

# Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

---

**Βαγγέλης Μαρκάκης (ΟΠΑ)**

**Θανάσης Λιανέας (ΕΜΠ)**

**Δημήτρης Φωτάκης (ΕΜΠ)**

# Αντικείμενο - Προαπαιτούμενα

---

## □ Αντικείμενο:

- Βασικές τεχνικές και αποτελέσματα στην τομή των Αλγορίθμων και της Θεωρίας Παιγνίων.
- Αλγοριθμική οπτική γωνία σε προβλήματα (υπολογιστικής φύσης) της Θεωρίας Παιγνίων.
  - Π.χ., πολυπλοκότητα υπολογισμού ισορροπίας
- Solution concepts, ιδέες και τεχνικές για αλγοριθμικά προβλήματα με αλληλεπίδραση ιδιοτελών οντοτήτων
  - Π.χ., ιδιοτελής δρομολόγηση, ηλεκτρονική διαφήμιση.

## □ Προαπαιτούμενα:

- Μαθηματική και αλγοριθμική ωριμότητα.
- Διάθεση για μελέτη και εμπάθунση.

# Ατζέντα

---

- Βασικές έννοιες Θεωρίας Παιγνίων
  - Normal form games, 0-sum games, bimatrix και n-player games.
  - Solution concepts: dominant strategies, Nash equilibrium
- Ισορροπία Nash σε **2-person 0-sum** παίγνια:
  - (Πολύ) σύντομη εισαγωγή στο LP duality.
- Υπολογισμός **ισορροπίας Nash** σε **γενικά παίγνια**:
  - Brouwer's fixed point theorem και Sperner's lemma.
  - Total search problems και PPAD (και PLS).
  - Σκιαγράφηση γιατί υπολογισμός Nash ισορροπίας είναι PPAD-complete.
  - Αλγόριθμοι (προσέγγισης) για υπολογισμό ισορροπίας Nash.

# ΑΤΖΈΝΤΑ

---

- Σχεδιασμός Μηχανισμών:
  - Truthfulness, revelation principle
  - Single-item auctions, 1<sup>st</sup> price και 2<sup>nd</sup> price auctions
  - Social welfare optimization, single-parameter agents, monotone allocations, Myerson's characterization
  - Multi-parameter agents, VCG
- Υπολογιστικά αποδοτικοί φιλαλήθεις μηχανισμοί:
  - Combinatorial auctions
  - Online mechanisms and secretary problems
  - Procurement auctions
  - Combinatorial public projects.

# Ατζέντα

---

- Μεγιστοποίηση κέρδους στο Σχεδιασμό Μηχανισμών
  - Bayesian setting, virtual valuations και βέλτιστος μηχανισμός του Myerson
  - Μηχανισμοί που επιτυγχάνουν σχεδόν βέλτιστο κέρδος
- Εφαρμογές:
  - Ad-word auctions και Generalized Second Price (GSP)
  - Spectrum auctions και deferred acceptance auctions

# ΑΤΖΈΝΤΑ

---

- Ανταγωνιστική ανάθεση πόρων και **παίγνια συμφόρησης**:
  - Μη ατομικά παίγνια και ατομικά παίγνια συμφόρησης.
  - Ύπαρξη και πολυπλοκότητα (αμιγούς) ισορροπίας Nash, local search problems και η κλάση PLS.
  - Price of anarchy (τίμημα αναρχίας) και τεχνικές βελτίωσης (Braess paradox and network design, tolls, Stackelberg strategies).
  - Price of stability (τίμημα σταθερότητας)
  - Smoothness and price of anarchy in simple (non-truthful) auctions

# ΑΤΖΈΝΤΑ

---

- Κοινωνική επιλογή
  - Impossibility results: Arrow, Gibbard–Satterthwaite
  - Single-peaked preferences, Moulin's characterization and generalized medians, facility location
  - Voting and preference aggregation
  - Stable matchings, top trading cycles, kidney exchange
- Learning and games
  - No-regret dynamics, fictitious play
  - Correlated and coarse correlated equilibria
  - Convergence of no-regret dynamics to coarse correlated equilibrium.

# Βιβλιογραφία - Πληροφορίες

---

- Roughgarden. Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory.
  - Υλικό διαθέσιμο σε μορφή lecture notes και video διαλέξεων:  
<http://timroughgarden.org/f13/f13.html>
- Karlin and Perez. Game Theory, Alive.  
<https://homes.cs.washington.edu/~karlin/GameTheoryBook.pdf>
- Nisan, Roughgarden, Tardos, Vazirani. Algorithmic Game Theory, 2007.
- Πολλές ιστοσελίδες, μαθήματα, διαλέξεις, surveys, ...
- Σε πολλές περιπτώσεις θα ανατρέξουμε σε εξειδικευμένα surveys και ερευνητικές εργασίες.
- **Τρίτη: 15:15-18:00**, αίθουσα;
- <https://helios.ntua.gr/course/view.php?id=3643>



# Βιβλιογραφία - Πληροφορίες

---

- Βοηθός διδασκαλίας:
  - Άλκης Καλαβάσης
- Εξετάσεις – Εργασίες – Βαθμολογία:
  - 3 γραπτές εργασίες (3x10%)
    - Παιγνιοθεωρητικά μοντέλα, υπολογισμός ισορροπιών Nash, σχεδιασμός μηχανισμών
    - Σχεδιασμός μηχανισμών και εφαρμογές.
    - Παίγνια συμφόρησης, τίμημα αναρχίας, learning and games.
  - Γραπτή εξέταση (80%).

# Αναγκαιότητα για ΕΕ-CS

---

- Μεγάλα, πολύπλοκα, και δυναμικά μεταβαλλόμενα συστήματα αποτελούν τμήμα τεχνολογικής υποδομής.
- Δυσχερής η ιδέα μιας κεντρικής διαχειριστικής αρχής που εξασφαλίζει βέλτιστη λειτουργία.
  - Συνιστώσες ενεργούν αυτόνομα και ιδιοτελώς με κριτήριο τη βελτιστοποίηση ατομικών αντικειμενικών στόχων.
- Κλασσικά παραδείγματα:
  - Κυκλοφορία στις μεγάλες πόλεις και στο Internet.
  - Αγορές (χρηματιστήριο, real estate, ηλεκτρονική διαφήμιση).
  - Συνάθροιση προτιμήσεων.
  - Σχεδιασμός κινήτρων για επιθυμητή συμπεριφορά.

# Μονόδρομος 'Υποπτου

---



- Συλλαμβάνεται ύποπτος για μεγάλη ληστεία.  
Δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία!
  - Ομολογεί: 5 χρόνια φυλακή.
  - Δεν ομολογεί: 1 χρόνο φυλακή.
- Ο ύποπτος **δεν ομολογεί.**

# Δίλημμα Υπόπτων



- Συλλαμβάνονται **δύο** συνεργάτες για μεγάλη ληστεία.
  - Κρατούνται σε **χωριστά** κελιά χωρίς επικοινωνία.

	Ομολογεί B	Δεν ομολογεί B
Ομολογεί A	<b>5, 5</b>	<b>0, 15</b>
Δεν ομολογεί A	<b>15, 0</b>	<b>1, 1</b>

- Αμφότεροι οι ύποπτοι **ομολογούν!**

# Θεωρία Παιγνίων

---

- Προβλέπει συμπεριφορά **αυτόνομων** οντοτήτων που δρουν με στόχο βελτιστοποίηση **ατομικών στόχων**.
  - Εφαρμογή: όταν υπάρχουν **αντικρουόμενα συμφέροντα**.
  - **Υπόθεση**: ορθολογική και στρατηγική συμπεριφορά.
  - Πρόβλεψη: **σημεία ισορροπίας** (γεν. solution concepts).
- **Εργαλείο** για μελέτη «πολύπλοκων» συστημάτων.
  - Σημεία ισορροπίας και ιδιότητες τους.
  - Ορθολογική συμπεριφορά οδηγεί σε σημείο ισορροπίας.
- Περιοχή **εφαρμογής**:
  - Αποδοτικός (κατανεμημένος;) υπολογισμός σημείου ισορροπίας.
  - Αποδοτικότητα (σε σχέση με βέλτιστη διαμόρφωση).
- **Σχεδιασμός Μηχανισμών**:
  - Κανόνες ώστε να επιτύχουμε επιθυμητή συμπεριφορά / απόδοση.

# Ανταγωνιστικό Παίγνιο

---

- Σύνολο παικτών που ανταγωνίζονται (π.χ. για πόρους).
- Κάθε παίκτης αποφασίζει **μόνο τη δική του** στρατηγική.
  - Μοναδικός στόχος: **μεγιστοποίηση ατομικού κέρδους.**
  - Ατομικό κέρδος εξαρτάται από στρατηγικές **όλων.**
- **Ισορροπία Nash:** Κανένας **δεν μπορεί να βελτιώσει** ατομικό κέρδος αλλάζοντας μόνο τη δική του στρατηγική.
  - Nash (1952) απέδειξε ότι **πάντα** υπάρχει τέτοια ισορροπία (αλλά μπορεί να είναι πεπλεγμένη – mixed).
  - Ισορροπία Nash αποτελεί **«λύση» του συστήματος:**
    - Αν οι παίκτες συμπεριφερθούν **στρατηγικά και ορθολογικά** και έχουν στη διάθεσή τους **πλήρη γνώση και επαρκή χρόνο**, τότε καταλήγουν σε μία ισορροπία Nash.

# Ισορροπία Nash



	Ομολογεί B	Δεν ομολογεί B
Ομολογεί A	<b>5, 5</b>	<b>0, 15</b>
Δεν ομολογεί A	<b>15, 0</b>	<b>1, 1</b>

- Ισορροπία Nash **δεν βελτιστοποιεί** συνολικό αποτέλεσμα. Συμβιβασμός με δεδομένη την έλλειψη συντονισμού.

# Μάχη των Φύλλων

	Σινεμά	ΟΚ, μπάσκετ
ΟΚ, σινεμά	1, 5	0, 0
Μπάσκετ	0, 0	5, 1

- Μοντέλο για συντονισμό με αντικρουόμενες προτιμήσεις.
- Ισορροπία Nash: καθένας επιλέγει best response στη στρατηγική του αντιπάλου.
  - Αμιγής (ντετερμινιστική επιλογή στρατηγικών):  $(\Sigma, \Sigma), (M, M)$
  - Πεπλεγμένη (mixed):  $((1/6, 5/6), (5/6, 1/6))$
  - Αποδεικνύεται ότι #ισορροπιών Nash είναι περιττός.
- Σινεμά στο Rocky:  $((2, -1), (0, 0))$ . Τι συμβαίνει;



# Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

---

	Πέτρα	Ψαλίδι	Χαρτί
Πέτρα	<b>0, 0</b>	<b>1, -1</b>	<b>-1, 1</b>
Ψαλίδι	<b>-1, 1</b>	<b>0, 0</b>	<b>1, -1</b>
Χαρτί	<b>1, -1</b>	<b>-1, 1</b>	<b>0, 0</b>

- Μοναδική ισορροπία:  $((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3))$ .
- Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με 2 παίκτες.
  - von Neumann (1928): **υπάρχει πάντα** πεπλεγμένη ισορροπία.
  - Εύκολη απόδειξη μέσω LP duality.
- Nash (1952) **γενίκευσε** για παίγνια με μη-μηδενικό άθροισμα και πεπερασμένο πλήθος παικτών.

# Ενδιαφέροντα Παραδείγματα

---

- Το Δίλημμα του (Απελπισμένου) Ταξιδιώτη
  - 2 παίκτες, καθένας δηλώνει έναν αριθμό μεταξύ 2 και 100 (αξία χαμένης βαλίτσας).
  - Αν δηλώσουν το ίδιο  $x$ , εισπράττουν  $x$  ευρώ ο καθένας.
  - Διαφορετικά, έστω  $x < y$  οι δύο δηλώσεις. Αυτός που δήλωσε  $y$ , εισπράττει  $x - 2$ , ο άλλος εισπράττει  $x + 2$ .
- Μαντεύουμε τα  $2/3$  του μέσου όρου.
  - $n$  παίκτες, καθένας δηλώνει έναν αριθμό μεταξύ 0 και 100.
  - Κερδίζει 1000 ευρώ (μόνον) αυτός με αριθμό πλησιέστερα στο  $2(x_1 + \dots + x_n)/(3n)$ .

# Ισορροπία στην Πράξη

---

- Χρηματιστήριο:
  - Τιμές αγαθών και μετοχών (market equilibrium)
- Internet, δρόμοι:
  - Δρομολόγηση πακέτων, αυτοκινήτων.
- Κοινωνικά δίκτυα, WWW:
  - Δομή του δικτύου.
- Πως οι συμμετέχοντες υπολογίζουν ισορροπίες;
  - Απόδειξη Nash χρησιμοποιεί **Θ. Σταθερού Σημείου Brouwer**: όχι αποδοτική υπολογιστικά.
  - Μπορεί να υπάρχει αποδοτικός αλγόριθμος;
  - Αν όχι, πως / γιατί / κατά πόσο συστήματα **λειτουργούν σε συνθήκες ισορροπίας;**

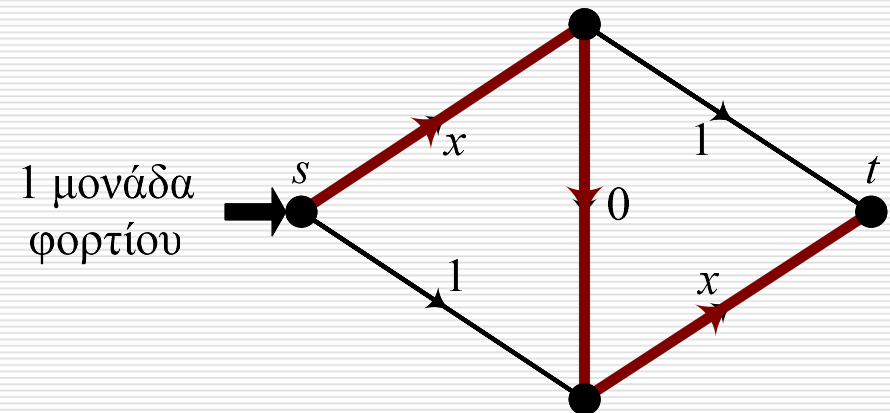
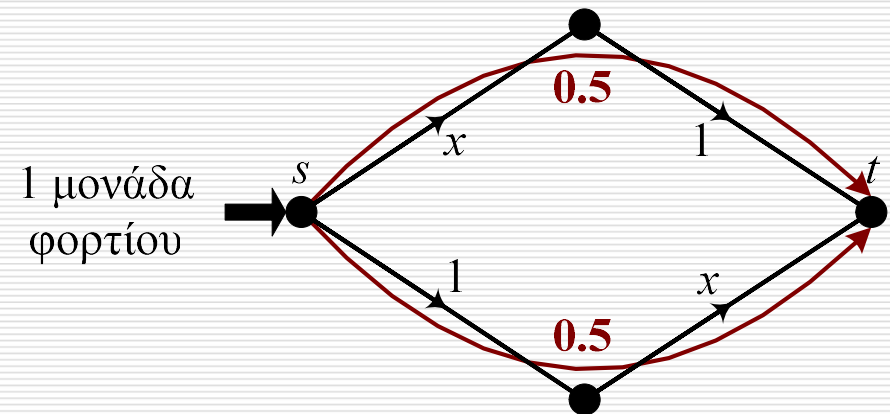
# Υπολογισμός Ισορροπιών

---

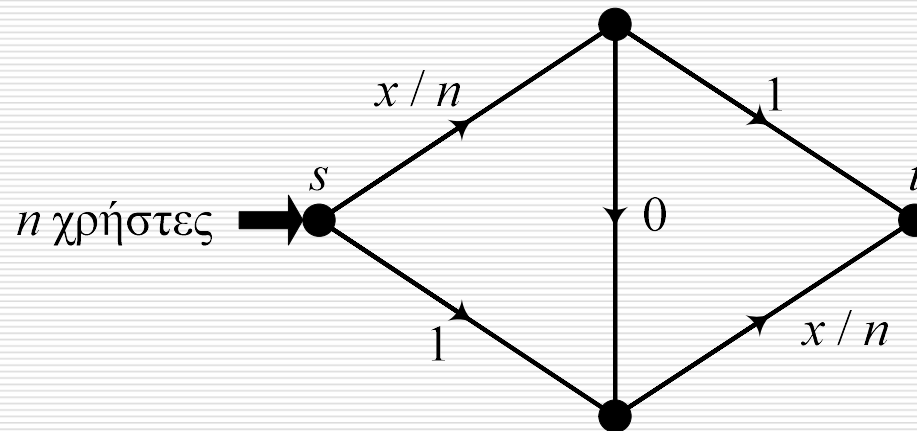
- Παίγνια με 2 παίκτες και **μηδενικό άθροισμα**:
  - **Αποδοτικός υπολογισμός** ισορροπίας Nash μέσω **LP duality**.
- Παίγνια με 2 παίκτες γενικής μορφής:
  - **Δεν** είναι γνωστός **αλγόριθμος πολυωνυμικού** χρόνου, παρά το σημαντικό ενδιαφέρον και μεγάλη προσπάθεια.
  - **Lemke-Howson** (simplex-like) αλγ. **δεν** είναι αποδοτικός.
  - Ισορροπία Nash **δεν** είναι **NP-complete** (εξ' ορισμού)!
  - Είναι όμως **PPAD-complete**, δηλ. τόσο **δύσκολη** όσο ο υπολογισμός του **σταθερού σημείου** του Brouwer (ή οποιουδήποτε αντίστοιχου προβλήματος).

# Τμήμα Αναρχίας – Παράδοξο Braess

- Συνολική καθυστέρηση **1.5**
  - Nash ισορροπία αποτελεί βέλτιστη λύση.
- Νέα **πολύ γρήγορη** σύνδεση.
- Συνολική καθυστέρηση **αυξάνεται σε 2** γιατί όλοι χρησιμοποιούν νέα σύνδεση.
- Τμήμα Αναρχίας: **4/3**
- Παραδοσιακός σχεδιασμός **δεν επαρκεί.**



# Ανταγωνιστική Ανάθεση Πόρων



- Μοντελοποίηση με (μη ατομική και ατομική) παίγνια συμφόρησης.
- Ανάλυση απόδοσης.
  - **Τμήμα Αναρχίας:** Υποβάθμιση λόγω αυτόνομης και ανταγωνιστικής συμπεριφοράς σε σχέση με βέλτιστη κεντροποιημένη διαχείριση.
- Κίνητρα για βελτίωση απόδοσης.
- Τεχνικές για βέλτιστο σχεδιασμό.

# Δημοπρασίες και Μηχανισμοί

---

- Ένα αντικείμενο σε δημοπρασία με  $n$  παίκτες.
  - Το αντικείμενο αξίζει  $v_j$  για παίκτη  $j$ .
- Όλοι υποβάλλουν (σφραγισμένες) προσφορές  $b_1, \dots, b_n$ .
- Αντικείμενο κατοχυρώνεται σε παίκτη  $k$  με μέγιστη προσφορά  $b_k$  αντί τιμής  $t$ .
  - Ωφέλεια κερδισμένου =  $v_k - t$ .
  - Ωφέλεια μη κερδισμένου =  $0$ .
- Επιλογή τιμής ώστε να είναι πάντα **best response**  $b_j = v_j$  (truthfulness);
  - Τιμή ίση με μέγιστη προσφορά.
    - Όχι, π.χ. 100, 5!
  - Τιμή ίση με δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά.