ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΛΜΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ
Διδάσκοντες: Θ. Λιανέας, Ε. Μαρκάκης, Δ. Φωτάκης
Εαρινό εξάμηνο 2022

1η σειρά ασκήσεων **Προθεσμία παράδοσης: 29 Απριλίου 2022**

Πρόβλημα 1. (14 μονάδες) Έστω το εξής παίγνιο:

	W	X	Y	Z
A	15, 42	13, 40	9, 23	0, 23
B	2, 19	2, 14	5, 13	1, 0
C	20, 7	20, 5	11, 3	1, 2
D	20, 45	3, 11	3, 5	1, 2

Αποφασίστε αν ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις. Δικαιολογήστε την απάντησή σας σε κάθεμια από τις προτάσεις.

1. Η στρατηγική B κυριαρχείται αυστηρά από την A.
2. Η X κυριαρχεί αυστηρά την Y.
3. Η D κυριαρχεί ασθενώς την B.
4. Η Z κυριαρχείται ασθενώς από την W.
5. Δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική για τον παίκτη 1.
6. Η C είναι βέλτιστη απόκριση στην W.
7. Υπάρχει σημείο ισορροπίας με κοινωνικό όφελος κάτω του 30.

Πρόβλημα 2. (12 μονάδες) Δύο παίκτες θέλουν να μοιραστούν το ποσό των 100 ευρώ χρησιμοποιώντας την εξής διαδικασία: Οι 2 παίκτες ταυτόχρονα ανακοινώνουν έναν ακέραιο αριθμό στο διάστημα $\{0, 1, \ldots, 100\}$. Έστω a_1, a_2 οι αριθμοί που ανακοινώνονται από τον π. 1 και π. 2 αντίστοιχα. Στην συνέχεια οι ωφέλειες των παικτών καθορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

1. Αν $a_1 + a_2 \leq 100$, τότε ο π. 1 θα λάβει a_1 ευρώ και ο π. 2 a_2 (το υπόλοιπο ποσό δεν ανατίθεται σε κανένα).
2. Αν $a_1 + a_2 > 100$ και $a_1 > a_2$, τότε ο π. 1 θα λάβει $100 - a_2$ και ο π. 2 θα λάβει a_2.
3. Αν $a_1 + a_2 > 100$ και $a_1 < a_2$, τότε ο π. 1 θα λάβει a_1 και ο π. 2 θα λάβει $100 - a_1$.
4. Αν $a_1 + a_2 > 100$ και $a_1 = a_2$, τότε και οι 2 λαμβάνουν 50 ευρώ.

Να εκτελέσετε επαναλαμβανόνενη αφαίρεση ασθενώς κυριαρχούμενων στρατηγικών και να δείξετε ποια ή ποιες στρατηγικές επιβιώνουν ανεξαρτήτως της σειράς με την οποία αφαιρούμε τις στρατηγικές.

Πρόβλημα 3. (14 μονάδες)

(i) (8 μονάδες) Θεωρήστε το παρακάτω παίγνιο μηδενικού αθροίσματος

$$\begin{bmatrix} a & 10 \\ 8 & d \end{bmatrix}$$

Για τις παραμέτρους a, d, ισχύει ότι $0 \le a < 10$, και $d > 10$. Αποφανθείτε για το αν υπάρχει πάντα σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές. Αν δεν υπάρχει, βρείτε ένα τέτοιο παράδειγμα με συγκεκριμένες τιμές για τα a, d. Διαφορετικά, δείξτε ότι για κάθε $a \in [0, 10)$ και $d \in (10, \infty)$, θα πρέπει να υπάρχει σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές.

(ii) (6 μονάδες) Εξηγήστε ποια από τα παρακάτω παίγνια μηδενικού αθροίσματος έχουν σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές, χρησιμοποιώντας τις ποσότητες v_1 και v_2 που είδαμε στο μάθημα.

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 4. (24 μονάδες)

(i) (6 μονάδες) Δείξτε ότι σε ένα 2×2 παίγνιο, αν υπάρχουν 3 σημεία ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές, τότε υπάρχει άπειρο πλήθος από σημεία ισορροπίας με μεικτές στρατηγικές.

(ii) (6 μονάδες) Θεωρήστε το παρακάτω 2×2 παίγνιο. Βρείτε μια τιμή για το x έτσι ώστε το προφίλ (s_1, t_1) να είναι σημείο ισορροπίας (αν υπάρχουν πολλές επιλέξτε μια).

Για την τιμή του x που επιλέξατε, βρείτε αν υπάρχει ισορροπία με μεικτές στρατηγικές, όπου και οι 2 παίκτες παίζουν με θετική πιθανότητα και τις 2 αμιγείς στρατηγικές τους.

$$\begin{array}{ccc} & t_1 & t_2 \\ s_1 & x^2,\ x+1 & 2,\ x^2 \\ s_2 & x+1,\ 2 & x^2,\ 3 \end{array}$$

(iii) (12 μονάδες) Βρείτε όλα τα σημεία ισορροπίας με αμιγείς και με μεικτές στρατηγικές στο παρακάτω παίγνιο:

$$\begin{bmatrix} 0,0 & 5,2 & 3,4 & 6{,}5 \\ 2,6 & 3,5 & 5,3 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 5. (13 μονάδες) Έστω ότι 4 φοιτητικές παρατάξεις ανταγωνίζονται για να εκλεγεί ένας εκπρόσωπος φοιτητών. Ας υποθέσουμε ότι στην ψηφοφορία θα συμμετέχουν 50 φοιτητές. Κάθε φοιτητής καλείται να ψηφίσει μία παράταξη και επίσης κάθε φοιτητής έχει τις δικές του προτιμήσεις, οι οποίες εκφράζονται μέσω μιας ολικής διάταξης. Στον πίνακα 1 βλέπουμε τις προτιμήσεις όλων των φοιτητών, π.χ. οι φοιτητές 11 ως 20 προτιμούν να εκλεγεί εκπρόσωπος από την παράταξη Π_3, η δεύτερη προτίμηση τους είναι να εκλεγεί εκπρόσωπος από την Π_1, η τρίτη προτίμηση είναι η Π_2, και τελευταία προτίμηση είναι η Π_4. Κάθε φοιτητής μπορεί αν θέλει να ψηφίσει κάποια παράταξη που δεν είναι η πρώτη του προτίμηση, αν κρίνει οτι έτσι θα προκαλέσει μια καλύτερη έκβαση για αυτόν και θα αποκλείσει το να εκλεγεί κάποιος που είναι πιο κάτω στις προτιμήσεις του. Τέλος, θεωρούμε ότι σε περίπτωση ισοβαθμίας ευνοείται η παράταξη με τον χαμηλότερο δείκτη.

	Προτιμήσεις			
Φοιτ. 1-10	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
Φοιτ. 11-20	Π_3	Π_1	Π_2	Π_4
Φοιτ. 21-30	Π_1	Π_4	Π_3	Π_2
Φοιτ. 31-40	Π_2	Π_1	Π_3	Π_4
Φοιτ. 41-50	Π_3	Π_2	Π_4	Π_1

Πίνακας 1: Προτιμήσεις φοιτητών σε μορφή διάταξης.

(i) (3 μονάδες) Δείξτε έναν τρόπο αναπαράστασης της διαδικασίας αυτής ως παίγνιο κανονικής μορφής, περιγράφοντας τις διαθέσιμες στρατηγικές και χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις χρησιμότητας (υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι, και μπορείτε αν θέλετε να περιγράψετε με λόγια τις συναρτήσεις, αρκεί να είναι ξεκάθαρο από την περιγραφή σας τι τιμές παίρνουν σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού τους).

(ii) (4 μονάδες) Δείξτε ότι για κάθε $i \in \{1,2,3,4\}$, υπάρχει σημείο ισορροπίας του παιγνίου στο οποίο κερδίζει η παράταξη i.

(iii) (6 μονάδες) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ψηφοφόρων που πρέπει να μην ψηφίσει την πραγματική του προτίμηση σε σημείο ισορροπίας με νικητή την παράταξη Π_2;

Πρόβλημα 6. (10 μονάδες) Επιχειρηματολογήστε για το αν υπάρχει ή όχι πολυωνυμικός αλγόριθμος για πεπερασμένα παίγνια μηδενικού αθροίσματος 3 παικτών. Ένα παίγνιο με 3 παίκτες είναι μηδενικού αθροίσματος αν για οποιεσδήποτε στρατηγικές x, y, z των 3 παικτών ισχύει ότι: $u_1(x,y,z) + u_2(x,y,z) + u_3(x,y,z) = 0$.

Πρόβλημα 7. (13 μονάδες)

(i) (5 μονάδες) Θεωρήστε το προφίλ στρατηγικών $(p,q) = ((1/2,1/2),(1/2,1/2))$. Στο παρακάτω παίγνιο, βρείτε την καλύτερη τιμή $\epsilon \geq 0$ για την οποία το προφίλ αυτό είναι ϵ-σημείο ισορροπίας. Το ϵ θα το δώσετε ως συνάρτηση του δ, όπου το δ είναι μια σταθερά με $0 < \delta < 1/2$.

$$\begin{bmatrix} 1/2 - \delta, \delta & 0, 1/2 - \delta \\ \delta, 1/2 - \delta & 1/2 - \delta, \delta \end{bmatrix}$$

(ii) (8 μονάδες) Έστω ένα $n \times n$ παίγνιο 2 παικτών με πίνακες A, B, όπου όλες οι ωφέλειες είναι στο διάστημα $[0, 1]$. Θεωρήστε επίσης ότι σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη τόσο του πίνακα A όσο και του B, ο αριθμός των μη μηδενικών ωφελειών είναι το πολύ k (τα παίγνια αυτά ονομάζονται k-sparse). Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon \geq k/n$, το προφίλ μεικτών στρατηγικών (p, p), όπου p είναι η ομοιόμορφη στρατηγική $p = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ αποτελεί ε-σημείο ισορροπίας.