$\vee, \&, c, \exists^{\mathcal{Y}}$

$$\exists^{\mathcal{Y}} \to \exists^{\mathcal{N}}, \quad \exists^{\mathcal{Y}} \to \exists^{\mathcal{N}}$$

$\exists^{\mathcal{N}} \Gamma =$ η κλάση όλων των $\exists^{\mathcal{N}} P$

$P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ και $P \in \Gamma$

Γ': κλάση συναρτήσεων

Γ: κλειστή ως προς Γ'-αντικατάσταση

$\forall f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ που ανήκει στη Γ'

$\forall Q \subseteq \mathcal{Y}$ που ανήκει στη Γ

το $f^{-1}[Q] \in \Gamma \restriction \mathcal{X}$.

Ισοδύναμα: το $P \subseteq \mathcal{X}$ με

$x \in P \leftrightarrow f(x) \in Q$

ανήκει στη Γ.

$\Gamma' =$ η κλάση των συνεχών συναρτήσεων

Γ'-αντικατάσταση σημαίνει

συνεχής αντικατάσταση

Συνήθως: $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$

$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \dots \times \mathcal{Y}_m$

Παρατήρηση: Έστω Γ κλάση που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.
Τότε για κάθε συνάρτηση

$$\tau : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots n\}$$

κάθε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$

και κάθε $Q \subseteq \mathcal{X}_{\tau(1)} \times \dots \times \mathcal{X}_{\tau(n)}$

που ανήκει στη Γ

το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ με

$$(x_1, \dots x_n) \in P \iff (x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) \in Q$$

ανήκει στη Γ.

Απόδειξη:

Θεωρούμε την $f : \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_{\tau(1)} \times \dots \times \mathcal{X}_{\tau(n)}$

$$f(x_1, \dots x_n) = (x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})$$

f: συνεχής

$$(x_1, \dots, x_n) \in P \iff f(x_1, \dots x_n) \in Q$$

$$P = f^{-1}[Q]$$

$$\left.\begin{array}{l} Q \text{ ανήκει στη } \Gamma \\ f : \text{ συνεχής} \\ \Gamma : \text{ κλειστή ως προς} \\ \quad \text{συνεχή αντ.} \end{array}\right\} \Rightarrow P = f^{-1}[Q] \text{ ανήκει στη } \Gamma$$

Παράδειγμα: Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ Πολωνικοί χώροι Γ κλάση που είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και $Q_1 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ και ανήκει στη Γ.

Τότε το σύνολο $P_1 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Y}$ με

$$(x, z, y) \in P_1 \iff (x, y, z) \in Q_1$$

ανήκει επίσης στη Γ.

$$\tau : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$$

$$\tau(1) = 1, \quad \tau(2) = 3, \quad \tau(3) = 2$$

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}, \quad \mathcal{X}_2 = \mathcal{Z}, \quad \mathcal{X}_3 = \mathcal{Y}$$

$$\mathcal{X}_{\tau(1)} \times \mathcal{X}_{\tau(2)} \times \mathcal{X}_{\tau(3)} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$$

$$\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 = \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Y}$$

Σχόλιο: Με παρόμοια επιχειρήματα μπορεί κανείς να δείξει ότι, εκτός από το να αναδιατάξουμε, μπορούμε επίσης να παραλείψουμε μεταβλητές όταν η Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.

Παράδειγμα: Έστω $Q_2 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$

και ορίζω $P_2 \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ με

$$(x, y, z) \in P_2 \iff (x, y) \in Q_2$$

Αν Q_2 ανήκει στη Γ τότε το P_2 ανήκει επίσης στη Γ. Γ: κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση

Θεωρούμε τη συνάρτηση προβολής

$f: X \times Y \times Z \to X \times Y$

$f(x, y, z) = (x, y)$.

f: συνεχής

$P_2 = f^{-1}[Q_2]$

Παράδειγμα – Υπενθύμιση

Η κλάση των ανοικτών συνόλων είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.

Επομένως αν $Q \subseteq X \times Y$ είναι ανοικτό, τότε το σύνολο $P \subseteq X \times Z \times Y$ με $(x, z, y) \in P \Leftrightarrow (x, y) \in Q$ είναι ανοικτό.

$V_{\mathbb{N}}$, $\exists^{\mathbb{N}}$:

(I) Έστω $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του $\mathcal{X}$.

Ορίζουμε $P \subseteq \mathcal{X}\times\mathbb{N}$

$$\boxed{(x,n)\in P \iff x\in P_n}$$

Τότε
$$\begin{aligned} x \in \exists^{\mathbb{N}} P &\iff \exists n \quad (x,n)\in P \\ &\iff \exists n \quad x\in P_n \\ &\iff x\in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \exists^{\mathbb{N}}P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$$

(II) Έστω $P\subseteq \mathcal{X}\times\mathbb{N}$, ορίζουμε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ το σύνολο $P_n\subseteq\mathcal{X}$ με

$$\boxed{x\in P_n \iff (x,n)\in P.}$$

Τότε
$$\begin{aligned} x\in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n &\iff \exists n \quad x\in P_n \\ &\iff \exists n \quad (x,n)\in P \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n = \exists^{\mathbb{N}} P$$

Δεν σημαίνει όμως ότι η κλειστότητα ως προς τον έναν τελεστή είναι κλειστότητα ως προς τον άλλο.

Έστω π.χ. ότι η Γ είναι κλειστή ως προς $\exists^{\mathbb{N}}$.

Έστω $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $P_n \subseteq \mathcal{X}$, P_n ανήκει στη Γ
$n\in\mathbb{N}$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n \in \Gamma \upharpoonright \mathcal{X} \quad ;$$

Ορίζουμε $P = \{(x,n)\in \mathcal{X}\times\mathbb{N} \mid x\in P_n\}$

έτσι που $\exists^{\mathbb{N}} P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

$$P \in \Gamma \upharpoonright (\mathcal{X}\times\mathbb{N}) \quad ;$$

$$P = \{(x_0,n_0)\} \in \Gamma \upharpoonright (\mathcal{X}\times\mathbb{N})$$

$$\exists^{\mathbb{N}} P = \{x_0\} \in \Gamma \upharpoonright \mathcal{X}$$

Στις κλάσεις που μελετάμε η κλειστότητα ως προς τον έναν τελεστή ισχύει ακριβώς όταν ισχύει η κλειστότητα ως προς τον άλλο τελεστή.

Εκτίμηση – υπολογισμοί με βάση τους τελεστές.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω Γ: κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και ως προς $\vee$.

Θεωρούμε $Q \in \Gamma \mid (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$

$R \in \Gamma \mid (\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})$

Ορίζουμε

$$P = \{(x,y,z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \mid (x,y) \in Q \text{ ή } (y,z) \in R\}.$$

Τότε το P ανήκει στη Γ.

<u>1ος τρόπος</u>

Ορίζουμε $Q^* = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in Q\}$

$R^* = \{(x,y,z) \mid (y,z) \in R\}$

$$Q^* = f_1^{-1}[Q], \quad R^* = f_2^{-1}[R]$$

$$f_1(x,y,z) = (x,y) \qquad f_2(x,y,z) = (y,z)$$

Q, R ανήκουν στη Γ, f_1, f_2: συνεχείς

$\Rightarrow$ Q^*, R^* ανήκουν στη Γ.

Τότε $P = Q^* \cup R^*$, δηλ. $P = Q^* \vee R^*$

$\Rightarrow \quad P \in \Gamma \mid (X \times Y \times Z)$ $\qquad P = Q \cup R$

$2^{ος}$ τρόπος:

Ορίζουμε Q^*, R^* με

$(x, y, z) \in Q^* \Leftrightarrow (x, y) \in Q \qquad Q^* \in \Gamma \mid X \times Y \times Z$

$(x, y, z) \in R^* \Leftrightarrow (y, z) \in R \qquad R^* \in \Gamma \mid X \times Y \times Z$

Βλέπουμε $(x, y, z) \in P \Leftrightarrow (x, y, z) \in Q^* \lor (x, y, z) \in R^*$

$\Rightarrow \quad P \in \Gamma \mid X \times Y \times Z$

Μάλιστα δεν θα αναφερόμαστε στα Q^*, R^*

Τότε: $(x, y, z) \in P \underset{\text{ορισμό}}{\Leftrightarrow} \underbrace{(x, y) \in Q}_{\in \Gamma} \lor \underbrace{(y, z) \in R}_{\in \Gamma}$

$\in \Gamma$

Άλλο παράδειγμα:

Έστω Γ: κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση και ως προς τους τελεστές $\vee$, $\forall^{\mathcal{N}}$, $\exists^{\mathcal{N}}$.
Έστω επίσης ότι η Γ περιέχει τα κλειστά σύνολα.

Θεωρούμε συνεχείς συναρτήσεις

$$f_n : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{X} \qquad\qquad n, m \in \mathbb{N}.$$
$$g_m : \mathcal{X} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ορίζουμε $P \subseteq \mathcal{X}$ με

$$x \in P \iff \forall n \, \exists^{\alpha \in \mathcal{N}} \alpha \, \forall m \, (x = f_n(\alpha) \vee g_m(x,\alpha) = 0)$$

Θεωρούμε τα σύνολα A, B, C με:

$$(x,\alpha,n) \in A \iff x = f_n(\alpha) \qquad f_n : \text{συνεχείς}, \ A : \text{κλειστό}$$
$$(x,\alpha,m) \in B \iff g_m(x,\alpha) = 0 \qquad B : \text{κλειστό}$$

A, B: ανήκουν στη Γ.

$$(x,\alpha,n) \in C \iff \forall m \, (x = f_n(\alpha) \vee g_m(x,\alpha) = 0)$$
$$\iff \forall m \, ((x,\alpha,n) \in A \vee (x,\alpha,m) \in B)$$

C ανήκει στη Γ λόγω κλειστότητας ως προς $\vee$, $\forall^{\mathbb{N}}$

$$(x,n) \in D \iff \exists \alpha\ (x,\alpha,n) \in G$$

$$\left(\iff \exists \alpha\ (x,n,\alpha) \in C^*\right)$$

Τότε D ανήκει στην $\exists^{\mathcal{N}} \Gamma \subseteq \Gamma$

$$P = \forall^{\mathcal{N}} D \in \Gamma \mid \chi$$

Μπορούμε να παραλείψουμε την αναφορά στα A, B, G, D.

$$x \in P \iff \forall n\ \exists \alpha\ \forall m\ (\underbrace{x = f_n(\alpha)}_{\in \Gamma} \vee \underbrace{g_m(x,\alpha) = 0}_{\in \Gamma})$$

$$\in \Gamma$$

$$\forall^{\mathcal{N}} \Gamma \subseteq \Gamma$$

$$\exists^{\mathcal{N}} \Gamma \subseteq \Gamma$$

$$\forall^{\mathcal{N}} \Gamma \subseteq \Gamma.$$