Περιγραφική Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Εαρινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

1η Εργασία

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Προθεσμία παράδοσης: Τετάρτη 14 Απριλίου.

Ορισμός 1. Ένα υποσύνολο V ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται **κλειστό-ανοικτό** αν είναι κλειστό και ανοικτό στον X. Ένας τοπολογικός χώρος X είναι **μηδενοδιάστατος** αν έχει μια βάση για την τοπολογία του που αποτελείται από κλειστά-ανοικτά σύνολα.

Σκοπός της εργασίας είναι να αποδειχθούν τα εξής:

Θεώρημα 2. *Ο Πολωνικός χώρος των άρρητων αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον χώρο του Baire $\mathcal{N}$.*

Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια του πιο κάτω αποτελέσματος. (Δείτε [Kec95, 7.7])

Θεώρημα 3 (Alexandrov - Uryshon)**.** *Ο χώρος του Baire $\mathcal{N}$ είναι -μέχρι τοπολογικού ισομορφισμού- ο μοναδικός Πολωνικός χώρος που είναι μηδενοδιάστατος και κάθε συμπαγές υποσύνολό του έχει κενό εσωτερικό.*

Δηλαδή: 1) Ο $\mathcal{N}$ είναι μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος που κάθε συμπαγές υποσύνολό του έχει κενό εσωτερικό και 2) για κάθε μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ που κάθε συμπαγές υποσύνολό του έχει κενό εσωτερικό υπάρχει τοπολογικός ισομορφισμός $f : \mathcal{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{X}$.

Τα βήματα που θα ακολουθήσετε - Υποδείξεις

(α΄) Για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ θεωρούμε το σύνολο
$$\mathcal{N}_u = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid u \sqsubseteq \alpha\}.$$
Τότε το $\mathcal{N}_u$ (εκτός από ανοικτό) είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

(β΄) Είναι το $\mathcal{N}_u$ συμπαγές σύνολο; (Βρείτε μια ακολουθία του που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.)

(γ΄) Συμπεράνετε το 1) του Θεωρήματος 3.

Στη συνέχεια δείχνουμε το 2) του Θεωρήματος 3. Έστω $\mathcal{X} \neq \varnothing$ ένας μηδενοδιάστατος Πολωνικός χώρος που κάθε συμπαγές υποσύνολό του έχει κενό εσωτερικό.

(δ΄) Θεωρούμε μια κατάλληλη μετρική d στο $\mathcal{X}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d \leq 1$ (γιατί;).

(ε΄) **Βασική Κατασκευή.** Με επαγωγή στο μήκος $|u|$ του $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ κατασκευάζουμε μια οικογένεια $(C_u)_{u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ με τις εξής ιδιότητες

$$C_\Lambda = \mathcal{X} \tag{1}$$
$$C_u \neq \varnothing \tag{2}$$
$$C_u : \text{κλειστό-ανοικτό υποσύνολο του } \mathcal{X} \tag{3}$$
$$C_u = \textstyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{u*(i)} \tag{4}$$
$$C_{u*(i)} \cap C_{u*(j)} = \varnothing \quad \text{για } i \neq j, \tag{5}$$
$$d - \text{διάμετρος}(C_u) \equiv \sup\{d(x,y) \mid x, y \in C_u\} \leq 2^{-|u|} \tag{6}$$

για κάθε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Αρχικό Βήμα: Για $|u| = 0$, δηλαδή για $u = \Lambda$ ορίζουμε $C_\Lambda = \mathcal{X}$. Τότε το C_Λ επαληθεύει τις πιο πάνω ιδιότητες (γιατί;).

Επαγωγικό Βήμα: Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ έχουμε ορίσει τα σύνολα C_u για κάθε u με $|u| < n$ και πως ικανοποιούνται οι πιο πάνω ιδιότητες. Θεωρούμε $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $|u| = n-1$. Θα ορίσουμε τα σύνολα $C_{u*(i)}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ώστε να ικανοποιούνται οι ζητούμενες ιδιότητες.

Παίρνουμε $r = 2^{-n}$. Τότε το σύνολο C_u δεν είναι συμπαγές (γιατί;).

Σημείωση: Ένα υποσύνολο C ενός μετρικού χώρου (Y, ρ) είναι **ολικά φραγμένο** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_1, \ldots, U_m$ με ρ-διάμετρο $< \varepsilon$ και $C \subseteq \bigcup_{k=1}^m U_k$. Όπως είναι γνωστό το C είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και ολικά φραγμένο.

Προκύπτει ότι το C_u δεν είναι ολικά φραγμένο στον $(\mathcal{X}, d)$. Επομένως υπάρχει $r' < r = 2^{-n}$ έτσι ώστε το C_u δεν καλύπτεται από οποιαδήποτε πεπερασμένη ένωση ανοικτών συνόλων διαμέτρου ίσης με r'.

Αφού το C_u είναι ανοικτό και ο $\mathcal{X}$ μηδενοδιάστατος έχουμε $C_u = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ όπου τα V_i είναι μη κενά και κλειστά-ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι διάμετρος$(V_i) < r'$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Ορίζουμε

$$U_0 = V_0$$
$$U_{i+1} = V_{i+1} \smallsetminus \bigcup_{k=0}^i U_k.$$

Τότε τα U_i είναι ξένα ανά δύο, κλειστά-ανοικτά σύνολα και $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i = C_u$.

Για άπειρα $i \in \mathbb{N}$ έχουμε $U_i \neq \varnothing$ (γιατί;). Απαλείφοντας τα i για τα οποία $U_i = \varnothing$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $U_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $C_{u*(i)} = U_i$.

(στ΄) **Ορισμός τοπολογικού ισομορφισμού.** Για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ η οικογένεια $(C_{\alpha|n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{X}$ των οποίων η d-διάμετρος συγκλίνει στο 0. Αφού ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης από ένα γνωστό θεώρημα του Cantor η τομή $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{\alpha|n}$ είναι μονοσύνολο.

Ορίζουμε $f : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ με

$$\{f(\alpha)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{\alpha|n}$$

(ζ΄) Η f είναι ένα-προς-ένα. (Υπενθυμίζουμε ότι $C_{u*(i)} \cap C_{u*(j)} = \varnothing$.)

(η΄) Η f είναι επί. (Υπενθυμίζουμε ότι $C_\Lambda = \mathcal{X}$ και $C_u = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{u*(j)}$.)

(θ΄) Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συνεχείς.

Αυτό αποδεικνύει το Θεώρημα 3. Τέλος αποδεικνύουμε το Θεώρημα 2.

(ι΄) Για κάθε ζεύγος ρητών αριθμών (p, q) ορίζουμε

$$I(p,q) = \{x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q} \mid p < x < q\} = (p,q) \cap (\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}).$$

Τότε τα $I(p,q)$ είναι κλειστά-ανοικτά (γιατί;) και αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$.

(ια΄) Είναι τα $I(p,q)$ συμπαγή;

(ιβ΄) Συμπεράνετε το Θεώρημα 2 με χρήση του Θεωρήματος 3.

Αναφορές

[Kec95] Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, 1995.