| | |
|---|---|
| ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΛΜΑ | ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ |
| Διδάσκοντες: Θ. Λιανέας, Ε. Μαρκάκης, Δ. Φωτάκης | |
| Εαρινό εξάμηνο 2022 | |
| 3η σειρά ασκήσεων | Προθεσμία παράδοσης: 7 Ιουλίου 2022 |

Πρόβλημα 1. (25 μονάδες) Θεωρείστε ένα (atomic ή non-atomic) selfish routing στιγμυότυπο και μια ροή επάνω στα μονοπάτια $f = \{f_p\}_{p \in P}$:

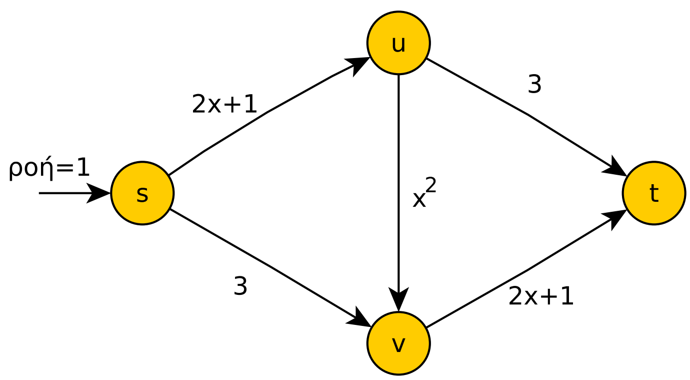
α) Αποδείξτε οτι αν η αντίστοιχη ροή στις ακμές είναι η $\{f_e\}_{e \in E}$, τότε ισχύει

$$\sum_{p \in P} f_p c_p(f) = \sum_{e \in E} f_e c_e(f_e)$$

(Υπενθύμιση: $f_e = \sum_{p: e \in p} f_p$, $c_p(f) = \sum_{e \in p} c_e(f_e)$)

β) Δείξτε οτι σε γενικά δίκτυα, την αντίστοιχη ροή στις ακμές $\{f_e\}_{e \in E}$ μπορούν να την προκαλέσουν πολλές διαφορετικές περιγραφόμενες από μονοπάτια ροές.

Πρόβλημα 2. (25 μονάδες) Έστω το παρακάτω non-atomic selfish routing στιγμυότυπο.




α) Βρείτε βέλτιστα διόδια για αυτό, δηλαδή διόδια που μετατρέπουν την βέλτιστη ροή του αρχικού δικτύο σε ροή ισορροπίας στο δίκτυο με τα διόδια.

β) Είναι τα διόδια που βρήκατε τα μοναδικά βέλτιστα διόδια?

γ)Δείξτε ότι σε $s$-$t$ δίκτυα, δηλαδή δίκτυα όπου όλοι οι παίκτες έχουν κοινή αφετηρία και τερματισμό, μπορούμε πάντα να βρίσκουμε βέλτιστα διόδια όπου ένα $s-t$ μονοπάτι να έχει μηδενικά διόδια καθόλο το μήκος του. (Ξεκινήστε από απλά δίκτυα, π.χ. δίκτυα παραλλήλων ακμών ή series-parallel δίκτυα)

Πρόβλημα 3. (25 μονάδες) Σε μια άλλη εκδοχή του selfish routing, για μια ροή $f$ και μονοπάτι $p$, το κόστος ενός παίκτη στο $p$ ισούται με $\max_{e \in p} \ell_e(f_e)$, ενω το κοινωνικό κόστος ισούται με $\max_{e \in E(G)} \ell_e(f_e)$. Για τα ακόλουθα ερωτήματα θεωρήστε ότι όλοι οι παίκτες έχουν κοινή αφετηρία και κονό τερματισμό.

α) Δείξτε ότι σε αυτή την εκδοχή, η βέλτιστη ροή είναι πάντα ισορροπία.

β) Δείξτε οτι το τίμημα της αναρχίας μπορεί να είναι $\Omega(|V(G)|)$.

γ) Μπορεί να υπάρξει παράδοξο του Braess σε αυτή την εκδοχή;

Πρόβλημα 4. (25 μονάδες) Υποθέστε οτι θέλουμε να λύσουμε το εξής stable matching πρόβλημα. Υπάρχουν $n$ μαθήματα και $q \cdot n$ φοιτητές. Κάθε μάθημα "χωράει" $q$ φοιτητές και ο καθηγητής του κάθε μαθήματος, ανάλογα με το υπόβαθρο των φοιτητών, τους κατατάσσει σε μια λίστα προτίμησης. Από την άλλη, κάθε φοιτητής έχει μια δική του λίστα προτίμησης για το κάθε μάθημα.

α) Τροποποιήστε τον Gale-Shapley αλγόριθμο ώστε αν προτείνουν οι φοιτητές στους καθηγητές, ο αλγόριθμος να επιστρέφει ένα stable matching (δικαιολογήστε).

β) Δείξτε εάν είναι proposer-optimal η λύση του αλγορίθμου σας.

γ) Συγκρίνετε αυτό το πρόβλημα με το τελευταίο πρόβλημα των διαφανειών (many-to-one extension).