = \{T \in \mathrm{Tr} \mid w \notin T\},$$

όπου $u, w \in T$. Στην περίπτωση όπου $I = J = \varnothing$ το $B(I, J)$ είναι εξ ορισμού όλος ο χώρος Tr και επομένως είναι ανοικτό σύνολο.

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι τα πιο πάνω $V(u)$ και $O(w)$ είναι ανοικτά. Παίρνουμε λοιπόν $u = \mathrm{u}_s$ και $w = \mathrm{u}_t$, όπου $s, t \in \mathbb{N}$ και έχουμε για κάθε $T \in \mathrm{Tr}$,

$$\begin{aligned} T \in V(u) &\iff \mathrm{u}_s \in T \iff \alpha_T(s) = 1 \\ &\iff \alpha_T \in \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{1\} \times \{0,1\} \times \dots \\ &\iff F(T) \in W_s \end{aligned}$$

όπου $W_s = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{1\} \times \{0,1\} \times \dots$ και το $\{1\}$ βρίσκεται στη θέση s. Επειδή το σύνολο W_s είναι ανοικτό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$ έχουμε ότι το $V(u) = F^{-1}[W_s]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Tr.

Όμοια βλέπει κανείς ότι $O(w) = \alpha_T^{-1}[W'_t]$ όπου $W'_t = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0\} \times \{0,1\} \times$ και το $\{0\}$ βρίσκεται στη θέση t. Επομένως το $O(w)$ είναι και αυτό ανοικτό στον Tr.

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα ανοικτό $V \subseteq \mathrm{Tr}$ και $T \in V$. Αρκεί να βρούμε $I, J \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $T \in B(I, J) \subseteq V$. Αφού το V είναι ανοικτό υπάρχει ένα ανοικτό $W \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ με $V = F^{-1}[W]$. Τα σύνολα $\mathcal{N}_v \cap 2^{\mathbb{N}}$, όπου $v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ αποτελούν βάση για την τοπολογία του $2^{\mathbb{N}}$, και αφού $F(T) = \alpha_T \in W$ υπάρχει ένα $v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $\alpha_T \in \mathcal{N}_v \cap 2^{\mathbb{N}} \subseteq W$. Επομένως για κάθε $i < |v|$ ισχύει $\alpha_T(i) = v(i)$.

Παίρνουμε τα σύνολα

$$I = \{\mathrm{u}_s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid s < |v| \;\&\; \alpha_T(s) = v(s) = 1\} \quad \text{και}$$
$$J = \{\mathrm{u}_t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid t < |v| \;\&\; \alpha_T(t) = v(t) = 0\}.$$

Τότε αν $u = \mathrm{u}_s \in I$ έχουμε $\alpha_T(s) = 1$ και άρα $\mathrm{u}_s \in T$. Όμοια αν $w = \mathrm{u}_t \in J$ έχουμε $\mathrm{u}_t \notin T$. Άρα $T \in B(I, J)$.

Δείχνουμε ότι $B(I, J) \subseteq V$. Θεωρούμε ένα $S \in B(I, J)$, τότε $\alpha_S(s) = 1$ για κάθε $\mathrm{u}_s \in T$ και $\alpha_S(t) = 0$ για κάθε $\mathrm{u}_t \in J$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha_S(i) = v(i)$ για κάθε $i < |v|$ και άρα $\alpha_S \in \mathcal{N}_v \cap 2^{\mathbb{N}} \subseteq W$. Δηλαδή $F(S) \in W$ και $S \in F^{-1}[W] = V$.

Τα προηγούμενα δείχνουν ότι τα σύνολα $B(I, J)$ αποτελούν βάση για την τοπολογία του Tr.

Σχετικά με τον χαρακτηρισμό της σύγκλισης στον Tr: για την ευθεία κατεύθυνση αν έχουμε $T_i \to T$ εφαρμόζουμε για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ τον ορισμό της σύγκλισης παίρνοντας για ανοικτό σύνολο που περιέχει το T είτε το $V(u) = \{S \in \mathrm{Tr} \mid u \in S\}$ (αν $u \in T$) είτε το $O(u) = \{S \in \mathrm{Tr} \mid u \notin S\}$ (αν $u \notin T$). Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε ένα $B(I, J)$ με $T \in B(I, J)$ και εφαρμόζουμε την υπόθεση σε κάθε ένα από τα στοιχεία του $I \cup J$. Εφόσον το τελευταίο σύνολο είναι πεπερασμένο μπορούμε να βρούμε ένα i_0 έτσι ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$, κάθε $u \in I$ και κάθε $w \in J$ ισχύει $u \in T_i$ και $w \notin T_i$. Το τελευταίο σημαίνει ότι $T_i \in B(I, J)$ για κάθε $i \geqslant i_0$.

Άσκηση 2.5.26. Θεωρούμε μια ακολουθία $((x_i, u_i))_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του T και $(x, u) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $(x_i, u_i) \to (x, u)$, δηλαδή $x_i \to x$ και $u_i \to u$. Επειδή στο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ έχουμε τη διακριτή μετρική έχουμε ότι $u_i = u$ τελικά για όλα τα $i \in \mathbb{N}$, οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(x_i, u) \in T$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Δείχνουμε ότι $(x, u) \in T$. Έστω $v \in J$ και $n \in I$ με $n \leqslant |u|$. Επειδή $(x_0, u) \in T$ έχουμε $v \nsubseteq u$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \notin V_n$. Αφού $(x_i, u) \in T$ έχουμε $x \in \mathcal{X} \setminus V_n$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Το σύνολο $\mathcal{X} \setminus V_n$ είναι κλειστό, και άρα $x = \lim_{i\to\infty} x_i \in \mathcal{X} \setminus V_n$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η

$$f : \mathcal{X} \to \mathrm{Tr} : f(x) = T(x) = \{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \mid (x, u) \in T\}$$

αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε F_σ.

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ η αντίστροφη εικόνα του συνόλου

$$B(u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k) = \{T \in \mathrm{Tr} \mid \forall i \leqslant m \; \forall\, j \leqslant k \; (u_i \in T \;\&\; w_j \notin T)\}.$$

μέσω της f είναι F_σ υποσύνολο του $\mathcal{X}$, γιατί από την Άσκηση 2.5.25 τα πιο πάνω σύνολα αποτελούν βάση για την τοπολογία του Tr και η αριθμήσιμη ένωση F_σ συνόλων είναι επίσης F_σ σύνολο.

Θεωρούμε $u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $B \equiv B(u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_k)$ όπως πιο πάνω. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$,

$$f(x) \in B \iff \forall i \leqslant m \; \forall\, j \leqslant k \; (u_i \in T(x) \;\&\; w_j \notin T(x)).$$

Αν θέσουμε

$$P_u = \{x \in \mathcal{X} \mid u \in T(x)\} \quad \text{και} \quad Q_w = \{x \in \mathcal{X} \mid w \notin T(x)\}$$

όπου $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έχουμε από τα προηγούμενα ότι

$$f^{-1}[B] = \textstyle\bigcap_{i\leqslant m, j\leqslant k}(P_{u_i} \cap Q_{w_j}).$$

Επειδή η πεπερασμένη τομή F_σ συνόλων είναι F_σ σύνολο, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $u, w \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ τα σύνολα P_u, Q_w είναι F_σ.

Για την ακρίβεια κάθε σύνολο P_u είναι κλειστό γιατί το T είναι κλειστό σύνολο: αν $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο P_u και $x_i \to x$ τότε $(x_i, u) \in T$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $(x_i, u) \to (x, u)$. Άρα $(x, u) \in T$ δηλαδή $x \in P_u$. Παρατηρούμε ότι $Q_w = \mathcal{X} \setminus P_w$ και άρα το Q_w είναι ανοικτό.

Προφανώς κάθε κλειστό σύνολο είναι F_σ και από την Πρόταση 2.1.6 κάθε ανοικτό σύνολο είναι επίσης F_σ. Έτσι έχουμε το ζητούμενο.

Τέλος δείχνουμε ότι αν τα V_n είναι κλειστά-ανοικτά σύνολα, τότε τα πιο πάνω σύνολα P_u είναι ανοικτά. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η αντίστροφη εικόνα των βασικών συνόλων $B(u_0, \dots, u_m, w_0, \dots, w_k)$ είναι πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων και είναι συνεπώς ανοικτό σύνολο. Επομένως σε αυτή την περίπτωση η f είναι συνεχής.

Θεωρούμε λοιπόν ότι κάθε V_n είναι κλειστό-ανοικτό και $x \in P_u$ για κάποιο $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Αν δεν υπάρχει $n \in I$ με $n < |u|$ τότε $P_u = \mathcal{X}$ (καθολικός ποσοδείκτης υπεράνω του κενού συνόλου) και άρα το P_u είναι ανοικτό σύνολο. Αν υπάρχει $n \in I$ με $n < |u|$ τότε για κάθε τέτοιο n (υπάρχουν πεπερασμένα τέτοια) ισχύει $x \in \mathcal{X} \setminus V_n$. Τα συμπληρώματα $\mathcal{X} \setminus V_n$ είναι ανοικτά σύνολα και συνεπώς υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο G με

$$x \in G \subseteq \bigcap_{n \in I, n < |u|} (\mathcal{X} \setminus V_n).$$

Εφόσον $x \in P_u$ έχουμε ότι για κάθε $v \in J$ ισχύει $v \not\sqsubseteq u$. Προκύπτει ότι $x \in G \subseteq P_u$ και το P_u είναι ανοικτό.

Άσκηση 2.5.27. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Λήμματος 2.5.5 θεωρούμε το σύνολο $Q \subseteq P \times P$ που ορίζεται ως εξής,

$$(u, w) \in Q \iff u \sqsubseteq w \;\&\; |w| = |u| + 1, \quad u, w \in P.$$

Δηλαδή $(u, w) \in Q$ αν και μόνο αν τα υποδένδρα T_u και T_w είναι άπειρα και το w είναι άμεση επέκταση του u. Σύμφωνα με την (2.20) για κάθε $u \in P$ υπάρχει $w \in P$ με $(u, w) \in Q$.

Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ για την οποία ισχύει $(x_0, \dots, x_n) \in T$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών DC υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to P$ για την οποία ισχύει $(f(n), f(n+1)) \in Q$. Επομένως η $f(n+1)$ είναι άμεση επέκταση της $f(n)$. Αν θέσουμε $y_n = f(n+1)(|f(n)|)$ έχουμε

$$f(n+1) = f(n) * (y_n)$$

και επομένως ισχύει

$$f(n+1) = f(0) * (y_0, \dots, y_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αν η $f(0)$ είναι η κενή ακολουθία τότε η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακριβώς η $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Αν η $f(0)$ δεν είναι κενή ακολουθία, τότε υπάρχουν $z_0, \dots, z_m \in X$ με $u_0 = (z_0, \dots, z_m)$, οπότε έχουμε από πιο πάνω

$$f(n+1) = (z_0, \dots, z_m, y_0, \dots, y_n).$$

Επομένως παίρνουμε $x_k = z_k$ για $k \leqslant m$ και $x_{m+n} = y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.5.28. Η ευθεία κατεύθυνση είναι άμεση από την απόδειξη της Πρότασης 2.5.6 όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το Λήμμα του König για να δείξουμε ότι το σώμα κάθε δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης είναι συμπαγές.

Αντίστροφα θεωρούμε $X \neq \varnothing$ και T ένα άπειρο δένδρο στο X που πεπερασμένης διακλάδωσης. Θα δείξουμε ότι $[T] \neq \varnothing$. Αφού το T είναι άπειρο προκύπτει από την Άσκηση 2.5.23 ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $u \in T$ με $n < |u|$, και περιορίζοντας το u κατάλληλα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n = |u|$.

Από το $\mathrm{AC}_{\mathbb{N}}$ υπάρχει μια ακολουθία $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του T με $|u_n| = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε ένα $x_0 \in X$ και ορίζουμε

$$f_n : \mathbb{N} \to X : f_n = u_n * (x_0, x_0, \dots).$$

Δείχνουμε ότι τα f_n είναι στοιχεία ενός δένδρου πεπερασμένης διακλάδωσης. Ορίζουμε $S \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$w \in S \iff w \in T \;\vee\; \exists u \in T \; w = u * (x_0, \dots, x_0).$$

Μπορεί κανείς να δει εύκολα ότι το S είναι δένδρο στο X πεπερασμένης διακλάδωσης. Προφανώς $f_n \in [S]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την υπόθεσή μας το $[S]$ είναι συμπαγές και άρα η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια υπακολουθία $(f_{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο $f \in [S]$.

Τέλος δείχνουμε ότι $f \in [T]$. Έστω $m \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $n > m$ έτσι ώστε για κάθε $k \leqslant m$ ισχύει $f_{s_n}(k) = f(k)$. Ισχύει $m < |u_{s_n}|$ γιατί $|u_{s_n}| = s_n \geqslant n > m$. Επιπλέον $f_{s_n} = u_{s_n} * (x_0, x_0, \dots)$ και για κάθε $k \leqslant m < |u_{s_n}|$,

$$f(k) = f_{s_n}(k) = u_{s_n}(k).$$

Επομένως

$$(f(0), \dots, f(m)) = (u_{s_n}(0), \dots, u_{s_n}(m)) \sqsubseteq u_{s_n} \in T$$

και άρα $(f(0), \dots, f(m)) \in T$ για κάθε m, δηλαδή $f \in [T]$.

Άσκηση 2.6.12. Παίρνουμε έναν συμπαγή Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Από το Θεώρημα 2.6.2 ο $\mathcal{X}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με έναν υπόχωρο $G \subseteq \mathbb{H}$. Το G είναι συμπαγές σύνολο ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου, επομένως το G είναι κλειστό.

Άσκηση 2.6.13. Η ιδέα στηρίζεται φυσικά στο ότι μια ακολουθία ακολουθιών είναι και αυτή ακολουθία. Αρχικά θεωρούμε μια αντιστοιχία $[\cdot] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N} : (n, t) \mapsto [n, t]$. Τότε για κάθε ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $2^{\mathbb{N}}$ ορίζουμε

$$\alpha : \mathbb{N} \to \{0, 1\} : \alpha(k) = \alpha_n(t), \quad \text{όπου } k = [n, t].$$

Η α είναι καλά ορισμένη γιατί κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι της μορφής $[n, t]$ για κάποια n, t. Οπότε ορίζουμε την

$$f : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}} : (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \alpha,$$

όπου το α είναι όπως πιο πάνω. Εύκολα η f είναι ένα-προς-ένα και επί. Για τη συνέχεια της f αν έχουμε $\overline{\alpha}^{\,i} \to \overline{\alpha}$, όπου $\overline{\alpha}^{\,i} = (\alpha^i_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $\overline{\alpha} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, τότε για κάθε $k = [n, t]$ έχουμε $\alpha^i_n \xrightarrow{i\to\infty} \alpha_n$ (σύγκλιση στον $2^{\mathbb{N}}$) και άρα

$$\alpha^i_n(t) \xrightarrow{i\to\infty} \alpha_n(t) \quad \text{(σύγκλιση στον } \mathbb{N}).$$

Αυτό σημαίνει ότι $f(\overline{\alpha}^{\,i})([n, t]) \to f(\overline{\alpha})([n, t])$. Καταλήγουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $f(\overline{\alpha}^{\,i})(k) \to f(\overline{\alpha})(k)$, επομένως $f(\overline{\alpha}^{\,i}) \to f(\overline{\alpha})$. Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f.

Η συνέχεια της f^{-1} αποδεικνύεται ακολουθώντας την αντίθετη κατεύθυνση στον προηγούμενο συλλογισμό.

Άσκηση 2.6.14. Ο χώρος $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι Πολωνικός χώρος από το Πόρισμα 2.1.9. Για κάθε ζεύγος ρητών αριθμών (p, q) ορίζουμε

$$I(p, q) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid p < x < q\} = (p, q) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Κάθε $I(p, q)$ είναι ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, γιατί είναι η τομή ενός ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ με τον $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Δείχνουμε ότι το $I(p, q)$ είναι και κλειστό. Θεωρούμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $I(p, q)$ με $x_n \to x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Τότε $p < x_n < q$ για κάθε n, επομένως $p \leqslant x \leqslant q$. Αν είχαμε $x = p$ ή $x = q$ τότε ο x δεν θα ήταν άρρητος αριθμός, άτοπο. Άρα $p < x < q$ και επομένως $x \in (p, q) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = I(p, q)$.

Όπως είναι γνωστό τα διαστήματα (p, q) με $p, q \in \mathbb{Q}$ αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathbb{R}$, συνεπώς τα $I(p, q) = (p, q) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, όπου $p, q \in \mathbb{Q}$, αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Άσκηση 2.6.15. Θεωρούμε ένα μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ που είναι κλειστό-ανοικτό και υποθέτουμε προς άτοπο ότι $A \neq \mathbb{R}$. Θέτουμε $F = A$ και $H = \mathbb{R} \setminus A$. Τότε τα F, H είναι μη κενά, κλειστά, ξένα ανά δύο και $F \cup H = \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις των αποστάσεων $x \in \mathbb{R} \mapsto d(x, F)$ και $x \in \mathbb{R} \mapsto d(x, H)$ από τα F και H αντίστοιχα, όπου d είναι η συνήθης μετρική: $d(x, y) = |x - y|$.

Επειδή τα F και H είναι μη κενά οι προηγούμενες συναρτήσεις είναι καλά ορισμένες, και επειδή είναι κλειστά δεν μπορούμε να έχουμε $d(x,F) = d(x,H) = 0$ για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $d(x,F) + d(x,H) > 0$.

Παίρνουμε τη συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,H)} .$$

Η f είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον για κάθε $x \in F$ ισχύει $f(x) = 0$ και για κάθε $x \in H$ ισχύει $f(x) = 1$. Παίρνουμε $x_0 \in F$ και $y_0 \in H$. Τότε $f(x_0) = 0 < 1 = f(y_0)$ και άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^{-1}$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί $\mathbb{R} = F \cup H$, επομένως είτε $x \in F$ (οπότε $f(x) = 0$) είτε $x \in H$ (οπότε $f(x) = 1$).

Άρα $A = \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.6.16. Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ όπου ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος και υποθέτουμε προς άτοπο ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε υπάρχουν $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ με $f(a_0) \neq f(b_0)$. Αφού ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος υπάρχει ένα κλειστό-ανοικτό σύνολο V με $f(a_0) \in V$ και $f(b_0) \notin V$. (Για να το δούμε αυτό παίρνουμε μια κατάλληλη μετρική d στον $\mathcal{X}$ και μια d-ανοικτή μπάλα B κέντρου $f(a_0)$ κατάλληλα μικρής ακτίνας ώστε $f(b_0) \notin B$. Τότε υπάρχει ένα κλειστό-ανοικτό σύνολο V με $x_0 \in V \subseteq B$.)

Το σύνολο $A = f^{-1}[V]$ είναι κλειστό-ανοικτό γιατί η f είναι συνεχής. Επιπλέον $A \neq \varnothing$ γιατί $a_0 \in A$ και $A \neq \mathbb{R}$ γιατί $b_0 \notin A$. Επομένως έχουμε ένα κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που δεν είναι ούτε το κενό σύνολο ούτε ο $\mathbb{R}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, δείτε την Άσκηση 2.6.15.

Είναι τότε άμεσο πως δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον $\mathcal{N}$ και τον $2^{\mathbb{N}}$ με τον $\mathbb{R}$ στα Θεωρήματα 2.3.7 και 2.3.12 αντίστοιχα. Κάθε συνεχής συνάρτηση $\pi : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{N}}$ είναι σταθερή, επομένως δεν μπορεί να είναι επιμορφισμός, και κάθε συνεχής συνάρτηση $\tau : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{N}}$ είναι σταθερή, επομένως δεν μπορεί να είναι μονομορφισμός.

Άσκηση 2.6.17. Θέτουμε $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$, $\alpha = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ και

$$\alpha_i = (1)^{i+1} * (0, 0, \dots) = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

(το 1 εμφανίζεται $i+1$-φορές) για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε $\alpha_i \to \alpha$. Επιπλέον

$$d(\alpha_i, \vec{0}) = \textstyle\sum_{n=0}^{i} (2^{-n} \cdot \min\{1,1\}) + \sum_{n=i+1}^{\infty} (2^{-n} \cdot \min\{0,1\}) = \sum_{n=0}^{i} 2^{-n} < \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2,$$

άρα $\alpha_i \in B_d(\vec{0}, 2)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Από την άλλη

$$d(\alpha, \vec{0}) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n} \cdot \min\{1,1\}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2.$$

Άρα $\alpha \notin B_d(\vec{0}, 2)$.

Άσκηση 2.6.18. Για το ευθύ άθροισμα θεωρούμε μηδενοδιάστατους Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ όπως επίσης και βάσεις $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}, \mathcal{V}_{\mathcal{Y}}$ αντίστοιχα που αποτελούνται από κλειστά-ανοικτά σύνολα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι βάσεις περιέχουν το κενό σύνολο. Για κάθε $A \subseteq \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ θέτουμε $A_0 = \{x \in \mathcal{X} \mid (0,x) \in A\}$ και $A_1 = \{y \in \mathcal{Y} \mid (1,y) \in A\}$, έτσι που το A είναι ανοικτό στον $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ αν και μόνο αν τα A_0 και A_1 είναι ανοικτά στους $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ αντίστοιχα. Παίρνουμε την οικογένεια

$$\mathcal{V} = (\{0\} \times \mathcal{V}_{\mathcal{X}}) \cup (\{1\} \times \mathcal{V}_{\mathcal{Y}}).$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $\mathcal{V}$ είναι βάση για την τοπολογία του $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$. Δείχνουμε ότι η $\mathcal{V}$ αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα. Αν έχουμε $V \in \mathcal{V}$ τότε τα V_0

και V_1 ανήκουν στις $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{Y}}$ και άρα είναι κλειστά-ανοικτά υποσύνολα των $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ αντίστοιχα. Παίρνουμε τα συμπληρώματα $F_0 = \mathrm{c}_{\mathcal{X}} V_0$, $F_1 = \mathrm{c}_{\mathcal{Y}} V_1$ και $F = \mathrm{c}_{\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}} V$. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι

$$F = (\{0\} \times F_0) \cup (\{1\} \times F_1).$$

Τα F_0 και F_1 είναι ανοικτά στους $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ αντίστοιχα. Από την ισότητα πιο πάνω το F είναι ανοικτό και άρα το συμπλήρωμα V είναι κλειστό στον $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

Σχετικά με το άπειρο αριθμήσιμο γινόμενο, θεωρούμε μια ακολουθία $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μηδενοδιάστατων Πολωνικών χώρων και αντίστοιχες βάσεις $\mathcal{V}_n$, $n \in \mathbb{N}$, από κλειστά-ανοικτάν σύνολα. Όπως γνωρίζουμε η οικογένεια

$$\mathcal{V} = \{V_0 \times \cdots \times V_n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \ldots \mid V_i \in \mathcal{V}_i, i = 0, \ldots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

είναι βάση για την τοπολογία γινόμενο στον $\mathcal{X} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n$. Για κάθε $V = V_0 \times \cdots \times V_n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \cdots \in \mathcal{V}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \setminus V = \quad & (\mathcal{X}_0 \setminus V_0) \times \mathcal{X}_1 \times \ldots \\ & \cup \mathcal{X}_0 \times (\mathcal{X}_1 \setminus V_1) \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \\ & \cup \ldots \\ & \cup \mathcal{X}_0 \times \cdots \times (\mathcal{X}_n \setminus V_n) \times \mathcal{X}_{n+1} \times \ldots. \end{aligned}$$

Κάθε $\mathcal{X}_i \setminus V_i$ είναι ανοικτό στον $\mathcal{X}_i$ γιατί το V_i είναι κλειστό-ανοικτό σύνολο. Επομένως το $\mathcal{X} \setminus V$ είναι ένωση ανοικτών συνόλων και άρα ανοικτό στον $\mathcal{X}$. Άρα το $\mathcal{V}$ είναι κλειστό στον $\mathcal{X}$.

Ο ισχυρισμός για τα πεπερασμένα γινόμενα αποδεικνύεται όμοια.

Άσκηση 2.6.19. Για το (α) θεωρούμε $y \in \mathcal{X}$ και μια ακολουθία $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία του $B_d(x, r)$ με $x_i \to y$. Δείχνουμε ότι $y \in B_d(x, r)$. Για κάθε i ισχύει

$$d(x, y) \leqslant \max\{d(x, x_i), d(x_i, y)\}.$$

Αφού $x_i \to y$ υπάρχει ένα i_0 με $d(x_{i_0}, y) < r$. Άρα $d(x, y) \leqslant \max\{d(x, x_{i_0}), d(x_{i_0}, y)\} < r$, άρα $y \in B_d(x, r)$. Αυτό δείχνει ότι το σύνολο $B_d(x, r)$ είναι κλειστό. Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο επομένως το $B_d(x, r)$ είναι ανοικτό-κλειστό.

Για το (β) υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $d(x, z) < d(y, z)$. Τότε

$$d(x, y) \leqslant \max\{d(x, z), d(z, y)\} = d(y, z).$$

Αν είχαμε $d(x, y) < d(y, z)$ τότε θα ίσχυε $\max\{d(y, x), d(x, z)\} < d(y, z)$ που έρχεται σε αντίθεση με την χαρακτηριστική ιδιότητα της υπερμετρικής. Άρα $d(x, y) = d(y, z)$.

Για το (γ) θεωρούμε $y \in B_d(x, r)$. Τότε για κάθε $z \in B_d(y, r)$ ισχύει

$$d(x, z) \leqslant \max\{d(x, y), d(y, z)\} < r$$

και άρα $z \in B_d(x, r)$. Αυτό δείχνει ότι $B_d(y, r) \subseteq B_d(x, r)$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός αποδεικνύεται όμοια.

Τέλος για το (δ) υποθέτουμε ότι $r' \leqslant r$ και δείχνουμε ότι $B_d(y, r') \subseteq B_d(x, r)$, ο άλλος εγκλεισμός προκύπτει όμοια από την περίπτωση $r < r'$. Παίρνουμε ένα $z \in B_d(x, r) \cap B_d(y, r')$, τότε

$$d(x, y) \leqslant \max\{d(x, z), d(z, y)\} < \max\{r, r'\} = r.$$

Για κάθε $w \in B_d(y, r')$ έχουμε

$$d(x, w) \leqslant \max\{d(x, y), d(y, w)\} < \max\{r, r'\} = r$$

άρα $w \in B_d(x, r)$. Επομένως $B_d(y, r') \subseteq B_d(x, r)$.

Άσκηση 2.7.4. Θεωρούμε το ευθύ άθροισμα $\mathcal{X} = \mathcal{N} \oplus 2^{\mathbb{N}} = (\{0\} \times \mathcal{N}) \cup \big(\{1\} \times 2^{\mathbb{N}}\big)$. Υπενθυμίζουμε ότι τα $\{0\} \times \mathcal{N}$ και $\{1\} \times 2^{\mathbb{N}}$ είναι κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$

και προφανώς ως υπόχωροι του $\mathcal{X}$ είναι τοπολογικά ισομορφικοί με τους $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ αντίστοιχα.

Ο $\mathcal{X}$ είναι μηδενοδιάστατος επειδή οι $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ είναι μηδενοδιάστατοι (Άσκηση 2.6.18.) Ένα μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{X}$ θα ήταν και μεμονωμένο σημείο είτε του $\{0\}\times\mathcal{N}$ είτε του $\{1\}\times 2^{\mathbb{N}}$, κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει γιατί οι $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ είναι τέλειοι.

Ο $\mathcal{X}$ δεν είναι συμπαγής γιατί αλλιώς και ο $\mathcal{N}$ θα ήταν επίσης συμπαγής, το οποίο δεν ισχύει. Επομένως ο $\mathcal{X}$ δεν είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $2^{\mathbb{N}}$. Επιπλέον ο $\mathcal{X}$ έχει ένα μη κενό ανοικτό συμπαγές υποσύνολο, συγκεκριμένα το αντίτυπο $\{1\}\times 2^{\mathbb{N}}$ του $2^{\mathbb{N}}$. Επομένως δεν μπορεί να είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{N}$.

Έπειτα παίρνουμε τον $\mathcal{Y}=\{17\}\oplus 2^{\mathbb{N}}$. Ο $\mathcal{Y}$ είναι εύκολα συμπαγής Πολωνικός χώρος αλλά το $(0,17)$ είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{Y}$ άρα ο $\mathcal{Y}$ δεν είναι τέλειος. Ειδικότερα δεν είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον τέλειο Πολωνικό χώρο $2^{\mathbb{N}}$. Όπως πιο πάνω ο $\mathcal{Y}$ είναι μηδενοδιάστατος.

Άσκηση 2.7.5. Θεωρούμε τα δένδρα $S=\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ και $T=\{0,1,2\}^{<\mathbb{N}}$ έτσι που $[S]=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και $[T]=\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$.

Ορίζουμε μια συνάρτηση $\varphi:\{0,1\}^{<\mathbb{N}}\to\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ η οποία είναι κατάλληλη και μονότονη (δείτε τον Ορισμό 2.5.9), για την οποία η αντίστοιχη συνάρτηση

$$\varphi^*:[S]\to[T]:\varphi^*(\alpha)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\varphi(\alpha|n)$$

είναι ένα-προς-ένα και επί. Με εφαρμογή της Πρότασης 2.5.10 η φ^* είναι συνεχής. Επιπλέον αφού θα έχουμε δείξει ότι είναι αντιστοιχία και αφού ο χώρος $[S]=\{0,1\}^{\mathbb{N}}=2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγής, θα έχουμε ακόμα ότι η αντίστροφη συνάρτηση $(\varphi^*)^{-1}$ είναι συνεχής, δηλαδή η φ^* είναι ένας κατάλληλος τοπολογικός ισομορφισμός.

Η ιδέα για τον ορισμό της φ δίνεται από την κατασκευή στο Θεώρημα 2.7.3. Ας πούμε ότι έχουμε ορίσει το $\varphi(u)$ για κάποιο $u\in\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$. Θα ορίσουμε το $\varphi(u*(0))$ να είναι το $\varphi(u)*(0)$ και το $\varphi(u*(1))$ ώστε να "περιλαμβάνει" τα $\varphi(u)*(i)$, $i=1,2$. Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι το $\varphi(u*(1))$ θα παραμείνει $\varphi(u)$ με την "υπόσχεση" στο επόμενο βήμα να γίνει διαχωρισμός: δηλαδή $\varphi(u*(1,0))=\varphi(u)*(1)$ και $\varphi(u*(1,1))=\varphi(u)*(2)$.

Πιο συγκεκριμένα οι τιμές της φ στις ακολουθίες μέχρι μήκους 2 έχουν ως εξής:

$$\begin{gathered}\varphi(\Lambda)=\Lambda\\ \varphi((0))=(0)\quad\text{και}\quad\varphi((1))=\Lambda\\ \varphi((0,0))=(0,0)\quad\text{και}\quad\varphi((0,1))=(0)\\ \varphi((1,0))=(1)\quad\text{και}\quad\varphi((1,1))=(2).\end{gathered}$$

Δείτε το Σχήμα ??. Αυστηρά το $\varphi(u)$ ορίζεται με επαγωγή στο μήκος $|u|$ του u. Για $|u|\leqslant 1$ το $\varphi(u)$ ορίζεται όπως πιο πάνω: $\varphi(\Lambda)=\Lambda$, $\varphi((0))=(0)$, $\varphi((1))=\Lambda$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k\geqslant 1$ έχουμε ορίσει το $\varphi(u)$ για κάθε u με $|u|\leqslant k$. Παίρνουμε ένα u με $|u|=k$ και ορίζουμε τα $\varphi(u*(0))$, $\varphi(u*(1))$. Η τιμή που θα αποδώσουμε σε αυτά εξαρτάται από το αν έχει δοθεί "υπόσχεση" να γίνει διαχωρισμός προς την κατεύθυνση των 1 και 2. Αυτή σηματοδοτείται από την τιμή $\varphi(u)$ σε σχέση με την τιμή της φ στο αμέσως προηγούμενο βήμα πριν τη u.

Θέτουμε $u^-=(u(0),\dots,u(|u|-2))$ έτσι που $u=u^-*(m)$, όπου $m=u(|u|-1)$. Αν $\varphi(u)\neq\varphi(u^-)$ ορίζουμε

$$\varphi(u*(0))=\varphi(u)*(0)\quad\text{και}\quad\varphi(u*(1))=\varphi(u).$$

Αν $\varphi(u)=\varphi(u^-)$ ορίζουμε

$$\varphi(u*(0))=\varphi(u)*(1)\quad\text{και}\quad\varphi(u*(1))=\varphi(u)*(2).$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Δείχνουμε με κάποια λεπτομέρεια ότι οι συναρτήσεις φ και φ^* ικανοποιούν τις ζητούμενες ιδιότητες. Είναι σαφές ότι η φ είναι μονότονη. Για να δείξουμε ότι είναι και κατάλληλη θεωρούμε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ και $m \in \mathbb{N}$, θα βρούμε $n > m$ έτσι ώστε το $\varphi(\alpha|n)$ να επεκτείνει γνήσια το $\varphi(\alpha|m)$. (Μάλιστα το n είναι ένα από τα $m+1, m+2$).

Διακρίνουμε περιπτώσεις, στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε $\varphi(\alpha|m) \neq \varphi(\alpha|(m-1))$. Τότε από τον ορισμό της φ έχουμε ότι $\varphi(\alpha|m*(0)) = \varphi(\alpha|m)*(0)$ που επεκτείνει γνήσια το $\varphi(\alpha|m)$. Συνεπώς αν $\alpha(m) = 0$ τότε $\alpha|(m+1) = \alpha|m*(0)$ και επομένως μπορούμε να πάρουμε $n = m+1$. Στην υποπερίπτωση $\alpha(m) = 1$ έχουμε πάλι από τον ορισμό της φ,

$$\varphi(\alpha|(m+1)) = \varphi(\alpha|m*(1)) = \varphi(\alpha|m).$$

Αυτό μας τοποθετεί στην περίπτωση $\varphi(u) = \varphi(u^-)$ του ορισμού της φ όπου $u = \alpha|(m+1)$. Επομένως

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha|(m+2)) &= \varphi(\alpha|(m+1)*(\alpha(m+1)))\\ &= \varphi(\alpha|(m+1))*(\alpha(m+1)+1)\\ &= \varphi(\alpha|m)*(\alpha(m+1)+1).\end{aligned}$$

Ειδικότερα το $\varphi(\alpha|(m+2))$ επεκτείνει γνήσια το $\varphi(\alpha|m)$, οπότε παίρνουμε $n = m+2$.

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε $\varphi(\alpha|m) = \varphi(\alpha|(m-1))$. Τότε είναι πάλι σαφές από τον ορισμό της φ ότι το $\varphi(\alpha*(m+1)) = \varphi(\alpha|m*(\alpha(m)))$ είναι ίσο με $\varphi(\alpha|m)*(\alpha(m)+1)$, το οποίο επεκτείνει γνήσια το $\varphi(\alpha|m)$.

Έχουμε αποδείξει λοιπόν ότι η φ είναι κατάλληλη. Για να δείξουμε ότι η φ^* είναι επί παίρνουμε ένα $\beta \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει ακολουθία $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ στο $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $u_0 \subsetneq u_1 \subsetneq \cdots \subsetneq u_m \subsetneq \dots$ με $\varphi(u_m) = \beta|m$ για κάθε m. Τότε $|u_m| \geqslant m$ για κάθε m και επομένως η ένωση $\bigcup_m u_m$ είναι ίση με ένα $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, το οποίο ικανοποιεί $\varphi^*(\alpha) = \beta$.

Η κατασκευή της προηγούμενης $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ γίνεται με αναδρομή στο $m \in \mathbb{N}$. Χρειάζεται να ικανοποιείται και μια επιπλέον ιδιότητα *ελάχιστου μήκους*, την οποία εξηγούμε πιο κάτω. Για $m = 0$ έχουμε $\beta|m = \Lambda$, επομένως παίρνουμε $u_0 = \Lambda$. Για $m = 1$ παίρνουμε $u_1 = (0)$ αν $\beta(0) = (0)$, $u_1 = (1,0)$ αν $\beta(0) = 1$, και $u_2 = (1,1)$ αν $\beta(2) = 2$. Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει $\varphi(u_1) = (\beta(0)) = \beta|1$. Επιπλέον το u_1 είναι κάθε φορά η ακολουθία ελάχιστου μήκους για την οποία ισχύει $\varphi(u_1) = \beta|1$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $m \geqslant 1$ έχουν οριστεί $u_0 \subsetneq u_1 \subsetneq \cdots \subsetneq u_m$ με $\varphi(u_i) = \beta|i$ για κάθε $i \leqslant m$, και επιπλέον για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $u_{i-1} \sqsubseteq v$ και $\varphi(v) = \beta|i$ ισχύει $|v| \geqslant |u_i|$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$. (Παρατηρούμε ότι ένα τέτοιο v θα επεκτείνει γνήσια την u_{i-1} γιατί $\varphi(v) = \beta|i \neq \beta|(i-1) = \varphi(u_{i-1})$ και ειδικότερα $v \neq u_{i-1}$.) Θα ορίσουμε το u_{m+1} έτσι ώστε $u_m \subsetneq u_{m+1}$, $\varphi(u_{m+1}) = \beta|(m+1)$ και για κάθε $v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ με $u_m \sqsubseteq v$ και $\varphi(v) = \beta|(m+1)$ ισχύει $|v| \geqslant |u|$.

Αρχικά ισχυριζόμαστε ότι $\varphi(u_m) \neq \varphi(u_m^-)$. Σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε $\varphi(u_m^-) = \varphi(u_m) = \beta|m$. Εφόσον $u_{m-1} \subsetneq u_m$ ισχύει $u_{m-1} \sqsubseteq u_m^-$, άρα η $v = u_m^-$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία που επεκτείνει την u_{m-1}, ικανοποιεί $\varphi(v) = \beta|m$ και έχει μήκος μικρότερο της u_m, που έρχεται σε αντίθεση με την Επαγωγική Υπόθεση. Άρα $\varphi(u_m) \neq \varphi(u_m^-)$.

Για την κατασκευή του u_{m+1} διακρίνουμε περιπτώσεις. Αρχικά θεωρούμε ότι $\beta(m) = 0$. Τότε παίρνουμε $u_{m+1} = u_m*(0)$, αφού $\varphi(u_m) \neq \varphi(u_m^-)$ έχουμε $\varphi(u_{m+1}) = \varphi(u_m)*(0) = \beta|m*(\beta(m)) = \beta|(m+1)$. Προφανώς το u_{m+1} επεκτείνει γνήσια το u_m. Αν έχουμε $u_m \sqsubseteq v$ και $\varphi(v) = \beta|(m+1) \neq \varphi(u_m)$ τότε $u_m \subsetneq v$, άρα $|v| \geqslant |u_m|+1 = |u_{m+1}|$.

Έπειτα θεωρούμε ότι $\beta(m) = 1$, τότε παίρνουμε $u_{m+1} = u_m*(1,0)$, που προφανώς επεκτείνει γνήσια το u_m. Εφόσον $\varphi(u_m) \neq \varphi(u_m^-)$ έχουμε $\varphi(u_m*(1)) = \varphi(u_m)$ και άρα στον υπολογισμό του $\varphi(u_n*(1,0))$ οδηγούμαστε στην 2η περίπτωση του ορισμού της φ για $u = u_m*(1)$:

$$\begin{aligned}\varphi(u_n*(1,0)) &= \varphi(u_m*(1)*(0)) = \varphi(u_m*(1))*(1)\\ &= \varphi(u_m)*(1) = \beta|m*(\beta(m)) = \beta|(m+1).\end{aligned}$$

Αν το $v \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ επεκτείνει το u_m και ικανοποιεί $\varphi(v) = \beta|(m+1) = \varphi(u_m)*(1)$ τότε $v \neq u_m$. Επειδή $\varphi(u_m) \neq \varphi(u_m^-)$ η $\varphi(u_m*(j))$ για $j = 0, 1$ θα είναι είτε $\beta|m*(0) \neq \beta|(m+1)$ (αν $j = 0$) είτε $\beta|m \neq \beta|(m+1)$ (αν $j = 1$). Επομένως η v διαφέρει από τα $u_m*(0)$ και $u_m*(1)$, συνεπώς τα επεκτείνει γνήσια. Ειδικότερα $|v| \geqslant |u_m|+2 = |u_{m+1}|$.

Η τελευταία περίπτωση $\beta(m) = 1$ αντιμετωπίζεται όμοια παίρνοντας $u_{m+1} = u_m * (1,1)$. Αυτό ολοκληρώνει το Επαγωγικό Βήμα, και άρα έχουμε αποδείξει ότι η φ^* είναι επιμορφισμός.

Τέλος δείχνουμε ότι η φ^* είναι μονομορφισμός. Θεωρούμε $\alpha_1, \alpha_2 \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\alpha_1 \neq \alpha_2$ και παίρνουμε m τον ελάχιστο φυσικό με $\alpha_1(m) \neq \alpha_2(m)$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha_1(m) = 0$ και $\alpha_2(m) = 1$. Θέτουμε $u_0 = \alpha_1|m = \alpha_2|m$. Θα βρούμε u_1, u_2 με $u_0 * (0) \sqsubseteq u_1 \sqsubseteq \alpha_1$, $u_0 * (1) \sqsubseteq u_2 \sqsubseteq \alpha_2$ και οι $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ είναι ασύμβατες.

Αν $u_0 = \Lambda$ τότε παίρνουμε $u_1 = (0) \sqsubseteq \alpha_1$ και $u_2 = (1, \alpha_2(1)) \sqsubseteq \alpha_2$, έτσι που $\varphi(u_1) = (0)$ και $\varphi(u_2) = (1)$ ή (2) ανάλογα με την τιμή του $\alpha_2(1)$.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι $u_0 \neq \Lambda$. Αν $\varphi(u_0) \neq \varphi(u_0^-)$ τότε παίρνουμε $u_1 = u_0*(0) = \alpha_1|(m+1)$ και $u_2 = u_0*(1, \alpha_2(m+1)) = \alpha_2|(m+2)$. Τότε $\varphi(u_1) = \varphi(u_0)*(0)$ και $\varphi(u_0 * (1)) = \varphi(u_0)$, άρα

$$\varphi(u_2) = \varphi(u_0*(1, \alpha_2(m+1))) = \varphi(u_0*(1))*(\alpha_2(m+1)+1) = \varphi(u_0)*(\alpha_2(m+1)+1).$$

Οπότε οι $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ είναι ασύμβατες.

Τέλος αν $\varphi(u_0) = \varphi(u_0^-)$ παίρνουμε $u_1 = u_0*(0) = \alpha_1|(m+1)$ και $u_1 = u_0*(1) = \alpha_2|(m+1)$. Τότε $\varphi(u_1) = \varphi(u_0) * (1)$ και $\varphi(u_2) = \varphi(u_0) * (2)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι πάλι ότι οι $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ είναι ασύμβατες. Έχουμε δείξει επομένως ότι η φ^* είναι μονομορφισμός.

Κεφάλαιο 3

Άσκηση 3.2.11. Αν έχουμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και $P \in \Gamma|(\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ τότε $P = \{(x_0, n_0)\}$ για κάποια $x_0 \in \mathcal{X}$ και $n_0 \in \mathbb{N}$. Επομένως $\exists^{\mathbb{N}} P = \{x_0\} \in \Gamma|\mathcal{X}$ και η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Από την άλλη είναι σαφές ότι η κλάση Γ δεν είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$ γιατί η άπειρη ένωση μονοσυνόλων προφανώς μπορεί να περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Άσκηση 3.2.12. Αν έχουμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ που ανήκουν στη Γ τότε το P_0 και συνεπώς η ένωση $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ περιέχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία. Δηλαδή $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n \in \Gamma|\mathcal{X}$ και η Γ είναι κλειστή ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Στη συνέχεια παίρνουμε $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ και $P = \{\sqrt{2}\} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Τότε το P έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία και συνεπώς $P \in \Gamma|(\mathbb{R} \times \mathbb{N})$. Από την άλλη

$$x \in \exists^{\mathbb{N}} P \iff x = \sqrt{2}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το $\exists^{\mathbb{N}} P$ αποτελείται από ακριβώς ένα στοιχείο και επομένως δεν ανήκει στην $\Gamma|\mathbb{R}$. Άρα η Γ δεν είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.2.13. Θεωρούμε τα σύνολα $A_n \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και $B_m \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$, $n, m \in \mathbb{N}$ με

$$(x, \alpha) \in A_n \iff x = f_n(\alpha)$$
$$(x, \alpha) \in B_m \iff g_m(x, \alpha) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι το A_n είναι το γράφημα της f_n και το B_m είναι το σύνολο $g_m^{-1}[\{0\}]$. Άρα τα A_n και B_m είναι κλειστά σύνολα. Επιπλέον για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \forall m \, (x = f_n(\alpha) \ \vee \ g_m(x, \alpha) = 0) &\iff \forall m \, ((x, \alpha) \in A_n \ \vee \ (x, \alpha) \in B_m) \\ &\iff \forall m \, (x, \alpha) \in A_n \cup B_m. \end{aligned}$$

Επομένως ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$C_n = \textstyle\bigcap_{m \in \mathbb{N}} (A_n \cup B_m)$$

έτσι που

$$\forall m\, (x = f_n(\alpha) \ \vee\ g_m(x, \alpha) = 0) \iff (x, \alpha) \in C_n.$$

Προφανώς τα σύνολα C_n είναι κλειστά. Έπειτα θεωρούμε τη συνάρτηση της προβολής $\mathrm{pr} : \mathcal{X} \times \mathcal{N} \to \mathcal{X} : \mathrm{pr}(x, \alpha) = x$ και έχουμε

$$\exists \alpha\, (x, \alpha) \in C_n \iff x \in \mathrm{pr}[C_n].$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} x \in P &\iff \forall n\, \exists \alpha\, \forall m\, (x = f_n(\alpha) \ \vee\ g_m(x, \alpha) = 0) \\ &\iff \forall n\, \exists \alpha\, (x, \alpha) \in C_n \\ &\iff \forall n\, x \in \mathrm{pr}[C_n] \\ &\iff x \in \textstyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{pr}[C_n]. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια

$$P = \textstyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{pr}[C_n]$$

δηλαδή το P είναι αριθμήσιμη τομή συνόλων που είναι προβολές κλειστών συνόλων.

Άσκηση 3.2.14. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in A_u &\iff \forall n\, \exists w\, (|w| \geqslant n \ \&\ w \in T(x)) \\ &\iff \forall n\, \exists w\, (|w| \geqslant n \ \&\ (x, w) \in T). \end{aligned}$$

Επειδή το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το "$\exists w$" παραπέμπει στον τελεστή $\exists^{\mathbb{N}}$. Για την ακρίβεια θεωρούμε τη φυσική απαρίθμηση $(\mathrm{u}_s)_{s \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Τότε σύμφωνα με τα ποιο πάνω έχουμε

$$x \in A_u \iff \forall n\, \exists s\, (|\mathrm{u}_s| \geqslant n \ \&\ (x, \mathrm{u}_s) \in T).$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $f = ((x, n, s) \mapsto |\mathrm{u}_s| - n)$ και $g = ((x, n, s) \mapsto (x, \mathrm{u}_s))$ είναι συνεχείς. Επομένως το σύνολο

$$C = \{(x, n, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^2 \mid |\mathrm{u}_s| > n\} = \{(x, n, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^2 \mid f(x, n, s) \geqslant 0\}$$

είναι κλειστό.

Όμοια το σύνολο

$$L = \{(x, n, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N}^2 \mid g(x, n, s) \in T\}$$

είναι κλειστό.

Συμβολίζουμε με Γ την κλάση των κλειστών συνόλων, η οποία είναι κλειστή ως προς &. Εκτιμούμε την πολυπλοκότητα του A_u διαγραμματικά με βάση τα προηγούμενα,

$$x \in A_u \iff \underbrace{\forall n\ \underbrace{\exists s\ \underbrace{(\underbrace{|\mathrm{u}_s| \geqslant n}_{\text{κλειστό} = \Gamma} \ \&\ \underbrace{(x, \mathrm{u}_s) \in T}_{\text{κλειστό} = \Gamma})}_{\Gamma}}_{\exists^{\mathbb{N}}\Gamma}}_{\forall^{\mathbb{N}}\exists^{\mathbb{N}}\Gamma}.$$

Άρα το A_u ανήκει στη $\forall^{\mathbb{N}}\exists^{\mathbb{N}}\Gamma$.

Άσκηση 3.2.15. Θεωρούμε τη φυσική απαρίθμηση $(\mathrm{u}_s)_{s \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} (x, u) \in T &\iff \forall v \in J\, \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u|\, (x \notin V_n \ \&\ v \nsubseteq u) \\ &\iff \forall v\, \forall n \leqslant |u|\, (v \notin J \ \vee\ n \notin I \ \vee\ (x \notin V_n \ \&\ v \nsubseteq u)) \\ &\iff \forall s\, \forall n \leqslant f(n)\, (\mathrm{u}_s \notin J \ \vee\ (x \notin V_n \ \&\ \mathrm{u}_s \nsubseteq u)) \end{aligned}$$

όπου $f : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} : f(u) = |u|$. Αφού οι χώροι $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ και $\mathbb{N}$ είναι διακριτοί η f είναι συνεχής.

Συμβολίζουμε με Γ_0 και Γ_1 τις κλάσεις των κλειστών και F_σ συνόλων αντίστοιχα. Αφού η αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό σύνολο, έχουμε ότι η Γ_0 είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση. Με χρήση της Παρατήρησης 3.1.6 υπολογίζουμε διαγραμματικά

$$(x,u) \in T \iff \underbrace{\forall s\ \underbrace{\forall n \leqslant f(u)\ \underbrace{(\mathrm{u}_s \notin J\ \vee\ (x \notin V_n\ \&\ \mathrm{u}_s \not\sqsubseteq u))}_{\Gamma_0}}_{\forall^{\leqslant}\Gamma_0 \subseteq \Gamma_0}}_{\forall^{\mathbb{N}}\Gamma_0 \subseteq \Gamma_0}.$$

Άρα το T ανήκει στην κλάση Γ_0 δηλαδή είναι κλειστό. Για τα σύνολα $P_{u,w}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in P_{u,w} &\iff u \in f(x)\ \&\ w \notin f(x) \\ &\iff \underbrace{\underbrace{(x,u) \in T}_{\text{κλειστό} = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1} \quad \& \quad \underbrace{(x,w) \notin T}_{\text{ανοικτό} \subseteq F_\sigma = \Gamma_1}}_{\Gamma_1}, \end{aligned}$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι η τομή δύο F_σ συνόλων είναι F_σ σύνολο.

Τέλος θεωρούμε ότι τα V_n είναι κλειστά-ανοικτά και δείχνουμε ότι κάθε $P_{u,w}$ είναι ανοικτό σύνολο. Από τον πιο πάνω υπολογισμό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο

$$G_u = \{x \in \mathcal{X} \mid (x,u) \in T\}$$

είναι ανοικτό.

Ο ποσοδείκτης $\forall v \in J$ στον ορισμό του T είναι προβληματικός όσον αφορά το να δείξουμε πως το G_u είναι ανοικτό σύνολο. Από την άλλη όμως παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές x και v εμπλέκονται σε διαφορετικά σημεία της σύζευξης στον ορισμό του T. Από αυτό προκύπτει ότι

$$(x,u) \in T \iff \forall v \in J\ v \not\sqsubseteq u \quad \& \quad \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u|\ x \notin V_n.$$

Άρα για σταθερό $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είτε η συνθήκη $\forall v \in J\ v \not\sqsubseteq u$ δεν ικανοποιείται και άρα $G_u = \varnothing$ που είναι ανοικτό σύνολο, είτε η προηγούμενη συνθήκη ικανοποιείται όποτε

$$\begin{aligned} x \in G_u &\iff \forall n \in I \text{ με } n \leqslant |u|\ x \notin V_n \\ &\iff \forall n \leqslant f(n)\ (n \notin I\ \vee\ x \in \mathcal{X} \setminus V_n). \end{aligned}$$

Αφού το $\mathcal{X} \setminus V_n$ είναι ανοικτό σύνολο προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία ότι το G_u είναι ανοικτό.

Άσκηση 3.3.11. Η ισότητα $\boldsymbol{\Sigma}^0_n = \mathrm{c}\boldsymbol{\Pi}^0_n$ είναι σαφής από τον ορισμό $\boldsymbol{\Pi}^0_n = \mathrm{c}\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ και την ισότητα $\mathrm{c}_{\mathcal{X}}(\mathrm{c}_{\mathcal{X}} P) = P$.

Έπειτα δείχνουμε τη συμπερίληψη $\boldsymbol{\Pi}^0_{n+1} \subseteq \bigwedge_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\Sigma}^0_n$. θεωρούμε $P \in \boldsymbol{\Pi}^0_{n+1}(\mathcal{X})$, τότε $\mathrm{c}_{\mathcal{X}} P \in \boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1}$ και επομένως υπάρχει ακολουθία $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $\mathrm{c}_{\mathcal{X}} P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$. Τότε $P = \mathrm{c}_{\mathcal{X}} \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i\right) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{c}_{\mathcal{X}} Q_i$. Είναι σαφές ότι $\mathrm{c}_{\mathcal{X}} Q_i \in \boldsymbol{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$ και άρα $P \in \bigwedge_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\Sigma}^0_n$.

Αντίστροφα για να δείξουμε ότι $\bigwedge_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\Sigma}^0_n \subseteq \boldsymbol{\Pi}^0_{n+1}$ παίρνουμε $P = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ όπου $Q_i \in \boldsymbol{\Sigma}^0_n(\mathcal{X})$ για κάθε i. Τότε έχουμε $\mathrm{c}_{\mathcal{X}} P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{c}_{\mathcal{X}} Q_i \in \bigvee_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\Pi}^0_n(\mathcal{X}) = \boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1}(\mathcal{X})$. Άρα $P = \mathrm{c}_{\mathcal{X}}(\mathrm{c}_{\mathcal{X}} P) \in \boldsymbol{\Pi}^0_{n+1}(\mathcal{X})$.

Άσκηση 3.3.12. Αφού $\boldsymbol{\Pi}^0_k \subseteq \boldsymbol{\Pi}^0_{k+1}$ για κάθε $k \geqslant 1$ (Πρόταση 3.3.3) έχουμε $\bigcup_{k\leqslant n} \boldsymbol{\Pi}^0_k = \boldsymbol{\Pi}^0_n$ για κάθε $n \geqslant 1$. Άρα $\boldsymbol{\Sigma}^0_{n+1} = \bigvee_{\mathbb{N}} \boldsymbol{\Pi}^0_n = \bigvee_{\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\leqslant n} \boldsymbol{\Pi}^0_k\right)$.

Άσκηση 3.3.13. Αν $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ όπου $Q_i \in \boldsymbol{\Pi}^0_n(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, θέτουμε $P_i = \bigcup_{k\leqslant i} Q_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε $P_i \subseteq P_{i+1}$ και αφού η κλάση $\boldsymbol{\Pi}^0_n$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις (Θεώρημα 3.3.8) έχουμε ότι κάθε P_i ανήκει στην κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$. Τέλος είναι σαφές ότι $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i = P$.

Άσκηση 3.3.14. Όπως έχουμε δει στη λύση της Άσκησης 3.2.14 ισχύει

$$x \in A_u \iff \forall n\, \exists w\, (|w| \geqslant n \;\&\; (x, w) \in T).$$

Η σχέση μέσα στις παρενθέσεις ορίζει ένα $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1$ σύνολο, συνεπώς το A_u ανήκει στην κλάση

$$\forall^{\mathbb{N}} \exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1 \subseteq \forall^{\mathbb{N}} \exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2 = \forall^{\mathbb{N}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2 = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_3,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε την κλειστότητα της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2$ ως προς $\exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$.

Άσκηση 3.3.15. Έχουμε ότι ένα δένδρο $T \in \mathrm{Tr}$ είναι πεπερασμένης διακλάδωσης αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}
& \forall u \in T\, \exists n_0, \ldots, n_{k-1}\, \forall v \in T\, [(u \sqsubseteq v \;\&\; |v| = |u| + 1) \longleftrightarrow \exists i < k\; v = u * (n_i)\,] \\
\iff & \forall u\, \exists n_0, \ldots, n_{k-1}\, \forall v\, [\, u \notin T \;\vee\; v \notin T \\
& \qquad\qquad \vee\; (u \sqsubseteq v \;\&\; |v| = |u| + 1) \longleftrightarrow \exists i < k\; v = u * (n_i)\,] \\
\iff & \forall u\, \exists w\, \forall v\, [\, u \notin T \;\vee\; v \notin T \\
& \qquad\qquad \vee\; (u \sqsubseteq v \;\&\; |v| = |u| + 1) \longleftrightarrow \exists i < |w|\; v = u * (w(i))\,].
\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η σχέση μέσα στις αγκύλες ορίζει ένα κλειστό σύνολο. Συνεπώς το σύνολο όλων των δένδρων πεπερασμένης διακλάδωσης ανήκει στην κλάση

$$\forall^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \forall^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1 = \forall^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_1 \subseteq \forall^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \exists^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2 = \forall^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_2 \subseteq \forall^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_3 = \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_3.$$

Άσκηση 3.3.16. Για κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
x \in \exists^{\mathbb{N}} Q &\iff \exists i\, (x, i) \in Q \\
&\iff \exists i\; x \in Q_i
\end{aligned}$$

όπου $Q_i = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, i) \in Q\} \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n | \mathcal{X}$ από την Παρατήρηση 3.3.5. Άρα $P = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n | \mathcal{X}$ από την κλειστότητα της $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς $\bigvee_{\mathbb{N}}$.

Άσκηση 3.3.17. Θεωρούμε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ που ανήκει στην κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τα σύνολα $P_i, Q_i, R_i \subseteq \mathcal{X}$ με

$$\begin{aligned}
P_i &= \{x \in \mathcal{X} \mid (x, i) \in P\} \\
Q_i &= \textstyle\bigcup_{j \leqslant i} P_j \\
R_i &= \textstyle\bigcap_{j \leqslant i} P_j.
\end{aligned}$$

Από την Παρατήρηση 3.3.5 κάθε P_i ανήκει στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Από την κλειστότητα της κλάσης $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ ως προς πεπερασμένη ένωση και πεπερασμένη τομή έχουμε ότι τα σύνολα Q_i, R_i ανήκουν επίσης στη $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Από το Λήμμα 3.3.6 τα σύνολα $Q, R \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ με

$$(x, i) \in Q \iff x \in Q_i \quad \text{και} \quad (x, i) \in R \iff x \in R_i$$

ανήκουν στην κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$. Επιπλέον

$$\begin{aligned}
(x, i) \in \exists^{\leqslant} P &\iff \exists j \leqslant i\, (x, j) \in P \\
&\iff \exists j \leqslant i\; x \in P_j \\
&\iff x \in Q_i \\
&\iff (x, i) \in Q.
\end{aligned}$$

Άρα $\exists^{\leqslant} P = Q \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n | (\mathcal{X} \times \mathbb{N})$ και όμοια $\forall^{\leqslant} P = R \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n | (\mathcal{X} \times \mathbb{N})$.

Άσκηση 3.3.18. Για κάθε $y \in [0,1]$ ορίζουμε το σύνολο

$$V_y = \begin{cases} \mathcal{X}, & \text{αν } y \leqslant 2^{-1}, \\ \varnothing, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Είναι σαφές ότι κάθε V_y είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Από την άλλη αν πάρουμε το σύνολο

$$(x,y) \in V \iff x \in V_y$$

τότε

$$V = \mathcal{X} \times [0, 2^{-1}]$$

που δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{X} \times [0,1]$.

Άσκηση 3.3.19. Για κάθε $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_i$,

$$\begin{aligned}(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \textstyle\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i &\iff \forall i\, x_i \in A_i \\ &\iff \forall i\, \mathrm{pr}_i((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) \in A_i,\end{aligned}$$

όπου $\mathrm{pr}_i : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_i$ είναι η συνάρτηση της προβολής στην i-συντεταγμένη. Αφού κάθε A_i είναι $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$ σύνολο προκύπτει από την τελευταία ισοδυναμία ότι το σύνολο $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathbb{N}}\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n = \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_{n+1}$.

Από την άλλη αν κάθε A_i είναι $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$ σύνολο τότε από την τελευταία ισοδυναμία το $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ανήκει στην κλάση $\forall^{\mathbb{N}}\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n = \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$.

Για την περίπτωση του πεπερασμένου γινομένου έχουμε όπως πριν

$$(x_0, \dots, x_m) \in A_0 \times \cdots \times A_m \iff \forall i \leqslant m\, \mathrm{pr}_i(x_0, \dots, x_m) \in A_i.$$

Οπότε αν κάθε A_i είναι $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$ σύνολο το πεπερασμένο γινόμενο $A_0 \times \cdots \times A_m$ είναι επίσης $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$ λόγω της κλειστότητας της $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$ ως προς τον φραγμένο καθολικό ποσοδείκτη. Εδώ κάνουμε χρήση της Παρατήρησης 3.1.6 με $f(x_0, \dots, x_m) = m$ (σταθερή συνάρτηση). Όμοια αν κάθε A_i είναι $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$ σύνολο τότε το $A_0 \times \cdots \times A_m$ είναι επίσης $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$.

Άσκηση 3.4.9. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Όπως έχουμε αναφέρει η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο $n \geqslant 1$ και η περίπτωση $n = 1$ είναι το Λήμμα 3.4.3.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ ισχύει $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$, ισοδύναμα $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n(\mathcal{X}) \subseteq \utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$. Παίρνουμε $P \in \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_{n+1}(\mathcal{X})$ και θεωρούμε μια ακολουθία $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με $P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $P_i \in \utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$, δηλαδή $P_i \in \utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1(\mathcal{X})$ και $P_i \in \utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_1(\mathcal{X})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Αφού οι κλάσεις $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$ και $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_1$ είναι κλειστές ως προς τον τελεστή της αριθμήσιμης ένωσης $\bigvee_{\mathbb{N}}$ (Θεώρημα 3.4.5) έχουμε ότι το P είναι $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$ και $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_1$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$. Επομένως $P \in \utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_1(\mathcal{X})$.

Άσκηση 3.4.10. Από το Πόρισμα 3.4.7 το δοσμένο $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$ σύνολο είναι συνεχής εικόνα $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_{n-1}$ συνόλου. Εφόσον η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση, προκύπτει ότι η συνεχής εικόνα του δοσμένου $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$ συνόλου είναι συνεχής εικόνα $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_{n-1}$ συνόλου, και πάλι από το Πόρισμα 3.4.7 είναι $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$ σύνολο.

Άσκηση 3.4.11. Οι ισοδυναμίες μεταξύ των τελεστών κλειστότητας είναι άμεσες από το Πόρισμα 3.2.9 και την Πρόταση 3.2.10. Ο ισχυρισμός για τα σύνολα R και R_s είναι επίσης άμεσος από την Πρόταση 3.2.6. Σε όλα αυτά χρησιμοποιούμε την κλειστότητα των κλάσεων ως προς συνεχή αντικατάσταση.

Απομένει να δειχθεί ο πρώτος ισχυρισμός. Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο $n \geqslant 1$. Για $n = 1$ θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, μια ακολουθία $(P_s)_{s\in\mathbb{N}}$ από $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ και μια ακολουθία $(Q_s)_{s\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $P_s = \exists^{\mathcal{N}} Q_s$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε επίσης το σύνολο P της εκφώνησης.

Από το Λήμμα 3.3.6 το

$$Q = \{(x, \alpha, s) \in \mathcal{X} \times \mathbb{N} \mid (x, \alpha) \in Q_s\}$$

είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον για κάθε x, s,

$$\begin{aligned} (x, s) \in P &\iff x \in P_s \\ &\iff \exists \alpha\, (x, \alpha) \in Q_s \\ &\iff \exists \alpha \in (x, \alpha, s) \in Q. \end{aligned}$$

Άρα το P είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ σύνολο.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geqslant 1$ έχουμε ότι για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε ακολουθία $(P_s)_{s \in \mathbb{N}}$ από $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$ το σύνολο P της εκφώνησης ανήκει στην κλάση $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$. Δείχνουμε το ίδιο για το $n + 1$.

Έστω $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος και $(P_s)_{s \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία από $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$ υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Παίρνουμε μια ακολουθία $(Q_s)_{s \in \mathbb{N}}$ από $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ υποσύνολα $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ με $P_s = \exists^{\mathcal{N}} Q_s$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$.

Από την Επαγωγική Υπόθεση εφαρμοσμένη στον Πολωνικό χώρο $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και στην ακολουθία $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ συνόλων $\big((\mathcal{X} \times \mathcal{N}) \setminus Q_s\big)_{s \in \mathbb{N}}$ το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathbb{N}$ με

$$(x, \alpha, s) \in Q \iff (x, \alpha) \in Q_s$$

είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$. Όπως πιο πάνω για κάθε x, s έχουμε

$$\begin{aligned} (x, s) \in P &\iff x \in P_s \\ &\iff \exists \alpha\, (x, \alpha) \in Q_s \\ &\iff \exists \alpha \in (x, \alpha, s) \in Q. \end{aligned}$$

Άρα το P είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1}$ σύνολο.

Άσκηση 3.4.12. Η κατεύθυνση (iii) $\Longrightarrow$ (i) είναι σαφής αφού οι προβολές είναι συνεχείς συναρτήσεις και άρα αν μια κλάση είναι κλειστή ως προς συνεχείς εικόνες είναι τότε κλειστή και ως προς τον τελεστή $\exists^{\mathcal{N}}$.

Για την κατεύθυνση (i) $\Longrightarrow$ (ii) θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{Y}$ και έναν συνεχή επιμορφισμό $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{Y}$. Τότε για κάθε $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ που ανήκει στη Γ, (όπου $\mathcal{X}$ Πολωνικός χώρος), και κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \exists^{\mathcal{Y}} P &\iff \exists y\, (x, y) \in P \\ &\iff \exists \alpha\, (x, \pi(\alpha)) \in P, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε ότι η π είναι επιμορφισμός.

Αφού η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση προκύπτει από τις πιο πάνω ισοδυναμίες ότι το σύνολο $\exists^{\mathcal{Y}} P$ ανήκει στην κλάση $\exists^{\mathcal{N}} \Gamma \subseteq \Gamma$.

Έπειτα ασχολούμαστε με την κατεύθυνση (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ και ένα σύνολο $P \in \Gamma|\mathcal{Y}$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in f[P] &\iff \exists y \in P\, f(y) = x \\ &\iff \exists y\, (y \in P \,\&\, (y, x) \in Graph(f)). \end{aligned}$$

Το P ανήκει στη Γ από την υπόθεση και το γράφημα $Graph(f)$ της f είναι κλειστό σύνολο αφού η f είναι συνεχής. Από τις ιδιότητες κλειστότητας της Γ το σύνολο Q με

$$(y, x) \in Q \iff y \in P \,\&\, (y, x) \in Graph(f)$$

ανήκει στη Γ και το σύνολο $f[P] = \exists^{\mathcal{Y}} Q$ ανήκει στη $\exists^{\mathcal{Y}} \Gamma \subseteq \Gamma$.

Ο ισχυρισμός σχετικά με την $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ είναι άμεσος από τα πιο πάνω αφού η $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ περιέχει τα κλειστά σύνολα, και είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και &, όπου $n \geqslant 1$.

Άσκηση 4.2.13. Πρέπει να δείξουμε ότι η κλειστότητα ως προς την αριθμήσιμη ένωση υποσυνόλων του X είναι ισοδύναμη με την κλειστότητα ως προς την αριθμήσιμη τομή (υποσυνόλων του X) παρουσία των άλλων δύο ιδιοτήτων της σ-άλγεβρας.

Θεωρούμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα και παίρνουμε μια ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από υποσύνολα του X που ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Τότε

$$X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n.$$

Αφού $A_n \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι $X \setminus A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και από την κλειστότητα ως προς αριθμήσιμη ένωση έχουμε ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n \in \mathcal{A}$. Προκύπτει ότι $X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ και άρα $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Καταλήγουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς των αριθμήσιμη τομή υποσυνόλων του X.

Η αντίστροφη κατεύθυνση αποδεικνύεται όμοια.

Άσκηση 4.2.14. Ορίζουμε τις οικογένειες $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$ ως εξής

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \text{η } \mathcal{A} \text{ είναι } \sigma\text{-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του } X\} \\
\mathcal{F}_2 &= \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \text{η } \mathcal{A} \text{ είναι } \sigma\text{-άλγεβρα που περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του } X\} \\
\mathcal{F}_3 &= \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \text{η } \mathcal{A} \text{ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις/τομές και} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του } X\} \\
\mathcal{F}_4 &= \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \text{η } \mathcal{A} \text{ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις/τομές και} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του } X\}.
\end{aligned}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $\bigcap \mathcal{F}_1 = \bigcap \mathcal{F}_2 = \bigcap \mathcal{F}_3 = \bigcap \mathcal{F}_4$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η τομή κάθε μίας από αυτές τις οικογένειες ικανοποιεί την αντίστοιχη ιδιότητα της οικογένειας, δηλαδή ισχύει $\bigcap \mathcal{F}_i \in \mathcal{F}_i$ για κάθε $i = 1, 2, 3, 4$.

Κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X που περιέχει τα ανοικτά σύνολα περιέχει επίσης και τα κλειστά. Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε κλειστό σύνολο είναι G_δ και ειδικότερα είναι αριθμήσιμη τομή στοιχείων της $\mathcal{A}$. Η $\mathcal{A}$ ως σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες τομές (Άσκηση 4.2.13).

Επομένως κάθε στοιχείο της $\mathcal{F}_1$ είναι και στοιχείο της $\mathcal{F}_2$. Αντίστροφα αν η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα κλειστά σύνολα, τότε περιέχει και τα ανοικτά, γιατί κάθε ανοικτό σύνολο είναι F_σ και άρα αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{A}$. Προκύπτει ότι $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ και άρα $\bigcap \mathcal{F}_1 = \bigcap \mathcal{F}_2$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο δείχνει κανείς ότι $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4$ και επομένως $\bigcap \mathcal{F}_3 = \bigcap \mathcal{F}_4$.

Απομένει να δείξουμε ότι $\bigcap \mathcal{F}_1 = \bigcap \mathcal{F}_3$. Από την Άσκηση 4.2.13 κάθε σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις και αριθμήσιμες τομές, άρα $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_3$ και επομένως $\bigcap \mathcal{F}_3 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_1 = \mathcal{B}|X$. Για την αντίστροφη συμπερίληψη θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A}_0 = \bigcap \mathcal{F}_3 \bigcap \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \mathcal{F}_3\}$$

και δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}_0$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά σύνολα. Από αυτό προκύπτει ότι $\mathcal{B}|X \subseteq \mathcal{A}_0$ και άρα

$$\bigcap \mathcal{F}_1 = \mathcal{B}|X \subseteq \mathcal{A}_0 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_3.$$

Αν το V είναι ανοικτό υποσύνολο του X τότε προφανώς ανήκει στην $\bigcap \mathcal{F}_3$. Επιπλέον το $C = X \setminus V$ είναι κλειστό σύνολο και άρα G_δ, δηλαδή αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων. Ειδικότερα το C είναι αριθμήσιμη τομή στοιχείων της $\bigcap \mathcal{F}_3$ και αφού $\bigcap \mathcal{F}_3 \in \mathcal{F}_3$ (ειδικότερα η $\bigcap \mathcal{F}_3$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές) έχουμε ότι $C = X \setminus V \in \bigcap \mathcal{F}_3$. Συνεπώς $V \in \mathcal{A}_0$.

Είναι σαφές ότι η $\mathcal{A}_0$ είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα και ότι τα σύνολα $\emptyset, X$ (ως ανοικτά) ανήκουν στην $\mathcal{A}_0$. Θεωρούμε μια ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{A}_0$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_0$.

Έχουμε $A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και εφόσον η τελευταία οικογένεια είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις έχουμε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$. Επιπλέον $X \setminus A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και εφόσον η τελευταία οικογένεια είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές έχουμε

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3.$$

Αφού $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$ και $X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{F}_3$ έχουμε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_0$. Καταλήγουμε ότι η $\mathcal{A}_0$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X.

Άσκηση 4.2.15. Για κάθε σύνολο $U \subseteq Y$ έχουμε

$$f^{-1}[U] = \left(f_1^{-1}[U] \cap B\right) \,\cup\, \left(f_2^{-1}[U] \cap (X \setminus B)\right).$$

Αν το U είναι ανοικτό τότε τα σύνολα $f_1^{-1}[U]$, $f_2^{-1}[U]$ είναι Borel υποσύνολα του X. Επιπλέον εφόσον το B είναι Borel και η $\mathcal{B}|X$ είναι σ-άλγεβρα έχουμε ότι τα σύνολα

$$X \setminus B, \quad f_1^{-1}[U] \cap B, \quad f_2^{-1}[U] \cap (X \setminus B),$$
$$\left(f_1^{-1}[U] \cap B\right) \,\cup\, \left(f_2^{-1}[U] \cap (X \setminus B)\right) = f^{-1}[U]$$

είναι Borel.

Άσκηση 4.2.16. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X, Y, Z και Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z.$$

Τότε για κάθε ανοικτό $U \subseteq Z$ το σύνολο $g^{-1}[U]$ είναι Borel υποσύνολο του Y και από την Πρόταση 4.2.2 η αντίστροφη εικόνα

$$f^{-1}[g^{-1}[U]] = (g \circ f)^{-1}[U]$$

είναι Borel υποσύνολο του X.

Άσκηση 4.2.17. Για κάθε $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ έχουμε

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} B_i \iff \forall n\, x_n \in B_n \iff \forall n\, \mathrm{pr}_n((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) \in B_n$$

όπου $\mathrm{pr}_n : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to X_n$ είναι η προβολή $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto x_n$, η οποία είναι προφανώς συνεχής.

Από την κλειστότητα της κλάσης των Borel συνόλων ως προς συνεχή αντικατάσταση και τον τελεστή $\forall^{\mathbb{N}}$ προκύπτει το ζητούμενο.

Η απόδειξη του ισχυρισμού για πεπερασμένα το πλήθος Borel σύνολα $B_0, \ldots, B_n$ είναι όμοια.

Άσκηση 4.2.18. Θεωρούμε τις προβολές

$$\mathrm{pr}_n : \prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i \to Y_n : (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto y_n$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ έτσι που για κάθε συνάρτηση

$$f : X \to \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n : f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

έχουμε $f_n = \mathrm{pr}_n \circ f$ για κάθε n.

Αν η f είναι Borel-μετρήσιμη τότε από την Άσκηση 4.2.16 κάθε σύνθεση $\mathrm{pr}_n \circ f = f_n$ είναι Borel-μετρήσιμη.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε ένα βασικό ανοικτό $W \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Εφόσον το U είναι ανοικτό, υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_i \subseteq Y_i$, $i = \ldots, n$ (για κάποιο $n \in \mathbb{N}$) ώστε

$$W = U_0 \times \cdots \times U_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \cdots \times \ldots.$$

Τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[W] &\iff (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in W \\ &\iff \forall k \leqslant n \; f_k(x) \in U_k \\ &\iff x \in \textstyle\bigcap_{k\leqslant n} f_k^{-1}[U_k]. \end{aligned}$$

Εφόσον κάθε f_k είναι Borel-μετρήσιμη το σύνολα $f_0^{-1}[U_0], \ldots, f_n^{-1}[U_n]$ είναι Borel. Προκύπτει από τα προηγούμενα ότι το $f^{-1}[W]$ είναι επίσης Borel.

Αν τώρα το W είναι τυχαίο ανοικτό υποσύνολο του $\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ τότε είναι αριθμήσιμη ένωση βασικών ανοικτών συνόλων W_i, $i \in \mathbb{N}$. Επομένως το σύνολο

$$f^{-1}[W] = f^{-1}[\textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}[W_i]$$

είναι Borel.

Η απόδειξη του ισχυρισμού για συναρτήσεις της μορφής $f = (f_0, \ldots, f_n)$ είναι όμοια.

Άσκηση 4.2.19. Αν οι $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι Borel-μετρήσιμες τότε από την Άσκηση 4.2.18 η συνάρτηση

$$H : X \to \mathbb{R}^2 : H(x) = (f(x), g(x))$$

είναι επίσης Borel-μετρήσιμη.

Επειδή η συνάρτηση της πρόσθεσης $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, πάλι από την Άσκηση 4.2.18 έχουμε ότι η σύνθεση

$$+ \circ H : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x),$$

δηλαδή η συνάρτηση $f + g$, είναι Borel-μετρήσιμη. Ο ισχυρισμός για τη μετρησιμότητα των υπόλοιπων συναρτήσεων αποδεικνύεται όμοια. Υπενθυμίζεται ότι

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

Κεφάλαιο 5

Άσκηση 5.1.6.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Άσκηση ??.

Κεφάλαιο ??

Άσκηση ??.

Κεφάλαιο ??

Άσκηση ??.

Κεφάλαιο ??

Άσκηση ??.

Βιβλιογραφία

[Kec95] Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, 1995.

[Kle43] S. C. Kleene, *Recursive predicates and quantifiers*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 41–73.

[Kre62] G. Kreisel, *The axiom of choice and the class of hyperarithmetic functions*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 65 = Indag. Math. **24** (1962), 307–319. MR 0140418

[Kur66] K. Kuratowski, *Topology. Vol. I*, Academic Press, New York-London; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1966, New edition, revised and augmented, Translated from the French by J. Jaworowski. MR 0217751

[Leb05] H. Lebesgue, *Sur les fonctions represéntables analytiquement*, Journal de Mathématiques 6^{e} serie **1** (1905), 139–216.

[LS18] N. Lusin and W. Sierpinski, *Sur quelques proprietés des ensembles (A)*, Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie Série A: Sciences Mathematiques (1918), 35–48.

[LS23] ______, *Sur un ensemble non measurable B*, Journal de Mathématiques 9 e serie **2** (1923), 53–72.

[Lus25a] N. Lusin, *Les proprietes des ensembles projectifs*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **180** (1925), 1817–1819.

[Lus25b] ______, *Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **180** (1925), 1572–1574.

[Lus25c] ______, *Sur un probléme de M. Emile Borel et les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue: les ensembles analytiques*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **180** (1925), 1318–1320.

[Lus72] Nicolas Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Chelsea Publishing Co., New York, 1972, Avec une note de W. Sierpiński, Preface de Henri Lebesgue, Réimpression de l'edition de 1930. MR 0392465

[Mos47] A. Mostowski, *On definable sets of positive integers*, Fund. Math. **34** (1947), 81–112. MR 21923

[Mos09] Y.N. Moschovakis, *Descriptive set theory, second edition*, Mathematical Surveys and Monographs., vol. 155, American Mathematical Society, 2009.

[Sie25] W. Sierpinski, *Sur une classe d'ensembles*, Fundamenta Mathematicae **7** (1925), 237–243.

[Sie28] ______, *Sur les produits des images continue des ensembles C(A)*, Fundamenta Mathematicae **11** (1928), 123–126.