Stewart Shapiro

ΣΚΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών

Thinking about mathemat-
ics: The philosophy of mathe-
matics. ΣΚΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗ-
ΜΑΤΙΚΑ: Η ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗ-
ΜΑΤΙΚΩΝ *Thinking about mathematics:*
The philosophy *of mathema-*
tics. Σκέψεις *για τα Μαθη-*
ματικά: Η *Φιλοσοφία των*
Μαθηματικών *Thinking about*
mathematics: *The philosophy*
of mathema- *tics.* Σκέψεις
για τα Μα- θηματικά: Η
Φιλοσοφία των Μαθηματικών THINKING
ABOUT MATHEMATICS: THE PHILO-
SOPHY OF MATHEMATICS. Σκέ-
ψεις για τα Μαθηματικά: Η
Φιλοσοφία των Μαθηματικών

Μετάφραση

Κώστας Αθ. Δρόσος – Δημήτρης Σπανός

Επιστημονική Επιμέλεια

Κώστας Αθ. Δρόσος

Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών
Πάτρα 2006

2

ΜΙΑ ΠΟΙΚΙΛΙΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΟΥΜΕΝΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Ο ΣΚΟΠΟΣ αυτού του κεφαλαίου είναι να σκιαγραφήσει τα σημαντικά προβλήματα και κάποιες από τις σημαντικές θέσεις στο διερμηνευτικό εγχείρημα της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να απαντήσει η φιλοσοφία των μαθηματικών προκειμένου να απεικονίσει τη θέση των μαθηματικών στο ολικό διανοητικό εγχείρημα – στο πλοίο του Neurath; Ποια είδη απαντήσεων έχουν προταθεί;

2.1 Αναγκαιότητα και a priori Γνώση

Μια πρόχειρη έρευνα των επιστημών δείχνει ότι τα μαθηματικά εμπλέκονται σε πολλές από τις καλύτερες προσπάθειές μας να αποκτήσουμε γνώση. Έτσι, η φιλοσοφία των μαθηματικών είναι, κατά ένα μεγάλο μέρος, ένας κλάδος της επιστημολογίας – εκείνο το τμήμα της φιλοσοφίας που ασχολείται με τη γνωστική λειτουργία και τη γνώση. Όμως τα μαθηματικά τουλάχιστον φαίνεται να είναι διαφορετικά από άλλες επιστημικές προσπάθειες και, ιδιαίτερα, από άλλες πλευρές της προώθησης της επιστήμης. Οι βασικές μαθηματικές προτάσεις δεν φαίνεται να έχουν την ενδεχομενική φύση των επιστημονικών προτάσεων. Αν βασιζόμασταν στη διαίσθησή μας, θα μπορούσαν να υπάρχουν περισσότεροι από εννέα πλανήτες. Θα μπορούσαν να ήταν επτά, ή κανένας. Η βαρύτητα δεν είναι ανάγκη να υπακούει στο νόμο του αντιστρόφου του τετραγώνου, ακόμη και προσεγγιστικά. Σε αντίθεση οι μαθηματικές προτάσεις, όπως '$7 + 5 = 12$', προβάλλονται μερικές φορές ως παραδείγματα των *κατ' ανάγκη αληθειών*. Τα πράγματα δεν να είναι διαφορετικά.

Ο επιστήμονας εύκολα παραδέχεται ότι και οι πιο θεμελιώδεις θέσεις της επιστήμης μπορεί να είναι εσφαλμένες. Αυτή η μετριοπάθεια στηρίζεται σε από μια ιστορία επιστημονικών επαναστάσεων, κατά την οποία μακρόχρονες, βαθιά ριζωμένες πεποιθήσεις απορρίφθηκαν. Μπορεί κάποιος να διατηρήσει την ίδια μετριοπάθεια και για τα μαθηματικά; Μπορεί κάποιος να αμφισβητήσει ότι η Αρχή της Επαγωγής ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς; Μπορεί κάποιος να αμφισβητήσει ότι '$7 + 5 = 12$'; Υπήρξαν *μαθηματικές* επαναστάσεις που κατέληξαν στην απόρριψη των διαχρονικών βασικών μαθηματικών πεποιθήσεων; Αντίθετα, η μαθηματική μεθοδολογία δεν φαίνεται να είναι πιθανοτική με τον τρόπο με τον οποίο είναι η επιστήμη. Μπορεί έστω να αποδοθεί με συνοχή μια πιθανότητα για μια μαθηματική πρόταση; Τουλάχιστον, εκ πρώτης όψεως, η επιστημική βάση της Αρχής της Επαγωγής, ή η πρόταση «$7 + 5 = 12$», ή η απειρία των πρώτων αριθμών, είναι σταθερότερη και διαφορετικού είδους απ' ό,τι η Αρχή της Βαρύτητας. Σε αντίθεση με την επιστήμη, τα μαθηματικά προχωρούν μέσω της *απόδειξης*. Μια επιτυχής, σωστή απόδειξη εξαλείφει όλες τις λογικές αμφιβολίες, και όχι απλώς όλες τις εύλογες αμφιβολίες. Μια μαθηματική απόδειξη θα πρέπει να δείξει ότι οι προκείμενες προτάσεις λογικά συνεπάγονται το συμπέρασμα. Δεν είναι δυνατόν οι προκείμενες (οι υποθέσεις) να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

Εν πάση περιπτώσει, οι πιο πολλοί στοχαστές συμφωνούν ότι οι βασικές μαθηματικές προτάσεις απολαμβάνουν έναν υψηλό βαθμό βεβαιότητας. Πώς μπορούν να είναι λάθος; Πώς μπορούν να αμφισβητηθούν από οποιοδήποτε λογικό ον – όπως ο καθαρός σκεπτικιστής που ισχυρίζεται ότι τα πάντα θα πρέπει να αμφισβητούνται; Τα μαθηματικά φαίνονται ουσιώδη σε όλα τα είδη λογικής σκέψης. Εάν, ως μέρος ενός νοητικού φιλοσοφικού πειράματος, έχουμε αμφιβολίες για τα βασικά μαθηματικά, είναι τότε προφανές ότι θα μπορούμε να συνεχίσουμε να σκεφτόμαστε;

Η λατινική φράση 'a priori' σημαίνει κάτι σαν «πριν από την εμπειρία» ή «ανεξάρτητα από την εμπειρία». Είναι μια επιστημική έννοια. Μια πρόταση ορίζεται ως a priori γνωστή εάν η γνώση της δεν βασίζεται σε οποιαδήποτε «εμπειρική γνώση των γεγονότων της πραγματικότητας» Blackburn (1994, σελ. 21). Μπορεί κάποιος να έχει ανάγκη την εμπειρία προκειμένου να κατανοήσει τις έννοιες που εμπεριέχονται στην πρόταση, αλλά δε θα είχε ανάγκη καμία άλλη ειδική εμπειρία με τον κόσμο. Μια πρόταση είναι γνωστή a posteriori (εκ των υστέρων) ή *εμπειρικά* εάν δεν είναι a priori γνωστή. Δηλαδή, μια πρόταση είναι γνωστή a posteriori εάν η γνώση της βασίζεται στην εμπειρία του πως τελικά εκδιπλώνεται και κατανοείται ο κόσμος. Μια αληθής πρόταση είναι αυτή καθαυτή a priori εάν μπορεί να καταστεί γνωστή a priori, ενώ μια αληθής πρόταση είναι a posteriori εάν δεν μπορεί – εάν δηλαδή, η εμπειρία με τον κόσμο (πέραν αυτής που χρειάζεται για να συλλάβουμε τις έννοιες) είναι αναγκαία προκειμένου να γνωρίσουμε την πρόταση.

Τυπικά παραδείγματα των a posteriori προτάσεων είναι κατά προσέγγιση: «η γάτα είναι πάνω στο χαλάκι» και «η βαρύτητα υπακούει στο νόμο του αντιστρόφου του τετραγώνου». Όπως θα δούμε (Κεφ.4 §3 και Κεφ. 8§2), μερικοί φιλόσοφοι υποστηρίζουν ότι δεν υπάρχει a priori γνώση, αλλά για τους υπόλοιπους, τυπικές a priori προτάσεις περιλαμβάνουν τις «όλα τα κόκκινα αντικείμενα είναι χρωματισμένα» και «τίποτα δεν είναι εντελώς κόκκινο κατά προσέγγιση και απόλυτα παντού πράσινο ταυτόχρονα». Πιθανόν, τα πιο γνωστά παραδείγματα a priori προτάσεων είναι οι προτάσεις της λογικής και των μαθηματικών, στις οποίες θα εστιάσουμε την προσοχή μας. Τα μαθηματικά δεν φαίνεται να βασίζονται στην παρατήρηση όπως βασίζεται η επιστήμη. Για άλλη μιά φορά, τα μαθηματικά βασίζονται στην απόδειξη.

Επομένως, κάθε πλήρη φιλοσοφία των μαθηματικών έχει το χρέος να επεξηγήσει την τουλάχιστον προφανή αναγκαιότητα και το a priori των μαθηματικών. Η απλή εκδοχή, ίσως, θα ήταν να διατυπώσουμε ευκρινώς τις έννοιες της αναγκαιότητας και της a priori γνώσης, και κατόπιν να δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο αυτές εφαρμόζονται στα μαθηματικά. Ας ονομάσουμε αυτήν την πορεία 'κλασική πορεία'. Ακολουθεί το ρητό ότι τα πράγματα είναι αυτά που φαίνονται ό,τι είναι. Η δυσκολία στην παραδοσιακή πορεία είναι να δείξουμε ακριβώς τι είναι αυτό που κάνει κάτι να είναι αναγκαίο και a priori γνώσιμο. Στη παρούσα κατάσταση, κανένας δεν μπορεί δικαιολογημένα να ισχυριστεί ότι αυτές οι έννοιες είναι επαρκώς σαφείς και διακριτές. Εάν ο φιλόσοφος πρόκειται να επικαλεστεί τις διπλές έννοιες της αναγκαιότητας και του a priori (της γνώσης), τότε θα πρέπει να πει τι είναι αυτό του οποίου γίνεται επίκληση.

Υπάρχει μια σημαντική ένταση στην παραδοσιακή αυτή εικόνα. Σύμφωνα με αυτήν την άποψη, τα μαθηματικά είναι αναγκαία και a priori γνώσιμα, αλλά τα μαθηματικά έχουν κάποια σχέση με τον φυσικό κόσμο, *με κάποια σχέση*. Όπως επισημάνθηκε, τα μαθηματικά είναι ουσιώδη για την επιστημονική προσέγγιση του κόσμου, και αν κάτι είναι σίγουρα εμπειρικό, αυτή είναι η επιστήμη – παρόλο που υπάρχει και ο ρασιοναλισμός. Πώς, λοιπόν, η a priori γνώση των κατ' ανάγκη αληθειών περιλαμβάνεται στη συγκρότηση της εμπειρικής γνώσης; Η θέση του Immanuel Kant ότι η αριθμητική και η γεωμετρία είναι 'a priori συνθετικές' ήταν μια ηρωική προσπάθεια να εναρμονιστούν αυτά τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των μαθηματικών (βλ. Κεφ. 4, §4.2). Σύμφωνα με τον Kant, τα μαθηματικά σχετίζονται με τις μορφές της αντίληψης. Αφορούν τους τρόπους με τους οποίους αντιλαμβανόμαστε τον υλικό κόσμο. Η ευκλείδεια γεωμετρία ασχολείται με τις μορφές της χωρικής διαίσθησης,[1] και η αριθμητική με τις μορφές της χωρικής και της χρονικής διαίσθησης. Τα μαθηματικά είναι, λοιπόν, αναγκαία επειδή δεν μπορούμε να δομήσουμε τον κόσμο με κανένα άλλο τρόπο. *Πρέπει* να αντιληφθούμε τον κόσμο μέσα από αυτές τις μορφές της διαίσθησης. Καμία άλλη μορφή δεν είναι διαθέσιμη σ' εμάς. Η μαθηματική γνώση είναι a priori αφού δεν έχουμε ανάγκη καμίας ιδιαίτερης εμπειρίας από τον κόσμο προκειμένου να συλλάβουμε τις μορφές της αντιληπτικής διαίσθησης.

Είναι τετριμμένο να ισχυριστούμε ότι οι απόψεις του Kant ήταν, και παραμένουν σημαντικές, αλλά οι απόψεις του για τα μαθηματικά φαίνεται να είναι προβληματικές, σχεδόν από την αρχή. Ο Καντιανός μπορεί να είναι ένοχος γιατί ανταλλάσει με κάποια δύσκολα προβλημάτα και δυσνόητες έννοιες όπως είναι η a priori γνώση και η αναγκαιότητα (necessity) με κάποια ακόμα πιο δύσκολα προβλήματα που αφορούν στη διαίσθηση. Ο Alberto Coffa (1991) τονίζει ότι ένα σημαντικό θέμα στην ημερήσια διάταξη της δυτικής φιλοσοφίας σε όλη τη διάρκεια του 19$_{ου}$ αιώνα ήταν να επεξηγήσει την (τουλάχιστον) προφανή αναγκαιότητα και την a priori φύση των μαθηματικών, καθώς επίσης και τις εφαρμογές των μαθηματικών, χωρίς την επίκληση της Καντιανής διαίσθησης. Αυτό το θέμα παραμένει και σήμερα στην ημερήσια διάταξη.

Μια άλλη εκδοχή για τον φιλόσοφο είναι να υποστηρίξει ότι οι μαθηματικές αρχές δεν είναι αναγκαία αληθείς ή a priori γνώσιμες, ίσως επειδή δεν υπάρχουν προτάσεις που να απολαμβάνουν αυτές τις τιμές. Κάποιοι εμπειριστές βρίσκουν αυτήν τη μη κλασική εκδοχή ελκυστική, απορρίπτοντας ή αυστηρά περιορίζοντας την a priori γνώση. Σήμερα, αυτή η άποψη είναι πιο δημοφιλής από ποτέ, κυρίως στη Βόρεια Αμερική κάτω από την επίδραση του νατουραλισμού / εμπειρισμού του W. V. O. Quine (βλ. Κεφ. 2, §2.3 και Κεφ. 8, §8.3). Ένα από τα βάρη για τον φιλόσοφο ο οποίος προωθεί τη μη κλασική εκδοχή είναι να δείξει γιατί *φαίνεται* ότι τα μαθηματικά είναι αναγκαία και a priori. Δεν μπορεί απλώς να αγνοήσει τη μακρόχρονη πεποίθηση που αφορά

[1][Σ.τ.Ε.] Για την απόδοση του όρου 'intuition' χρησιμοποιούνται συνήθως οι ελληνικοί όροι 'διαίσθηση','ενόραση' και 'εποπτεία'. Η διαίσθηση είναι η ικανότητα κάποιου να αντιλαμβάνεται και να γνωρίζει κάτι μέσω των αισθήσεων αλλά με μη συνειδητό τρόπο. Κάτι δηλαδή σαν από ένστικτο, χωρίς τη διαμεσολάβηση της συνείδησης και του λογικού. Από την άλλη μεριά ο όρος 'εποπτεία' είναι με κάποια έννοια και σε κάποιο βαθμό συνειδητή αντίληψη μέσω των αισθήσεων. Έτσι πρέπει να απορριφθεί ως απόδοση του 'intuition'. Τέλος ο όρος 'ενόραση' αναφέρεται σ' ένα είδος 'εσωτερικής όρασης', που σχετίζεται με τη διαίσθηση. Είναι ίσως προτιμότερος για την απόδοση του όρου 'insight' αλλά αποδεκτός επίσης και για την απόδοση του όρου 'intuition'. Καταλήγει κανείς λοιπόν ότι ο όρος 'διαίσθηση' είναι ίσως ο πιο κατάλληλος για την απόδοση του 'intuition'. Ωστόσο η απόδοση 'ιντουισιονισμός' για τον όρο 'intuitionism' έχει πολιτογραφηθεί στα Ελληνικά και γι' αυτό είναι προτιμητέα ως σημασιολογικά περισσότερο ουδέτερη. Ο Ιντουισιονισμός στην εκδοχή Heyting μπορεί να είναι εξαιρετικά φορμαλιστικός, οπότε το 'ενορατισμός' ή το 'διαισθητισμός' δεν θα απέδιδαν την κατάσταση.

στο ειδικό αυτό καθεστώς των μαθηματικών. Δηλαδή, ακόμα κι αν οι κλασικές πεποιθήσεις είναι εσφαλμένες, πρέπει να υπάρχει κάτι στα μαθηματικά που οδήγησε τόσους πολλούς να στο πιστέψουν ότι είναι αναγκαία και a priori γνώσιμα.

2.2 Καθολικά Ζητήματα: Αντικείμενα και Αντικειμενικότητα

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο φιλόσοφος των μαθηματικών αντιμετωπίζει άμεσα ευρύτατα θέματα. Με τι ασχολούνται τα μαθηματικά, αν ασχολούνται με κάτι; Πώς προωθούνται τα μαθηματικά; Πώς γνωρίζουμε τα μαθηματικά; Ποια είναι η μεθοδολογία των μαθηματικών, και σε ποια έκταση αυτή η μεθοδολογία είναι αξιόπιστη; Τι σημαίνουν οι ισχυρισμοί των μαθηματικών; Έχουμε καθοριστικές και σαφείς εννοιολογικές αντιλήψεις των βασικών μαθηματικών εννοιών και ιδεών; Είναι η μαθηματική αλήθεια δίτιμη, υπό την έννοια ότι κάθε καλοσχηματισμένη και σαφής πρόταση είναι είτε οριστικά αληθής ή οριστικά ψευδής; Ποια είναι η κατάλληλη λογική για τα μαθηματικά; Μέχρι ποιό βαθμό οι αρχές των μαθηματικών είναι αντικειμενικές και αυθύπαρκτες, ανεξάρτητες από τη κοινή λογική, τη γλώσσα και το κοινωνικό στρώμα των μαθηματικών; Είναι κάθε μαθηματική αλήθεια γνώσιμη; Ποια είναι η σχέση μεταξύ των μαθηματικών και της επιστήμης που καθιστά δυνατή την εφαρμογή τους;

Κάποια από αυτά τα ερωτήματα, βεβαίως, δεν περιορίζονται στα μαθηματικά. Από την αρχή σχεδόν της καταγεγραμμένης ιστορίας, το βασικό μεταφυσικό πρόβλημα έγκειτο στο να καθοριστεί ποια είναι (εάν υπάρχει) η φυσική (κοινή) γλώσσα, ή η επιστημονική γλώσσα, και οι φιλόσοφοι πάντοτε διερωτώνταν εάν η κοινή αλήθεια είναι ανεξάρτητη από τον ανθρώπινο νου. Πρόσφατα, η σημαντική των λέξεων και η λογική στη καθημερινη ανθρώπινη συζήτηση, έχουν γίνει αντικείμενο σπουδαίας μελέτης στη φιλοσοφία... σημαντικής και λογικής για τον κοινό (φυσικό) λόγο κατέστησαν ένα σημαντικό θέμα στη φιλοσοφία, με τους φιλοσόφους να τολμούν να υπεισέρχονται στη γλωσσολογία. Όπως σημειώθηκε στο Κεφάλαιο 1, πρέπει να ακολουθήσουμε το παράδειγμα του ορθολογισμού και να είμαστε προσεκτικοί όταν επεκτείνουμε τα συμπεράσματα που αφορούν στα μαθηματικά και στην υπόλοιπη γλώσσα καθώς και στο υπόλοιπο διανοητικό εγχείρημα. Και το αντίστροφο: πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν επεκτείνουμε τα συμπεράσματα για τη φυσική γλώσσα και την επιστήμη στα μαθηματικά.

2.2.1 Το Αντικείμενο

Ένα γενικό θέμα αφορά στο περιεχόμενο των μαθηματικών. Η μαθηματική πραγματεία έχει ως σημεία αναφοράς συγκεκριμένα είδη αντικειμένων, όπως οι αριθμοί, τα σημεία, οι συναρτήσεις και τα σύνολα. Ας πάρουμε το αρχαίο θεώρημα ότι για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει ένας πρώτος αριθμός $m > n$. Προκύπτει, λοιπόν, ότι δεν υπάρχει μέγιστος πρώτος αριθμός, και επομένως υπάρχουν άπειροι στο πλήθος πρώτοι αριθμοί. Τουλάχιστον επιφανειακά, αυτό το θεώρημα φαίνεται να αφορά στους αριθμούς. *Τι* είναι αυτά τα αντικείμενα; Πρέπει να πάρουμε τη γλώσσα των μαθηματικών κατά λέξη και να συναγάγουμε το συμπέρασμα ότι υπάρχουν οι αριθμοί, τα σημεία, οι συναρτήσεις και τα σύνολα επειδή είναι ονόματα; Εάν πράγματι υπάρχουν, είναι ανεξάρτητα από τον μαθηματικό, τον νου του, τη γλώσσα του και τα λοιπά; Ο *ρεαλισμός στην οντολογία* είναι η άποψη ότι τουλάχιστον κάποια μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν αντικειμενικά, ανεξάρτητα από τον μαθηματικό (αυθύπαρκτα).

Ο ρεαλισμός στην οντολογία είναι αντίθετος προς τις απόψεις του ιδεαλισμού και του νομιναλισμού. Ο *ιδεαλιστής* συμφωνεί ότι τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν, αλλά ισχυρίζεται ότι αυτά εξαρτώνται από τον (ανθρώπινο) νου. Θα μπορούσε να προτείνει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι κατασκευάσματα που προκύπτουν από τη διανοητική δραστηριότητα του κάθενός μαθηματικού. Αυτό θα ήταν ένας υποκειμενικός ιδεαλισμός, ανάλογος με μια παρόμοια άποψη σχετικά με τα συνήθη φυσικά αντικείμενα. Για να κυριολεκτήσουμε, από αυτήν την προοπτική κάθε μαθηματικός έχει τους δικούς του φυσικούς αριθμούς, το δικό του ευκλείδειο επίπεδο, και τα λοιπά. Άλλοι ιδεαλιστές θεωρούν ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι τμήμα της διανοητικής διάρθρωσης που μοιράζονται όλα τα ανθρώπινα όντα. Ίσως τα μαθηματικά ασχολούνται με την πάντοτε παρούσα *δυνατότητα* της κατασκευής. Αυτό είναι ένας διυποκειμενικός ιδεαλισμός. Όλοι οι ιδεαλιστές συμφωνούν με το αντίθετο προς την εποπτική τεκμηρίωση (κόντρα στον υλισμό) ότι εάν δεν υπήρχε καθόλου ο ανθρώπινος νους, δεν θα υπήρχαν καθόλου μαθηματικά αντικείμενα. Οι οντολογικοί ρεαλιστές αρνούνται την αντιεποπτική τεκμηρίωση, επιμένοντας ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι ανεξάρτητα από τη νόηση του ανθρώπου.

Ο *νομιναλισμός* απορρίπτει πιο ριζοσπαστικά την αντικειμενική ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων. Η μία εκδοχή υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι απλώς γλωσσολογικές κατασκευές. Στον συνήθη λόγο διακρίνουμε ένα δοθέν στοιχείο, από την ονομασία αυτού του στοιχείου , όπως ο συγγραφέας αυτού του βιβλίου. Ο Stewart Shapiro δεν είναι ο ίδιος με τον 'Stewart Shapiro'. Το ένα είναι άτομο και το άλλο ένα ζεύγος λέξεων. Κάποιοι νομιναλιστές αρνούνται τη διάκριση που αφορά στα μαθηματικά αντι-

κείμενα, θεωρώντας ότ
αντίστοιχο ψηφίο '9' (ή
ενός πιο κλασικού νομι
ή 'καθολικές οντότητες
που ήταν δημοφιλής κα
είναι καθολικές οντότη
το οποίο είναι κόκκινο
σωστά (ως όνομα) σε α

Σήμερα είναι πιο σ
των μαθηματικών αντι
γλώσσα. Αυτός ο μαθη
(βλ. Κεφ. 9).

Μερικοί φιλόσοφοι
τα σύνολα είναι *ιδιότητ*
στηρίζονται σε μεταφυ
τους φιλοσόφους σύμφ
Για παράδειγμα, αν κα
ανεξάρτητα από τη γλώ
ιδιότητες – τότε θα τον
ρικά με τα μαθηματικά,
περιεχόμενο και αυτό τ
νόηση του μαθηματικού
είναι έννοιες και ότι οι
σχετικά με τα μαθηματ

[2] Υπάρχουν οντολογικ
τα ψηφία. Μερικοί φιλόσο
παρόμοια με αυτά που ένα
με αυτήν την έννοια, ονο
του αγγλικού όρου 'token
Λεξικού Κολαΐτη: 'token'
δειγματικό τεκμήριο'.] ψ
τόνερ, κ.λπ. – που αποτε
τύπους, τα ενδείγματα δη
νομιναλιστής μας ένας αντ
να αρνηθεί την αντικειμεν
φορές στη συνέχεια.

[3][Σ.τ.Ε.] Στον Μεσαίω
ολά αυτά ανάγονται στη δ
περί ιδεών Θεωρία του Π
που αντιστοιχούν σε καθο
'universals' αντίστοιχα. Θ
'γενική έννοια', 'γένος'.

κείμενα, θεωρώντας ότι ο αριθμός εννέα, για παράδειγμα, είναι ακριβώς το αντίστοιχο ψηφίο '9' (ή 'εννέα', 'IX', κ.λπ.).[2]. Αυτό αποτελεί μια παραλλαγή ενός πιο κλασικού νομιναλισμού που αφορά αυτά που ονομάζονται 'καθόλου' ή 'καθολικές οντότητες', [3] όπως τα χρώματα και τα σχήματα. Αυτή η άποψη που ήταν δημοφιλής κατά τον Μεσαίωνα, ισχυρίζεται ότι μόνον τα ονόματα είναι καθολικές οντότητες. Δεν υπάρχει τίποτα περισσότερο στο αντικείμενο το οποίο είναι κόκκινο από το να έχει τη λέξη 'κόκκινο' που εφαρμόζεται σωστά (ως όνομα) σε αυτό το αντικείμενο.

Σήμερα είναι πιο συνηθισμένο να αρνηθεί ένας σκεπτικιστής την ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων από το να τα κατασκευάσει μέσα από τη γλώσσα. Αυτός ο μαθηματικός μηδενισμός ονομάζεται επίσης 'νομιναλισμός' (βλ. Κεφ. 9).

Μερικοί φιλόσοφοι πιστεύουν ότι οι αριθμοί, τα σημεία, οι συναρτήσεις και τα σύνολα είναι *ιδιότητες ή έννοιες*, ξεχωρίζοντάς τα από τα αντικείμενα που στηρίζονται σε μεταφυσικές ή σημασιολογικές βάσεις. Θα κατέτασσα αυτούς τους φιλοσόφους σύμφωνα με το τι λένε για με τις ιδιότητες ή τις έννοιες. Για παράδειγμα, αν κάποιος φιλόσοφος πιστεύει ότι οι ιδιότητες υπάρχουν ανεξάρτητα από τη γλώσσα και τη νόηση – ένας ρεαλισμός που αφορά με τις ιδιότητες – τότε θα τον κατέτασσα ως έναν ρεαλιστή στην οντολογία αναφορικά με τα μαθηματικά, αφού πιστεύει ότι τα μαθηματικά έχουν ένα ξεχωριστό περιεχόμενο και αυτό το περιεχόμενο είναι ανεξάρτητο από τη γλώσσα και τη νόηση του μαθηματικού. Παρόμοια, αν ένας φιλόσοφος πιστεύει ότι οι αριθμοί είναι έννοιες και ότι οι έννοιες είναι νοητικές, τότε αυτός είναι ένας ιδεαλιστής σχετικά με τα μαθηματικά. Αν είναι δε ένας παραδοσιακός νομιναλισττής ανα-

[2] Υπάρχουν οντολογικά ζητήματα που αφορούν τέτοια γλωσσολογικά στοιχεία όπως τα ψηφία. Μερικοί φιλόσοφοι ισχυρίζονται ότι είναι αφηρημένα, αιώνια, μη αιτιώδη, πολύ παρόμοια με αυτά που ένας οντολογικός ρεαλιστής δέχεται για τους αριθμούς. Τα ψηφία, με αυτήν την έννοια, ονομάζονται *τύποι*. Αντίθετα, τα *ενδείγματα*[[Σ.τ.Ε.] Η απόδοση του αγγλικού όρου 'token' είναι αρκετά ιδιόμορφη. Αποδεχόμαστε εδώ την απόδοση του Λεξικού Κολαΐτη: 'token'∼'ένδειγμα'. Μια εναλλακτική απόδοση θα μπορούσε να είναι και 'δειγματικό τεκμήριο'.] ψηφίων είναι φυσικά αντικείμενα – κομμάτια μελάνης ή ψημένου τόνερ, κ.λπ. – που αποτελούν εξηγητικά παραδείγματα των τύπων. Αντίθετα πρός τους τύπους, τα ενδείγματα δημιουργούνται ή καταστρέφονται κατά βούληση. Για να είναι ο νομιναλιστής μας ένας αντιρεαλιστής στην οντολογία σχετικά με τα μαθηματικά, θα πρέπει να αρνηθεί την αντικειμενική ύπαρξη των τύπων. Αυτό το θέμα επαναλαμβάνεται αρκετές φορές στη συνέχεια.

[3][Σ.τ.Ε.] Στον Μεσαίωνα η σχολαστική φιλοσοφία είχε επικεντρωθεί στα 'universalia'. ολά αυτά ανάγονται στη διδασκαλία του Αριστοτέλη για τα 'καθόλου' και, πιο παλιά, στην περί ιδεών Θεωρία του Πλάτωνα. Το 'καθόλου' και 'τα καθόλου' (καθολικές οντότητες που αντιστοιχούν σε καθολικούς γλωσσικούς όρους) αποδίδουν τους όρους 'universal' και 'universals' αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιούμε επίσης και τις αποδόσεις 'καθολική οντότητα', 'γενική έννοια', 'γένος'.

φορικά με τις ιδιότητες ή τις έννοιες, τότε είναι ένας νομιναλιστής αναφορικά με τα μαθηματικά.

Ο ρεαλισμός στην οντολογία δεν έχει από μόνος του παρακλάδια που να αφορούν τη φύση των αξιωματικοποιημένων μαθηματικών αντικειμένων (ή ιδιοτήτων ή εννοιών), πέρα από την καθαρή θέση ότι υπάρχουν αντικειμενικά. Με τι μοιάζουν όμως οι αριθμοί; Πώς συνδέονται με τα πιο συγκεκριμένα αντικείμενα, όπως οι πέτρες ή οι άνθρωποι; Στους οντολογικούς ρεαλιστές, η πιο κοινή άποψη είναι ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι μη αιτιώδη, αιώνια, άφθαρτα και δεν είναι μέρος του χωροχρόνου. Και σύμφωνα με κάποια μόδα, η μαθηματική και η επιστημονική πρακτική το υποστηρίζει αυτό, από τη στιγμή που η ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων θα είναι αποδεκτή. Η επιστημονική βιβλιογραφία δεν περιέχει καμία αναφορά στη χωροχρονική θέση των αριθμών ή στην αιτιώδη δράση τους στα φυσικά φαινόμενα ή πώς μπορεί κανείς να δημιουργήσει ή να καταστρέψει έναν αριθμό. Δεν υπάρχει αναφορά σε πειράματα για τον εντοπισμό της παρουσίας των αριθμών ή τον προσδιορισμό των μαθηματικών τους ιδιοτήτων. Μια τέτοια συζήτηση θα ήταν ολοφάνερα παράλογη. Ο ρεαλισμός στην οντολογία μερικές φορές καλείται και 'Πλατωνισμός', διότι οι Πλατωνικές Μορφές είναι επίσης μη αιτιώδεις, αιώνιες, άφθαρτες και δεν είναι μέρος του χωροχρόνου (βλ. Κεφ. 3, §3.1).

Οι κοινές εκδοχές του ρεαλισμού στην οντολογία με προσεκτικό τρόπο λογοδοτούν για την *αναγκαιότητα* των μαθηματικών: Αν το περιεχόμενο των μαθηματικών είναι όπως λένε οι συγκεκριμένοι ρεαλιστές ότι είναι, τότε οι αλήθειες των μαθηματικών είναι ανεξάρτητες από οτιδήποτε εξαρτώμενο άμεσα ή έμμεσα από το φυσικό σύμπαν και οτιδήποτε άμεσα ή έμμεσα εξαρτώμενο από τον ανθρώπινο νού τη μαθηματική κοινότητα κ.τλ. Μέχρι εδώ, καλά.

Και έπειτα τι γίνεται με την a priori γνώση; Η σύνδεσή της με τον Πλάτωνα θα συνιστούσε την ύπαρξη μιας οιονεί μυστικιστικής (quasi-mystical) σύνδεσης μεταξύ των ανθρώπων και του αφηρημένου και ξεκομμένου βασιλείου των μαθηματικών. Αυτή η νοητική ικανότητα, που μερικές φορές καλείται 'μαθηματική διαίσθηση', οδηγεί, τάχα, στη γνώση των βασικών μαθηματικών προτάσεων, όπως τα αξιώματα διαφόρων θεωριών. Υπάρχει και το ανάλογο με την αισθητήρια αντίληψη, η οποία οδηγεί στη γνώση του εξωτερικού κόσμου. Ο Gödel (1964) φαίνεται ότι είχε κάτι τέτοιο στο μυαλό του όταν εισηγήθηκε ότι μερικές αρχές της θεωρίας Συνόλων «μας επιβάλλονται από μόνες τους ως αληθείς» (βλ. Κεφ. 8, §8.1). Επειδή, πιθανόν, η σύνδεση μεταξύ της νόησης και του μαθηματικού βασιλείου είναι ανεξάρτητη από κάθε αισθητή εμπειρία, ο ελιγμός προς μια οιονεί – μυστικιστική σύνδεση θα έκανε τη μαθηματική γνώση *κατεξοχήν* a priori. Παρ' όλο το κύρος του Gödel, οι πιο σύγχρονοι φιλόσοφοι απορρίπτουν αυτήν την κατά το μάλλον ή ήττον άμεση μαθηματική διαίσθηση. Τέτοιες ικανότητες της σκέψης είναι σχεδόν περιοβασισμένες στη νατουραλιστική θέση που θεωρεί τον άνθρωπο ως έναν υλικό οργανισμό στον φυσικό κόσμο (βλ. Κεφ. 1, §1.3). Σύμφωνα με τους Νατουραλιστές, οποιαδήποτε επιστημική ικανότητα επικαλείται από ο φιλόσοφος, πρέπει να γίνει αντικείμενο λεπτομερούς επιστημονικής εξέτασης. Δηλαδή ένας φιλόσοφος / επιστήμονας δεν μπορεί να επικαλεστεί μια άμεση σχέση μεταξύ της νόησης και του μαθηματικού σύμπαντος χωρίς να έχει πρώτα βρει μια φυσική, επιστημονική βάση γι' αυτό. Μια τέτοια βάση μοιάζει απίθανη αν οι αριθμοί, τα σημεία κ.τλ. είναι τόσο αιώνια και μη αιτιώδη όσο λένε οι τυπικοί ρεαλιστές ότι είναι. Πώς μπορεί κάποιος να θεμελιώσει έναν σύνδεσμο σε τέτοια αντικείμενα; Ίσως οι Πλατωνιστές να το παρατράβηξαν με αυτήν την σύνδεση νου και μαθηματικών μέσω της μαθηματικής διαίσθησης. Μερικές φορές ο 'πλατωνισμός' του ρεαλισμού στην οντολογία είναι γραμμένος με μικρό 'π' για να μετριάσει τη σχέση του με τον Πλάτωνα. Ο τυπικός ρεαλιστής στην οντολογία υπερασπίζεται κάτι σαν την Πλατωνική οντολογία για τα μαθηματικά χωρίς μια Πλατωνική επιστημολογία.

Με την απόρριψη της οιονεί – μυστικιστικής σύνδεσης, ο οντολογικός ρεαλιστής μένει με ένα βαθύ επιστημικό μυστήριο. Αν τα μαθηματικά αντικείμενα είναι μέρος ενός αποκομμένου, αιώνιου και χωρίς σκοπό μαθηματικού βασιλείου, πώς είναι δυνατόν για τους ανθρώπους να αποκτήσουν γνώση αυτών των αντικειμένων; Μοιάζει με ένα κομμάτι αναλλοίωτων στοιχείων που τουλάχιστον έχουμε κάποια μαθηματική γνώση, οτιδήποτε και αν είναι αυτή τελικά. Αν ο ρεαλισμός στην οντολογία είναι σωστός, η μαθηματική γνώση είναι γνώση ενός αφηρημένου, μη αιτιώδους, μαθηματικού βασιλείου; Πώς είναι αυτή η γνώση δυνατή; Πώς γίνεται να μην ξέρουμε τίποτα σχετικά με το υποτιθέμενο αποκομμένο μαθηματικό βασίλειο; Αν ο ρεαλιστής μας είναι και νατουραλιστής, η πρόκληση είναι να δείξουμε πώς μια φυσική ύπαρξη, σε ένα φυσικό σύμπαν, τυχαίνει να ξέρει κάτι γύρω από αφηρημένα αντικείμενα όπως οι αριθμοί, τα σημεία και τα σύνολα.

Ας επιστρέψουμε στους αντιρεαλιστές. Αν οι αριθμοί, για παράδειγμα, είναι δημιουργήματα της ανθρώπινης νόησης, ή αν είναι έμφυτοι στην ανθρώπινη σκέψη, όπως ισχυρίζονται οι ιδεαλιστές, τότε η μαθηματική γνώση είναι, κατά κάποια έννοια, γνώση της δικής μας νόησης. Τα μαθηματικά μπορεί να είναι a priori στο βαθμό που η προσωπική αυτή γνώση είναι ανεξάρτητη από την αισθητή εμπειρία. Ομοίως, οι μαθηματικές αλήθειες μπορεί να είναι αναγκαίες στο βαθμό που η δομή της ανθρώπινης σκέψης είναι αναγκαία. Σε απόψεις σαν και αυτή, το βαθύτερο πρόβλημα είναι η εναρμόνιση της θεμελιωμένης εικόνας των μαθηματικών αντικειμένων και της μαθηματικής γνώσης με το πλήρες βασίλειο των μαθηματικών όπως αυτό εφαρμόζεται στην πράξη. Υπάρχουν απείρως πολλοί φυσικοί αριθμοί και ακόμα περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί από ό,τι οι φυσικοί. Ο ιδεαλιστής πρέπει να εναρμονίσει τη γνώση που έχουμε για τους φυσικούς και τους πραγματικούς αριθμούς με τη φανερή περατότητα που έχει ο ανθρώπινος νους.

Αν τα μαθηματικά αντικείμενα είναι κατασκευασμένα από γλωσσολογικά υλικά, τότε η μαθηματική γνώση είναι γνώση της γλώσσας. Δεν είναι σίγουρο τι θα απογίνει με τη θέση ότι οι μαθηματικές αλήθειες είναι αναγκαίες και a priori γνώσιμες. Αυτό θα εξαρτόνταν από τις απόψεις των Νομιναλιστών πάνω στην γλώσσα. Η μαθηματική γνώση θα είναι a priori γνώσιμη στο βαθμό που η γνώση μας για τη γλώσσα είναι a priori. Πάλι και εδώ, το βασικό πρόβλημα είναι ο συμβιβασμός αυτής της άποψης με όλη την γκάμα των μαθηματικών. Τελικά, αν δεν υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα, όπως ισχυρίζονται μερικοί νομιναλιστές, τότε ο φιλόσοφος πρέπει να αναλύσει τις μαθηματικές προτάσεις σαν να μην έχουν σχέση με τα μαθηματικά αντικείμενα, αλλιώς ο νομιναλιστής θα πρέπει να θεωρήσει ότι οι μαθηματικές προτάσεις είναι συστηματικά ψευδείς (άρα μη αναγκαίες) ή ότι είναι κενές περιεχομένου. Ομοίως ο νομιναλιστής μας θα πρέπει να ερμηνεύσει τη μαθηματική γνώση με όρους διαφορετικούς από τη γνώση μαθηματικών αντικειμένων, ή αλλιώς να υποστηρίξει ότι δεν υπάρχει καθόλου μαθηματική γνώση (και επομένως όχι a priori μαθηματική γνώση).

2.2.2 Η Αλήθεια

Υπό το φως της ερμηνευτικής φύσης της φιλοσοφίας των μαθηματικών και της τάσης της αναλυτικής φιλοσοφίας γενικότερα, είναι φυσικό να στρέψουμε την προσοχή μας στη *γλώσσα* των μαθηματικών. Τι σημαίνουν οι μαθηματικοί ισχυρισμοί; Ποια είναι η λογική τους μορφή; Ποια είναι η καλύτερη σημασιολογία για τη μαθηματική γλώσσα; Ο Georg Kreisel συχνά χρεώνεται τη στροφή του ενδιαφεροντός από την ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων στην *αντικειμενικότητα* του μαθηματικού λόγου. Ας ορίσουμε τον *ρεαλισμό στην αληθοτιμή* ως την άποψη ότι οι μαθηματικές προτάσεις έχουν αντικειμενικές αληθοτιμές, ανεξάρτητες από τη νόηση, τη γλώσσα, τις συμβάσεις και τα παρόμοια των μαθηματικών.

Η αντίθετη άποψη είναι ο *αντιρεαλισμός στην αληθοτιμή* (anti-realism in truth-value). Η θέση ότι, ακόμη και αν υποθέσουμε ότι οι μαθηματικές προτάσεις έχουν πράγματι αληθοτιμές, τότε οι αληθοτιμές αυτές εξαρτώνται από τον μαθηματικό. Μια εκδοχή του αντιρεαλισμού των αληθοτιμών είναι ότι οι σαφείς μαθηματικές προτάσεις παίρνουν τις αληθοτιμές τους λόγω του ανθρώπινου νου ή λόγω της πραγματικής ή της δυνατής ανθρώπινης νοητικής δραστηριότητας. Κατ' αυτήν την άποψη, *φτιάχνουμε* κάποιες προτάσεις αληθείς ή ψευδείς, υπό την έννοια ότι η δομή του ανθρώπινου νου είναι κατά κάποιο τρόπο φτιαγμένη από τη μαθηματική αλήθεια. Η άποψη αυτή εδώ είναι ένας δήθεν ιδεαλισμός στην αληθοτιμή. Δεν έπεται ότι αποφασίζουμε πότε μία δοσμένη πρόταση είναι αληθής ή ψευδής, όπως ένας ιδεαλιστής υποστηρίζει ότι δεν αποφασίζουμε τι αντιλήψεις θα έχουμε για τα φυσικά αντικείμενα.

Μέρος του τι σημαίνει για τις μαθηματικές προτάσεις να είναι αντικειμενικές είναι και το ενδεχόμενο η αλήθεια κάποιων προτάσεων να είναι πέρα από την ικανότητα των ανθρώπων να γνωρίσουν αυτήν την αλήθεια. Δηλαδή ο ρεαλιστής στην αληθοτιμή επιδοκιμάζει το ενδεχόμενο ότι μπορεί να υπάρχουν μη γνώσιμες μαθηματικές αλήθειες. Σύμφωνα με αυτήν την άποψη, άλλο πράγμα είναι η αλήθεια και άλλο η γνωσιμότητα. Ο αντιρεαλιστής στην αληθοτιμή μπορεί να εκφράσει την αντίθετη άποψη, χρησιμοποιώντας το επιχείρημα ότι όλες οι μαθηματικές αλήθειες είναι γνώσιμες. Αν, υπό κάποια έννοια, οι μαθηματικές προτάσεις παίρνουν τις αληθοτιμές τους δυνάμει της νόησης, τότε θα ήταν εύλογο να ισχυριστούμε ότι καμία μαθηματική αλήθεια δεν είναι πέραν από την ανθρώπινη ικανότητα για γνώση: για κάθε μαθηματική πρόταση Φ, αν Φ είναι αληθής τότε κατ' αρχήν η Φ μπορεί να γίνει γνωστή.

Υπάρχει μια παρόμοια γραμμή μάχης και στο μέτωπο της σημασιολογίας. Οι ρεαλιστές στην αληθοτιμή ενδεχομένως πιστεύουν ότι η μαθηματική γλώσσα είναι *δίτιμης* λογικής, με την έννοια ότι κάθε σαφής πρόταση είναι χαρακτηρισμένη είτε ως αληθής ή ως ψευδής. Η διττότητα (bivalence) είναι αναπόσπαστο μέρος της αντικειμενικότητας (αρκεί η αοριστία ή η ασάφεια να μην υπεισέρχονται). Πολλοί αντιρεαλιστές αντιτίθενται στη διττότητα λέγοντας ότι η νόηση, ή και ο κόσμος, μπορεί να μην δύναται να καθορίζει, για κάθε ασαφή μαθηματική πρόταση, εάν είναι αληθής ή ψευδής. Αν, όπως προτείνεται παραπάνω, ο αντιρεαλιστής πιστεύει ότι όλες οι αλήθειες είναι γνώσιμες, τότε η μετριοφροσύνη θα συνηγορούσε εναντίον της διττότητας. Είναι αλαζονικό να πιστεύουμε ότι η ανθρώπινη νόηση είναι ικανή να προσδιορίζει κάθε σαφή μαθηματική πρόταση αν είναι αληθής ή ψευδής. Κάποιοι αντιρεαλιστές πιστεύουν ότι η άποψή τους συνεπάγεται ότι η κλασική λογική πρέπει να αντικατασταθεί από την ιντουσιονιστική λογική, η οποία ισοδυναμεί με μια φιλοσοφικά βασισμένη απαίτηση για αναθεωρήσεις στα μαθηματικά (βλ. Κεφ. 1, §1.2 και Κεφ. 7).

Μια δεύτερη, πιο ριζική έκδοση του αντιρεαλισμού στην αληθοτιμή είναι ότι οι μαθηματικοί ισχυρισμοί στερούνται αληθοτιμής εντελώς. Για να κυριολεκτήσουμε, αυτό θα είχε ως επακόλουθο ότι ούτε η μαθηματική γνώση υπάρχει, αρκεί να συμφωνούμε ότι η πρόταση 'Φ είναι γνωστή' συνεπάγεται ότι η 'Φ είναι αληθής'. Αν αυτός ο αντιρεαλιστής δεν επιθυμεί να προκαλέσει μαζική σύγχυση και σφάλμα σε όλη τη μαθηματική και επιστημονική κοινότητα, τότε χρειάζεται να μας εκθέσει τι εκλαμβάνει ως μαθηματική γνώση. Αν τα μαθηματικά δεν είναι μια δραστηριότητα συγκρότησης γνώσης, τότε τι είναι; Ενδεχομένως αυτός ο ριζοσπάστης αντιρεαλιστής στην αληθοτιμή να συμφωνεί ότι τα μαθηματικά είναι ένα σημαντικό και ζωτικής σημασίας κομμάτι του πνευματικού εγχειρήματος, και έτσι να χρειάζεται μια περιγραφή αυτής της σημαντικότητας. Αν τα καλά μαθηματικά δεν είναι αληθινά μαθηματικά (αφού οι προτάσεις δεν έχουν αντικειμενικές αληθοτιμές), τότε τι είναι τα καλά μαθηματικά;

Υπάρχει μια εκ πρώτης όψεως συμμαχία μεταξύ του ρεαλισμού στην αληθοτιμή και του ρεαλισμού στην οντολογία. Ο ρεαλισμός στην αληθοτιμή είναι μία προσπάθεια να υιοθετηθεί η άποψη ότι τα μαθηματικά ασχολούνται με τα αντικειμενικά χαρακτηριστικά του κόσμου. Ο ευθύς δρόμος για να ερμηνεύσουμε τη γλώσσα των μαθηματικών είναι να την πάρουμε κατά λέξη (at face value) και να μην επιλέξουμε να γίνει μια καθολική επανερμηνεία του μαθηματικού λόγου. Εκ πρώτης όψεως, οι αριθμοί είναι ενικοί (singular) όροι, κανονικά ονόματα. Η γλωσσολογική λειτουργία των ενικών όρων είναι να δηλώνουν αντικείμενα. Επομένως, αν η γλώσσα πρέπει να λαμβάνεται κυριολεκτικώς, τότε οι όροι της δηλώνουν κάτι. Τα νούμερα δηλώνουν αριθμούς. Αν οι μη τετριμμένες προτάσεις που περιέχουν νούμερα είναι αληθείς, τότε οι αριθμοί υπάρχουν. Ο ρεαλιστής της αληθοτιμής επιπλέον ισχυρίζεται ότι μερικές από τις προτάσεις είναι αντικειμενικά αληθείς – ανεξάρτητα από τον μαθηματικό. Η *οντολογική* θέση ότι οι αριθμοί υπάρχουν αντικειμενικά μπορεί να μην έπεται άμεσα από την θέση του ρεαλισμού (στην αληθοτιμή) για τη σημασιολογία. Μπορεί να υπάρχουν αντικειμενικές αλήθειες σχετικά με τις οντότητες που εξαρτώνται από το νού. Ωστόσο, η αντικειμενική ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων υποδηλώνεται τουλάχιστον από την αντικειμενική αλήθεια των μαθηματικών ισχυρισμών.

Αυτή η άποψη ανακεφαλαιώνει το ήμισυ ενός διλήμματος που τέθηκε στο άρθρο του Paul Benacerraf 'Mathematical Truth' το 1973, ένα άρθρο που συνεχίζει να κυριαρχεί στις σύγχρονες συζητήσεις για τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Μια ισχυρή απαίτηση είναι ότι οι μαθηματικές προτάσεις θα πρέπει να γίνονται κατανοητές όπως οι συνηθισμένες προτάσεις της καθομιλουμένης ή τουλάχιστον όπως αρκετές σεβαστές προτάσεις της φυσικής επιστήμης. Δηλαδή, θα πρέπει να προσπαθήσουμε για μιά ομοιόμορφη σημασιολογία, η οποία θα καλύπτει και τη φυσική/επιστημονική γλώσσα αλλά και τη μαθηματική γλώσσα. Αν υποθέσουμε ότι κάποιο είδος ρεαλισμού στην αληθοτιμή (realism in truth-value) ισχύει και για τις φυσικές επιστήμες, τότε οδηγούμαστε στον ρεαλισμό στην αληθοτιμή για τα μαθηματικά και σε μία προσπάθεια να κατανοήσουμε τους μαθηματικούς ισχυρισμούς κατά λέξη – με τον ίδιο τρόπο που γίνονται κατανοητοί και οι συνηθισμένοι επιστημονικοί ισχυρισμοί. Άλλο ένα κίνητρο για το απαίτηση πηγάζει από το γεγονός ότι η επιστημονική γλώσσα είναι ολοκληρωτικά συνυφασμένη με μαθηματική γλώσσα. Θα ήταν αδέξιο και αντιδιαισθητικό να ορίσουμε μια διαφορετική σημασιολογία για τη μαθηματική και για την επιστημονική γλώσσα, και επι πλέον άλλη εξήγηση για το πως αυτές οι δύο αλληλεπιδρούν.

Αυτό οδηγεί στους δύο γνωστούς μας ρεαλισμούς, στην οντολογία και στην αληθοτιμή. Σύμφωνα και με τις δύο αυτές απόψεις, οι μαθηματικοί εννοούν αυτό που λένε, και τα περισσότερα από αυτά που λένε είναι αληθινά. Σε πρόσφατη βιβλιογραφία για τη φιλοσοφία των Μαθηματικών, οι Gödel (1944, 1964), Penelope Maddy (1990), Michael Resnik (1997) και εγώ Shapiro (1997) είμαστε ολοκληρωτικά ρεαλιστές, κρατώντας τον ρεαλισμό μας και στην οντολογία αλλά και στην αληθοτιμή (βλ. Κεφ. 8 και 10).

Ας προσεγγίσουμε τώρα την άλλη πλευρά του διλήμματος του Benacerraf. Οι ρεαλισμοί μας συνοδεύονται από φαινομενικά δυσεπίλυτα επιστημολογικά προβλήματα. Από τον ρεαλισμό στην οντολογία, έχουμε την αντικειμενική ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων. Αφού τα μαθηματικά αντικείμενα δείχνουν να είναι αφηρημένα και έξω από την αιτιώδη συνάφεια, πώς μπορούμε να γνωρίζουμε οτιδήποτε σχετικά με αυτά; Πώς μπορούμε να έχουμε βεβαιότητα γι' αυτά που λένε οι μαθηματικοί για τα μαθηματικά αντικείμενα; Αυτό είναι ένα βασικό κίνητρο για να ψάξουμε μια εναλλακτική λύση του ενός ή του άλλου ρεαλισμού. Ο Benacerraf λέει ότι οι αντιρεαλιστικές φιλοσοφίες των μαθηματικών έχουν μια πιο ανιχνεύσιμη πορεία στην επιστημολογία, αλλά τότε το σημασιολογικό desideratum κινδυνεύει. Το δίλημμα τότε έχει ως εξής: η επιθυμητή συνένωση της μαθηματικής, της καθημερινής και της επιστημονικής γλώσσας υποδηλώνει τους δύο ρεαλισμούς, αλλά αυτό μας αφήνει με φαινομενικά δυσεπίλυτα επιστημικά προβλήματα. Θα πρέπει είτε να λύσουμε τα προβλήματα με ρεαλισμό, εγκαταλείποντας την ενιαία σημασιολογία μεταξύ του μαθηματικού και του φυσικού λόγου, ή να παρατήσουμε τις επικρατούσες σημασιολογικές εξηγήσεις της καθημερινής (φυσικής) και της επιστημονικής γλώσσας.

Υπάρχει και μια άλλη στενή συμμαχία μεταξύ αυτού που καλώ ιδεαλισμό στην οντολογία και του ιδεαλισμού στην αληθοτιμή. Ο πρώτος ισχυρίζεται ότι, για παράδειγμα, οι αριθμοί εξαρτώνται από την ανθρώπινη νόηση. Αυτό υποδηλώνει τουλάχιστον ότι και η μαθηματική αλήθεια εξαρτάται επίσης από το νου. Το ίδιο ισχύει και για άλλα είδη αντι-ρεαλισμών. Οτιδήποτε πει κάποιος σχετικά με τους αριθμούς υποδηλώνει τουλάχιστον κάτι παρόμοιο και για τη μαθηματική αλήθεια. Στη σύγχρονη σκηνή, οι Hartry Field (1980), Michael Dummett (1973, 1977), και οι κλασικοί ιντουισιονιστές L. E. J. Brouwer και Arend Heyting είναι ολοκληρωτικά αντιρεαλιστές σε θέματα που αφορούν την οντολογία και την αληθοτιμή. Ο Field πιστεύει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα δεν υπάρχουν και ότι οι μαθηματικές προτάσεις έχουν μόνο κενές (άνευ νοήματος) αληθοτιμές (βλ. Κεφ. 9, §9.1). Οι κλασικοί ιντουισιονιστές είναι μαθηματικοί ιδεαλιστές (βλ. Κεφ. 7, §7.2).

Παρά τις φυσικές συμμαχίες, μια ανασκόπηση στη βιβλιογραφία δεν αποκαλύπτει κοινή συναίνεση σε καμιά λογική σύνδεση μεταξύ των δύο θέσεων των ρεαλιστών ή των αρνήσεών τους. Ίσως το δίλημμα του Benacerraf να οδήγησε κάποιους σε διαφορετικές προσεγγίσεις. Καθεμία από αυτές τις θέσεις των ρεαλιστών και των ιδεαλιστών έχουν διαρθρωθεί και έχουν τύχει υπεράσπισης από καταξιωμένους και με επιρροή φιλοσόφους των μαθηματικών.

Ένα σχετικά κοινό πρόγραμμα, που επιδιώκεται σήμερα από τους Charles Chihara (1990) και Geoffrey Hellman (1989), είναι ο ρεαλισμός στην αληθοτιμή συνδυασμένος με έναν ολοκληρωτικό (νομιναλιστικό) αντιρεαλισμό στην οντολογία (βλ. Κεφ. 9, §9.2 και Κεφ. 10, §10.3). Ο σκοπός εδώ είναι να λογοδοτήσουμε για την αντικειμενικότητα του μαθηματικού λόγου χωρίς να θέσουμε ως αξίωμα μία συγκεκριμένη μαθηματική οντολογία. Οι αριθμοί δεν υπάρχουν (ή μπορεί να μην υπάρχουν), αλλά κάποιες από τις προτάσεις της αριθμητικής είναι αντικειμενικά αληθείς. Φυσικά αυτές οι απόψεις έχουν την απαίτηση να μη γίνονται οι συνηθισμένες μαθηματικές προτάσεις κατανοητές κυριολεκτικά – κατά λέξη. Οι υπερασπιστές αυτής της προοπτικής προτείνουν εναλλακτικές ερμηνείες του μαθηματικού λόγου και έπειτα πιστεύουν ότι, έτσι ερμηνευόμενες, οι μαθηματικές προτάσεις είναι αντικειμενικά αληθείς ή αντικειμενικά ψευδείς. Ξέρω μόνο ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός ρεαλιστή στην οντολογία ο οποίος είναι αντιρεαλιστής στην αληθοτιμή, τον Neil Tennant (1987, 1997, 1997a). Ο Tennant συμφωνεί με τον Frege ότι κάποια μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν αντικειμενικά (ως αποτέλεσμα της αναγκαιότητας), αλλά συντάσσεται με τον Dummett ως ένας *καθολικός* αντιρεαλιστής στην αληθοτιμή, πιστεύοντας ότι όλες οι αλήθειες, και όχι μόνο οι μαθηματικές αλήθειες, είναι γνώσιμες.

Οι υποστηρικτές αυτών των 'μεικτών' απόψεων συλλαμβάνουν την πρώτη όψη του διλήμματος του Benacerraf, εφόσον οι απόψεις τους συνεπάγονται ότι ο μαθηματικός λόγος δεν έχει την ίδια σημασιολογία που έχει ο φυσικός και ο επιστημονικός λόγος (υποθέτοντας ένα είδος ρεαλισμού για τον τελευταίο). Φυσικά δεν αρνείται κανείς τις εκτεταμένες διασυνδέσεις μεταξύ αυτών των λόγων. Ο Hellman, για παράδειγμα, δείχνει πως ο μαθηματικός λόγος, κατάλληλα επανερμηνευόμενος, ταιριάζει ομαλά με τον επιστημονικό λόγο, ενώ ο Tennant (1997) ισχυρίζεται ότι οι δύο αυτοί λόγοι είναι συμπληρωματικοί σε σημαντικά πράγματα.

Το Μαθηματικό και το Φυσικό

Οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα μαθηματικά και στη φυσική επιστήμη είναι εκτεταμένες, ξεπερνώντας αυτούς τους λίγους κλάδους, οι οποίοι μερικές φορές ονομάζονται εφαρμοσμένα μαθηματικά. Οι πλούσιοι και οι διάφοροι τρόποι οι οποίοι συνδέουν τα μαθηματικά με την επιστήμη οδηγούν και στις δύο κατευθύνσεις. Όπως το έθεσε και ο Nicolas Goodman (1979, σελ. 550): «οι περισσότεροι κλάδοι των μαθηματικών εξετάζουν/διαφωτίζουν σχετικά με κάποιο μέρος της φύσης. Η γεωμετρία αφορά στο χώρο. Η θεωρία των πιθανοτήτων μας διδάσκει για τις τυχαίες διαδικασίες. Η θεωρία ομάδων ρίχνει φως στη συμμετρία. Η λογική περιγράφει τον ορθό συμπερασμό. Πολλά θεωρήματα της ανάλυσης είχαν δημιουργηθεί για να μελετήσουν συγκεκριμένες διαδικασίες και είναι ακόμη απαραίτητα για την μελέτη αυτών των διαδικασιών ... Είναι μια πραγματικότητα ότι τα καλύτερά μας θεωρήματα δίνουν πληροφορίες για τον συγκεκριμένο κόσμο». (Βλ. Polya 1954, 1977, για μια σωρεία παραδειγμάτων).

Αλλά όλα αυτά συνεπάγονται ότι ένα κεντρικό θέμα για τη φιλοσοφία των μαθηματικών είναι να κατανοηθεί η σχέση ανάμεσα στα μαθηματικά και στους υπόλοιπους επιστημονικούς και περισσότερο συνηθισμένους κλάδους. Έχοντας δεδομένο τις εκτεταμένες αλληλεπιδράσεις αυτών των κλάδων, ο φιλόσοφος θα πρέπει να ξεκινήσει τουλάχιστον με την υπόθεση ότι υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στο περιεχόμενο των μαθηματικών (οτιδήποτε είναι αυτό) και στο περιεχόμενο της επιστήμης (ό,τιδήποτε είναι κι αυτό), και ότι δεν είναι τυχαίο ότι τα μαθηματικά εφαρμόζονται στην υλική πραγματικότητα. Οποιαδήποτε φιλοσοφία των μαθηματικών ή των φυσικών επιστημών που δεν λαμβάνει υπόψη της αυτήν τη σχέση είναι στην καλύτερη περίπτωση μη πλήρης. Τα προβλήματα που σχετίζονται με τις εφαρμογές των μαθηματικών έχουν γίνει πιο επείγοντα στις πρόσφατες δεκαετίες.

Ένα ανέκδοτο το οποίο έχω διηγηθεί και παλιότερα (Shapiro 1983a, 1997, Κεφ. 8) επεξηγεί μερικά από τα παραπάνω θέματα. Η ιστορία βασίζεται στην αναξιόπιστη ανάμνηση παραπάνω του ενός ατόμων, αλλά η περίπτωση είναι χαρακτηριστική. Ένας φίλος μού είπε κάποτε ότι κατά τη διάρκεια ενός πειράματος σ' ένα εργαστήριο φυσικής παρατήρησε ένα φαινόμενο το οποίο τον προβλημάτισε. Η τάξη κοιτούσε σε έναν παλμογράφο, και ένα παράξενο σχήμα σχηματιζόταν συνεχώς στην άκρη της οθόνης. Παρόλο που δεν είχε καμία σχέση με το μάθημα εκείνης της ημέρας, ο φίλος μου ζήτησε από την τάξη κάποια εξήγηση. Ο υπεύθυνος του εργαστηρίου έγραψε κάτι στον πίνακα (πιθανόν μια διαφορική εξίσωση) και είπε ότι το περίεργο σχήμα εμφανίζεται γιατί μία συνάρτηση η οποία λύνει την εξίσωση είναι μηδενική σε μία συγκεκριμένη τιμή. Ο φίλος μου είπε ότι προβληματίστηκε ακόμα περισσότερο από το γεγονός ότι η εμφάνιση μιας μηδενικής τιμής σε μία συνάρτηση έπρεπε να ληφθή ως μία εξήγηση ενός φυσικού γεγονότος, αλλά δεν ήθελε να ασχοληθεί με το θέμα περισσότερο εκείνη τη στιγμή.

Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι μεγάλο μέρος από τη θεωρητική αλλά και την πρακτική δουλειά στη φυσική επιστήμη αποτελείται από την κατασκευή ή την ανακάλυψη μαθηματικών μοντέλων για τα φυσικά φαινόμενα. Πολλά από τα επιστημονικά προβλήματα και τα προβλήματα μηχανολογίας μπορεί να είναι έργο εύρεσης μίας διαφορικής εξίσωσης, μίας φόρμουλας ή μίας συνάρτησης που να σχετίζεται με μία κλάση φαινομένων. Μια επιστημονική 'ερμηνεία' ενός φυσικού γεγονότος συχνά δεν ισοδυναμεί με τίποτα περισσότερο από μια μαθηματική περιγραφή του, αλλά τι μπορεί να σημαίνει αυτό; Τι είναι η μαθηματική περιγραφή ενός φυσικού γεγονότος;

Το Crowell & Fox (1963) είναι μια εισαγωγή για αρχάριους στη Θεωρία Κόμπων, τα μαθηματικά των κόμπων του σχοινιού. Στην αρχή οι συγγραφείς ασχολούνται με το πρόβλημα της χρήσης των μαθηματικών για την μελέτη αυτών των φυσικών αντικειμένων, ή καλύτερα, τη δυνατή εκμετάλλευση αυτών των φυσικών αντικειμένων:

> **Ορισμός του Κόμπου**: Σχεδόν όλοι είμαστε εξοικειωμένοι με τους πιο απλούς κόμπους, π.χ. ο συνήθης κόμπος, ... ο κόμπος σε σχήμα 8 ... Ένας μικρός πειραματισμός με ένα κομμάτι σχοινί θα πείσει τον καθένα ότι αυτοί οι δύο κόμποι είναι διαφορετικοί: Ο ένας δεν μπορεί να μετασχηματισθεί στον άλλον χωρίς 'δέσιμο' ή 'λύσιμο'. Ωστόσο, η αποτυχία να μετατρέψουμε τον κόμπο σχήματος 8 (Figure-eight knot) στον συνήθη κόμπο (overhand knot) μετά από ώρες υπομονετικού στριψίματος δεν αποτελεί απόδειξη ότι δεν μπορεί να γίνει, ότι είναι ανέφικτο. Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι να δείξουμε με μαθηματικό τρόπο ότι αυτοί οι δύο κόμποι είναι διαφορετικοί (διακριτοί) ο ένας από τον άλλον.
>
> Τα Μαθηματικά δεν αποδεικνύουν τίποτα για κάτι άλλο εκτός από τα ίδια τα μαθηματικά, και ένα κομμάτι σχοινιού είναι ένα φυσικό αντικείμενο και όχι ένα μαθηματικό. Έτσι, πριν μας απασχολήσουν οι αποδείξεις, πρέπει πρώτα να έχουμε έναν μαθηματικό ορισμό του τι είναι κόμπος ... Αυτό το πρόβλημα προκύπτει κάθε φορά που κάποιος εφαρμόζει τα μαθηματικά σε μια φυσική κατάσταση. Οι ορισμοί θα πρέπει να ορίζουν μαθηματικά αντικείμενα που προσεγγίζουν, όσο το δυνατόν καλύτερα, τα υπό μελέτη φυσικά αντικείμενα. (σελ. 3)

Ο ισχυρισμός εδώ φαίνεται να είναι ότι οι πιθανές σχέσεις και διασυνδέσεις μεταξύ των κομματιών σχοινιού που γίνονται κόμποι, μπορούν να περιγραφούν ή να μοντελοποιηθούν με τις σχέσεις ενός τοπολογικού χώρου. Αυτός ο ισχυρισμός τονίζει τα προβλήματά μας. Η φιλοσοφική βιβλιογραφία γύρω από την επιστημονική εξήγηση είναι μεγάλη, βαθιά και θολή, αλλά μπορούμε εδώ να μείνουμε σε ένα πιο βασικό επίπεδο. Μια παράξενη ή αινιγματική κατάσταση εγείρει την απαίτηση για μια εξήγηση. Σύμφωνα με το *Webster's New Twentieth Century Unabridged Dictionary*, η εξήγηση θα απαλλάσσει κάτι από την ασάφεια και το κάνει κατανοητό. Είναι ξεκάθαρο ότι μια μαθηματική δομή, περιγραφή, μοντέλο ή θεωρία δεν μπορεί να χρησιμεύσει ως εξήγηση για ένα μη μαθηματικό γεγονός χωρίς *κάποια* πραγμάτευση της σχέσης μεταξύ των μαθηματικών per se και της επιστημονικής πραγματικότητας. Χωρίς μια τέτοια διαπραγμάτευση, πώς είναι δυνατόν οι μαθηματικές/επιστημονικές εξηγήσεις να πετύχουν την άρση κάθε ασάφειας – ειδικά αν εισάγονται νέες πιο προβληματικές ασάφειες;[4] Σε ένα πιο γενικό επίπεδο, δεν είναι δυνατόν κανείς να αρχίσει να κατανοεί τη συνεισφορά της επιστήμης στην γνώση χωρίς κάποια σύλληψη για το ρόλο που παίζουν τα μαθηματικά στην πραγματικότητα, για την οποία η επιστήμη συνεισφέρει γνώση.

Έχουμε τουλάχιστον δύο ερωτήματα: Πως εφαρμόζονται τα μαθηματικά στις επιστημονικές εξηγήσεις και περιγραφές; Ποια είναι η (φιλοσοφική) εξήγηση της εφαρμοσιμότητας των μαθηματικών στην επιστήμη; Εφαρμόζουμε τις *έννοιες* των μαθηματικών – αριθμούς, συναρτήσεις, ολοκληρώματα, χώρους Hilbert για την περιγραφή μη μαθηματικών φαινομένων. Εφαρμόζουμε, επίσης, τα *θεωρήματα* των μαθηματικών για να προσδιορίσουμε γεγονότα σχετικά με τον φυσικό κόσμο και πώς αυτός λειτουργεί.

Ο Mark Steiner (1995) ξεχωρίζει διάφορα φιλοσοφικά προβλήματα που εμπίπτουν στο κεφάλαιο των 'εφαρμοσμένων μαθηματικών'. Μερικά από αυτά είναι καίριες εκδοχές των ζητημάτων με τα οποία ασχοληθήκαμε στην προηγούμενη ενότητα. Υπάρχει πρώτα απ' όλα ένα *σημασιολογικό* πρόβλημα: οι τυπικές επιστημονικές περιγραφές και εξηγήσεις επικαλούνται μαθηματικούς και φυσικούς όρους. Αυτό ισχύει για απλές προτάσεις όπως «ο Δίας έχει τέσσερα φεγγάρια» και για πιο εξεζητημένες όψεις της σύγχρονης φυσικής επιστήμης. Το πρόβλημα είναι να βρούμε μια ερμηνεία της γλώσσας που να καλύπτει και τα 'καθαρά' αλλά και τα 'μεικτά' πλαίσια συμφραζομένων έτσι ώστε οι αποδείξεις που προκύπτουν από τα μαθηματικά να μπορούν να χρησιμοποιηθούν απ' ευθείας στα επιστημονικά πλαίσια.

[4] Ο Steiner 1978 διαχωρίζει την εξήγηση ενός φυσικού φαινομένου με τη χρήση των μαθηματικών από μια ειδικά μαθηματική εξήγηση.

Μια δεύτερη ομάδα προβλημάτων έχει να κάνει με το *μεταφυσικό*. Πώς, δηλαδή, τα αντικείμενα των μαθηματικών (αν υπάρχει κάτι τέτοιο) σχετίζονται με τον φυσικό κόσμο έτσι ώστε οι εφαρμογές τους να είναι δυνατές; Σε έναν τυπικό οντολογικό ρεαλισμό, για παράδειγμα, τα μαθηματικά έχουν να κάνουν με έναν αιτιολογικά αδρανή (αμετάβλητο) κόσμο αφηρημένων αντικειμένων. Σε έναν τυπικό ιδεαλισμό, τα μαθηματικά σχετίζονται με τη νοητική δραστηριότητα. Σε κάθε περίπτωση, πώς μπορούν πράγματα σαν κι αυτά να μας πουν κάτι σχετικά με το πώς λειτουργεί ο φυσικός κόσμος;

Μια τρίτη ομάδα ζητημάτων ασχολείται με το γιατί οι συγκεγκριμένες έννοιες και φορμαλισμοί των μαθηματικών είναι τόσο συχνά χρήσιμοι στην περιγραφή της εμπειρικής πραγματικότητας. Τι είναι αυτό στον φυσικό κόσμο που κάνει την αριθμητική τόσο εφαρμόσιμη; Τι είναι αυτό στον φυσικό κόσμο που κάνει τη θεωρία ομάδων και τους χώρους Hilbert τόσο σημαντικούς για την περιγραφή του; Ο Steiner ισχυρίζεται ότι στην πραγματικότητα έχουμε εδώ ένα διαφορετικό πρόβλημα για κάθε εφαρμοσμένη έννοια και ως εκ τούτου δεν πρέπει να περιμένουμε μία ενιαία λύση.

Τα προβλήματα προκύπτουν σε διαφορετικά επίπεδα. Αρχικά, κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί πώς είναι δυνατόν ένα *συγκεκριμένο* μαθηματικό γεγονός να χρησιμεύει ως εξήγηση ενός άλλου συγκεκριμένου μη μαθηματικού γεγονότος. Η απορία του φίλου μου ήταν αυτού του τύπου. Πώς μια μηδενική τιμή μιας συνάρτησης εξηγεί ένα μοτίβο πάνω στον παλμογράφο; Πώς αυτό το μαθηματικό γεγονός κάνει το φυσικό φαινόμενο κατανοητό; Σε αυτήν την περίπτωση, μια επαρκής απάντηση μπορεί να περιέχει μια λεπτομερή περιγραφή της σχετικής επιστημονικής θεωρίας η οποία συσχετίζει μια συγκεκριμένη κλάση συναρτήσεων με μια κλάση φυσικών φαινομένων. Θα ήταν δίκαιο λοιπόν για τον εκπαιδευτή του εργαστηρίου να πει ότι, αν ο φίλος μου θέλει μία πλήρη εξήγηση, θα πρέπει να πάρει μερικά σχετικά μαθήματα.

Ο Ludwig Wittgenstein έγραψε ότι όλες οι εξηγήσεις πρέπει να 'εξαντλούνται' σε κάποιο σημείο, στο οποίο η περιέργειά μας έχει ικανοποιηθεί, ή διαφορετικά διαπιστώνουμε ότι πρέπει να σταματήσουμε να ρωτάμε, αλλά ίσως δεν έχουμε φτάσει σε αυτό το σημείο ακόμα. Είτε πάρουμε επιπλέον μαθήματα φυσικής είτε όχι, μπορούμε να αναρωτηθούμε ποια κλάση μαθηματικών αντικειμένων, όπως οι πραγματικές συναρτήσεις, μπορεί να έχουν σχέση με τα φυσικά φαινόμενα. Αυτό θέτει το ερώτημα σε ένα διαφορετικό επίπεδο. Τώρα, θα μελετήσουμε την συνάφεια της δοσμένης μαθηματικής/επιστημονικής *θεωρίας* στην ολότητά της. Γιατί λειτουργεί η θεωρία; Σίγουρα, αυτό είναι ένα ακόμα αξιοπερίεργο θέμα, που ζητάει εξήγηση. Μια δυνατότητα απάντησης σε αυτήν τη δεύτερη ερώτηση θα ήταν να επισημάνουμε ότι παρόμοιες χρήσεις των μαθηματικών παίζουν έναν σημαντικό ρόλο και στην επιστημονική μεθοδολογία. Αν οι ερωτήσεις επιμένουν, ο συνομιλητής μας μπορεί να σημειώσει την τεράστια επιτυχία αυτής της μεθοδολογίας στο να προβλέπει και να ελέγχει τον κόσμο.

Αυτή η τελευταία απάντηση εξηγεί γιατί κάποιος ενδέχεται να ασχοληθεί με τη μαθηματική/επιστημονική έρευνα, και παρέχει την εγγύηση ότι η επιστημονική μεθοδολογία θα συνεχίσει να προβλέπει και να ελέγχει τον κόσμο, υποθέτοντας ότι λύνουμε ή αγνοούμε τα κλασικά προβλήματα με την επαγωγή (και επιτρέπουμε τον κυκλικό συλλογισμό). Ωστόσο, αν δεν έχουμε ακόμα φτάσει στο τελικό βιτγκενσταϊνικό σημείο, υπάρχει και ένα τρίτο επίπεδο στο ζήτημά μας. Τι γίνεται με ολόκληρο το μαθηματικό / επιστημονικό εγχείρημα ή τουλάχιστον με τα 'μαθηματικά' μέρη του; Γιατί τα μαθηματικά είναι αναγκαία για την επιστήμη; Ποιος είναι ο ρόλος τους; Ακολουθώντας το πνεύμα του David Hume, δεν επιθυμώ να *αμφισβητήσω* ολόκληρο το μαθηματικό / επιστημονικό εγχείρημα, πόσο μάλλον να εγείρω αμφιβολίες γι' αυτό. Όπως ο Quine, έτσι και οι άλλοι νατουραλιστές συνεχίζουν να ρωτούν, τι μπορεί να είναι πιο ασφαλές από την επιστήμη; Ωστόσο το πρόβλημα της κατανόησης του πώς λειτουργεί αυτό το εγχείρημα, με τους δικούς του όρους, είναι ένα νόμιμο φιλοσοφικό ερώτημα, και αυτό το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί από την παραπάνω τελευταία απάντηση σχετικά με την επιτυχία αυτού του εγχειρήματος.

Ένα δημοφιλές επιχείρημα για τον ρεαλισμό στην αληθοτιμή για τα μαθηματικά επικεντρώνεται στις σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών και της φυσικής επιστήμης (βλ. Κεφ. 8, §8.2). Ο ένας συλλογισμός είναι ότι τα μαθηματικά είναι απαραίτητα για την επιστήμη και ο άλλος ότι οι βασικές αρχές της επιστήμης είναι (λίγο ή πολύ) αληθείς. Από την άποψη του ολισμού του Quine (ή από το παραπάνω desideratum του Benacerraf 1973), το επιχείρημα αυτό καταλήγει επίσης στο ότι τα μαθηματικά είναι αντικειμενικά αληθή – ρεαλισμός στην αληθοτιμή. Ωστόσο, ακόμα και αν οι συλλογισμοί αυτοί αληθεύουν και αν ακόμα αυτό το επιχείρημα είναι πειστικό, θα είναι πολύ χαλαρό να αφήσουμε τα πράγματα σε αυτό το στάδιο. Για να υποστηρίξει ο ρεαλιστής αυτό το επιχείρημα, θα πρέπει να μας εξασφαλίσει μια εξήγηση για το πώς ακριβώς εφαρμόζονται τα μαθηματικά στην επιστήμη. Το νόημα αυτής της ενότητας είναι ότι ο πρώτος συλλογισμός αυτού του επιχειρήματος – η αναγκαιότητα των μαθηματικών στην επιστήμη – χρήζει από μόνος του κάποιας εξήγησης. Τι σχέση έχουν οι προτάσεις σχετικά με τους αριθμούς και τα σύνολα με τον φυσικό κόσμο που μελετάται στην επιστήμη; Πώς μπορούν τέτοιες προτάσεις να ρίξουν φως στην κατανόηση των ηλεκτρονίων, της στατικότητας των γεφυρών και της ευστάθειας των αγορών; Δεν μπορούμε να διατηρήσουμε το συμπέρασμα του επιχειρήματος περί της αναγκαιότητας αν δεν γνωρίσουμε τις απαντήσεις σ' αυτά. Βεβαίως ο φιλόσοφος δεν θα πρέπει να αρκείται απλώς στο να τονίζει την προφανή αναγκαιότητα των μαθηματικών για την επιστήμη και μετά να βγάζει συμπεράσματα που γεννούν τόσες ερωτήσεις όσες μπορούν να απαντηθούν.

Ο Gödel επίσης αναγνώρισε τη σημασία των συνδέσμων μεταξύ των μαθηματικών και της φυσικής πραγματικότητας. Όπως τονίστηκε παραπάνω, για έναν ρεαλιστή στην αληθοτιμή, οι σαφείς μαθηματικές προτάσεις έχουν αντικειμενικές αληθοτιμές. Πώς, όμως, προσδιορίζουμε αυτές τις αληθοτιμές όταν οι δεδομένες μαθηματικές αποδείξεις δεν το κάνουν; Ο Gödel (1964) ισχυρίστηκε ότι ένα πιθανολογικό 'κριτήριο αλήθειας' για μια μαθηματική πρόταση είναι η «γονιμότητά της στα μαθηματικά ... *πιθανόν και στη φυσική*» (δική μου η έμφαση). Είναι φανερό ότι η γονιμότητα στη φυσική δεν μπορεί να είναι ένα κριτήριο για τη *μαθηματική* αλήθεια, εκτός αν ο μαθηματικός κόσμος είναι συνδεδεμένος κατά κάποιον τρόπο με τον φυσικό κόσμο, με έναν επιστημολογικά αποκαλυπτικό τρόπο.

Τα ζητήματα εφαρμοσιμότητας των μαθηματικών ενδέχεται να είναι επίσης ενοχλητικά για μερικούς αντιρεαλιστές. Ο ιδεαλιστής στην οντολογία, για παράδειγμα, πιστεύει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα εξαρτώνται από τη νόηση. Επομένως, πως οι νοητικές κατασκευές των μαθηματικών ρίχνουν φως στο (ενδεχομένως αντικειμενικό) μη μαθηματικό, φυσικό σύμπαν; Τι συμβαίνει με το εξωτερικό σύμπαν που μας επιτρέπει να το κατανοήσουμε μέσω του νοητικού μαθηματικού κόσμου; Αν ο φιλόσοφος είναι και ιδεαλιστής σχετικά με τον φυσικό κόσμο, τότε το πρόβλημά του είναι να δείξει πώς ο ιδεατός μαθηματικός κόσμος σχετίζεται με τον ιδεατό φυσικό κόσμο. Πώς η κατασκευή των μαθηματικών ασκεί επιρροή στην κατασκευή του εξωτερικού φυσικού κόσμου;

Οι φιλόσοφοι που πιστεύουν ότι οι μαθηματικές προτάσεις δεν έχουν καν (μη κενές) αληθοτιμές, ή ότι οι περισσότερες μαθηματικές προτάσεις είναι συστηματικά ψευδείς, φαίνεται να αντιμετωπίζουν ένα ακόμα πιο δυσεπίλυτο πρόβλημα. Πώς, δηλαδή, μπορούν τέτοιες προτάσεις να ρίξουν κάποιο φως σε οτιδήποτε μη μαθηματικό;

Το αφήνω στον αναγνώστη να προσδιορίσει ποια από αυτές τις εκδοχές του προβλήματος είναι λιγότερο δύσβατη. Θα επιστρέψουμε σε αυτό το θέμα αφού αναπτύξουμε τις διάφορες φιλοσοφίες πιο αναλυτικά.

Ο Steiner (1995, 1997) οριοθετεί μια επιβλητική ομάδα προβλημάτων, στα οποία δεν θα επανερχόμαστε συχνά, κυρίως επειδή δεν έχω τίποτα να πω, και γιατί το πρόβλημα δεν έχει ξεκάθαρη λύση σε καμία από τις φιλοσοφίες των μαθηματικών (απ' όσο ξέρω). Περιστασιακά, περιοχές των καθαρών μαθηματικών, όπως η αφηρημένη άλγεβρα και η ανάλυση, βρίσκουν αναπάντεχες εφαρμογές πολύ μετά από την μαθηματική τους ωρίμανση. Οι μαθηματικοί έχουν μια μυστηριώδη ικανότητα να κατασκευάζουν δομές, έννοιες και κλάδους που βρίσκουν απρόσμενη εφαρμογή στην επιστήμη. Μέσα στην ιστοκαι η ακόλουθη σκηνή επαναλήφθηκε. Οι μαθηματικοί μελετούν μια δοσμένη δομή, για κάποιο λόγο. Στη συνέχεια την επεκτείνουν σε μία άλλη δομή για δικούς τους εσωτερικούς ενοιολογικούς σκοπούς (θεωρώντας, ας πούμε, ίσως πολλές διαστάσεις) και αργότερα αυτή η νέα ορισμένη δομή βρίσκει εφαρμογή κάπου στην επιστήμη. Όπως το έθεσε ο S. Weinberg (, σελ. 725): «Είναι σίγουρα τρομακτικό το πώς αισθάνεται ο φυσικός όταν βρίσκει ότι ο μαθηματικός έχει φτάσει σε κάτι πριν από αυτόν.» Και όπως το έθεσε και ο Richard Feynman (1967, σελ. 171): «Βρίσκω αρκετά συναρπαστικό το γεγονός ότι τα μαθηματικά είναι δυνατόν να προβλέπουν τι θα γίνει, τα οποία απλώς ακολουθούν κανόνες που δεν έχουν πραγματικά καμία σχέση με το πραγματικό πράγμα». Από το μαθηματικό στρατόπεδο, η ίδια άποψη εκφράστηκε και από την ομάδα των Bourbaki (1950, σελ. 231) «Τα μαθηματικά εμφανίζονται ... σαν μία αποθήκη αφηρημένων μορφών – που δεν είναι άλλες από τις μαθηματικές δομές και που τυχαίνει – χωρίς να ξέρουμε το γιατί – συγκεκριμένες όψεις της εμπειρικής πραγματικότητας, να προσαρμόζονται σε αυτές τις μορφές, σαν να υπήρχε ένα είδος προσαρμογής από τα πριν ... ».

2.4 Τοπικά Ζητήματα: Τα Θεωρήματα, οι Θεωρίες, και οι Έννοιες

Τα μεγάλης σημασίας θέματα και οι ερωτήσεις των προηγούμενων ενοτήτων αφορούν όλα τα μαθηματικά, και όλη την επιστήμη. Αυτή η ενότητα ασχολείται με περισσότερο εντοπισμένα θέματα για τον φιλόσοφο των μαθηματικών. Συνήθως ο φιλόσοφος δεν ασχολείται σε βάθος με τέτοια τοπικά θέματα πριν συναντήσει τα καθολικά ζητήματα.

Μια ομάδα ζητημάτων αφορά στις προσπάθειες να ερμηνευτούν συγκεκριμένα μαθηματικά ή επιστημονικά αποτελέσματα. Σε κάποια έκταση, οι ερωτήσεις που αφορούν τις εφαρμογές των μαθηματικών ανήκουν σ' αυτήν την ομάδα. Τι να μας πει μπορεί ένα θεώρημα των μαθηματικών, για τον φυσικό κόσμο που μελετάται από την επιστήμη; Σε ποια έκταση μπορούμε να *αποδείξουμε* πράγματα σχετικά με κόμπους, με την ευστάθεια των γεφυρών, το σκάκι, και τις τάσεις της οικονομίας; Κάποιοι φιλόσοφοι θεωρούν ότι τα μαθηματικά δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένα ανούσιο παιχνίδι που παίζεται με σύμβολα (βλ. Κεφ. 6), αλλά όλοι οι άλλοι υποστηρίζουν ότι τα μαθηματιμά έχουν κάποιο νόημα. Ποιο είναι αυτό το νόημα και πώς αυτό σχετίζεται με το νόημα του φυσικού μη μαθηματικού λόγου; Τι μπορεί να μας πει ένα θεώρημα σχετικά με τον φυσικό κόσμο, σχετικά με την ανθώπινη γνωστική ικανότητα, σχετικά με τις ικανότητες γενικά των προγραμματισμένων υπολογιστών, κ.τλ.

Δυνητικά, κάποια αποτελέσματα από τη μαθηματική λογική έχουν φιλοσοφικές προεκτάσεις. Έστω T μία τυπική μαθηματική θεωρία και M μία μαθηματική δομή, όπως οι φυσικοί αριθμοί ή οι πραγματικοί αριθμοί. Αν η θεωρία T είναι αληθής για το μοντέλο M, λέμε ότι το M είναι ένα *μοντέλο* της T. Το Θεώρημα Συμπαγίας[5] και τα θεωρήματα των Löwenheim – Skolem αφορούν ένα συγκεκριμένο τύπο θεωρίας, που καλείται 'πρώτης τάξης'. Τα αποτελέσματα συνεπάγονται ότι, αν μια τέτοια θεωρία έχει ένα άπειρο μοντέλο, τότε για κάθε άπειρη πληθικότητα κ η θεωρία έχει ένα μοντέλο μεγέθους ακριβώς κ. Έπεται, λοιπόν, ότι υπάρχουν μοντέλα πρώτης-τάξης της πραγματικής ανάλυσης και μοντέλα πρώτης-τάξης της θεωρίας συνόλων που έχουν το μέγεθος των φυσικών αριθμών. Αυτό συμβαίνει παρά το γεγονός ότι υπάρχει ένα θεώρημα της θεωρίας συνόλων, που οφείλεται στο ίδιο τον Georg Cantor, ότι υπάρχουν περισσότερα σύνολα και περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί από όσοι είναι οι φυσικοί αριθμοί. Και επιπλέον, η θεωρία πρώτης-τάξης των φυσικών αριθμών, που μερικές φορές καλείται 'αριθμητική πρώτης-τάξης', έχει μοντέλα που είναι μεγαλύτερα σε μέγεθος από το σύνολο των φυσικών αριθμών. Υπάρχουν μοντέλα της πρώτης-τάξης αριθμητικής που έχουν το μέγεθος των πραγματικών αριθμών. Αυτή η αινιγματική κατάσταση λέγεται 'παράδοξο του Skolem', παίρνοντας το όνομά της από τον λογικολόγο Thoralf Skolem. Δεν είναι ένα παράδοξο με την έννοια μιας γνήσιας αντίφασης που δυνατόν να παραχθεί από εύλογες υποθέσεις. Πρακτικά, η υφή του παραδόξου διαλύεται όταν παρατηρήσουμε ότι έννοιες όπως 'ο πληθάριθμος των φυσικών αριθμών' σημαίνουν διαφορετικά πράγματα, σε διαφορετικές δομές. Μια δοσμένη δομή μπορεί να ικανοποιήσει τον τύπο που λέει ότι ένα συγκεκριμένο σύνολο είναι μεγαλύτερο από τους φυσικούς αριθμούς ακόμα και όταν το σύνολο (θεωρούμενο από μια διαφορετική δομή) δεν έχει περισσότερα στοιχεία από το σύνολο των φυσικών.[6] Παρ' όλα αυτά το παράδοξο του Skolem εξακολουθεί να είναι παράξενο, και κάποιοι φιλόσοφοι και επιστήμονες της λογικής θεωρούν ότι έχει φιλοσοφικές προεκτάσεις που αφορούν την ανθρώπινη ικανότητα

[5][Σ.τ.Ε.] Η απόδοση του όρου 'compactness' στα Ελληνικά έχει μια άσχημη ιστορία! Έχει χρησιμοποιηθεί από κάποιους μαθηματικούς η απόδοση 'συμπάγεια'! Αν όμως κανείς καταφύγει στα έγκυρα λεξικά του Δημητράκου ή Λίντελ-Σκοτ, θα διαπιστώσει ότι η απόδοση είναι 'συμπαγία' ~ η ιδιότητα του συμπαγούς. Έτσι το 'συμπάγεια' είναι σαν να λέμε 'ευτύχεια' αντί 'ευτυχία'! Σε τελευταία ανάλυση και το 'συμπαγότητα' είναι προτιμότερο από το κακόηχο 'συμπάγεια'.

[6][Σ.τ.Ε.] Τέτοιες έννοιες όπως 'ο πληθάριθμος των φυσικών αριθμών' είναι *περιβαλλοντολογικά ευαίσθητες*! Εξαρτώνται δηλαδή από τη δομή μέσα στην οποία τις θεωρούμε.

να χαρακτηρίζει και να επικοινωνεί διάφορες έννοιες όπως οι φυσικοί αριθμοί, οι πραγματικοί αριθμοί, τα σύνολα, ακόμα και η πληθικότητα. Έχουμε άραγε καθορισμένη και σαφή αντίληψη αυτών των εννοιών; Αν ναι, πώς συλλαμβάνουμε αυτές τις ιδέες και πώς τις μεταδίδουμε σε άλλους; Τα θεωρήματα των Löwenheim – Skolem δηλώνουν ότι οτιδήποτε *λέμε* σχετικά με αυτές τις έννοιες και τα αντικείμενα μπορεί να αποδοθεί σε μια θεωρία η οποία έχει μη σκοπούμενες ερμηνείες. Αλλά τότε, πώς μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι οι άλλοι καταλαβαίνουν αυτό που θέλαμε εμείς να καταλάβουν; Πώς ξέρω ότι και εγώ έχω σαφή αντίληψη αυτών των πραγμάτων; Για να είμαστε σίγουροι, υπάρχουν γενικά φιλοσοφικά προβλήματα που αφορούν την κατανόηση και την επικοινωνία, αλλά το παράδοξο του Skolem εστιάζει ειδικά σ' αυτά όταν εφαρμόζεται για τα μαθηματικά. Ο Skolem (1922, 1941) χρησιμοποίησε ο ίδιος τα αποτελέσματα για να δείξει ότι ουσιαστικά όλες οι μαθηματικές έννοιες είναι πέρα για πέρα 'σχετικές'. Δεν είναι σίγουρο τι ακριβώς εννοούσε, αλλά η ιδέα φαίνεται να είναι ότι δεν υπάρχει απόλυτη, ανεξάρτητη (ή αντικειμενική) έννοια, ας πούμε των φυσικών αριθμών και της πληθικότητας. Με άλλα λόγια, ο Skolem θεωρούσε ότι κανένα σύνολο δεν είναι απλά (simpliciter) [7] απειροσμένο ή του μεγέθους των φυσικών αριθμών, αλλά μόνον πεπερασμένο ή του μεγέθους των φυσικών αριθμών ως προς ένα πεδίο ή μοντέλο. Πιο πρόσφατα, ο Hilary Putnam (1980) έκανε λόγο για μια παρόμοια σχετικότητα στη βάση αυτών και άλλων αποτελεσμάτων της μαθηματικής λογικής. Η σχετικότητα των Skolem – Putnam είναι ένας μεγάλης σημασίας οντολογικός σχετικισμός, αφού η άποψη αυτή συνεπάγεται ότι μία δοσμένη μαθηματική θεωρία, όπως η αριθμητική ή η πραγματική ανάλυση, δεν έχει ένα σταθερό αντικείμενο. Συνεπώς, οι μαθηματικοί όροι δεν έχουν μια σταθερή αναφορά [8].

Οι περισσότεροι φιλόσοφοι αντιτίθενται στη σχετικότητα του Skolem, παρ' όλα αυτά πρέπει να γίνει κατανοητή. Μια προσεκτική μελέτη των θεωρημάτων των Löwenheim – Skolem αποκαλύπτει ότι δεν αποκλείουν τις απόλυτες, αντικειμενικές έννοιες των φυσικών αριθμών, της περατότητας κ.ά. Πάντως τα θεωρήματα δείχνουν ότι αν υπάρχουν τέτοιες απόλυτες έννοιες, αυτές δεν μπορούν να κατανοηθούν με τις τυπικές θεωρίες πρώτης-τάξης. Κάθε πρώτης-

---

[7] [Σ.τ.Ε.] Ο όρος 'simpliciter' χρησιμοποιείται στη φιλοσοφία και σημαίνει 'χωρίς περιορισμούς', 'απλά'. Π.χ. «Υπάρχουν καλοί δάσκαλοι, καλοί γονείς κ.τλ. αλλά υπάρχει άραγε καλός άνθρωπος simpliciter;»

[8] [Σ.τ.Ε.] Είναι όμως δυνατόν να ερμηνευτεί ο σχετικισμός των Skolem – Putnam ως ένας ρεαλισμός που αναφέρεται σε διαφορετικά 'επίπεδα πραγματικότητας' ή διαφορετικούς τρόπους 'παρατήρησης' μιας μοναδικά υπάρχουσας πραγματικότητας. Βλ. για παρόμοια θέματα το C. A. Drossos, Structures, Points and Levels of Reality, στό, G. Sica (επιμ.) *Essays on the Foundations of Mathematics and Logic*, σελ. 83-114, Polimetrica International Scientific Publisher Monza, Italy, 2005. (http://www.math.upatras.gr/~cdrossos/Docs/Dros4ASML.pdf)

τάξης θεωρία αυτών των εννοιών, αν έχει ένα οποιοδήποτε άπειρο μοντέλο, τότε έχει μη ηθελημένα μοντέλα, στα οποία αυτές οι έννοιες ερμηνεύονται με λανθασμένο τρόπο. Κάποιοι φιλόσοφοι απαντούν ότι τα *μη τυπικά* μαθηματικά είναι πιο εκφραστικά και πιο συγκεκριμένα από τη θεωρία μοντέλων πρώτης-τάξης. Αυτός ο ελιγμός αφήνει αναπάντητο το πώς οι μη τυπικές έννοιες των φυσικών αριθμών, της περατότητας κ.ά. κατανοούνται και πώς μεταδίδονται. Ποια είναι τότε η σημασιολογία του μη τυπικού μαθηματικού λόγου, η γλώσσα η οποία σαφώς αναφέρεται στις απόλυτες έννοιες του πεπερασμενου και του φυσικού αριθμού; Πώς επιτυγχάνεται αυτή η αναφορά; Τα θεωρήματα των Löwenheim – Skolem δεν ισχύουν για τις λεγόμενες δευτεροβάθμιες τυπικές γλώσσες και σημασιολογίες, και έτσι δίνουν ίσως την σωστή εικόνα για την κατανόηση και τη μετάδοση των εννοιών. Πάντως η διαφωνία συνεχίζεται για το αν ή πώς οι δευτεροβάθμιες γλώσσες μπορούν να γίνουν κατανοητές και να μεταδοθούν (βλ. Shapiro 1991, Κεφ. 3-5). Είναι δύσκολο να αποφύγουμε να θεωρήσουμε ως αποδεδειγμένο το αποδεικτέο.

Άλλα παραδείγματα φιλοσοφικά πλούσιων μαθηματικών αποτελεσμάτων είναι τα άφθονα αποτελέσματα ανεξαρτησίας στη θεωρία συνόλων. Η θεωρία συνόλων των Zermelo – Fraenkel με το αξίωμα επιλογής, που συνοπτικά ονομάζεται ZFC, είναι μία από τις πιο ισχυρές μαθηματικές θεωρίες για την οποία υπάρχει κάποια συναίνεση. Ουσιαστικά το σύνολο της υπάρχουσας κλασικής ανάλυσης, της πραγματικής ανάλυσης, της μιγαδικής ανάλυσης, της συναρτησιακής ανάλυσης κ.ο.κ. μπορεί να αποδοθεί στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων, και όλα τα γνωστά θεωρήματα σε αυτά τα πεδία μπορούν να αποδειχθούν στη συνολοθεωρία ZFC. Παρ' όλα αυτά, οι επιστήμονες της λογικής έχουν αποδείξει ότι πολλά ενδιαφέροντα και σημαντικά μαθηματικά ερωτήματα δεν είναι αποκρίσιμα από τα αξιώματα της ZFC. Το πιο γνωστό από αυτά είναι η *υπόθεση του συνεχούς* του Cantor. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, είναι θεώρημα (στη ZFC) ότι υπάρχουν περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί από ότι φυσικοί. Η υπόθεση του συνεχούς είναι ο ισχυρισμός ότι, δεν υπάρχουν άπειρες πληθικότητες αυστηρά μεταξύ αυτών των δύο πληθαριθμικών μεγεθών. Με άλλα λόγια, η υπόθεση του συνεχούς λέει ότι δεν υπάρχουν σύνολα που να είναι αυστηρά μεγαλύτερα από το σύνολο των φυσικών αριθμών και αυστηρά μικρότερα από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ούτε η υπόθεση του συνεχούς ούτε η άρνησή της μπορούν να αποδειχθούν στη συμβατική αξιωματικοποίηση της θεωρίας συνόλων.[9]

[9][Σ.τ.Ε.] Άρα στη ZFC η υπόθεση του συνεχούς είναι μη αποκρίσιμη. Επιπρόσθετα αυτή η υπόθεση είναι και 'ανεξάρτητη' με την έννοια ότι είναι δυνατόν να κατασκευαστούν δύο μοντέλα της θεωρίας ZFC που στο ένα να ισχύει η υπόθεση του συνεχούς και στο άλλο να μην ισχύει.

Τι μας λέει αυτή η ανεξαρτησία σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες; Μήπως εδώ μας προσφέρεται κάποιο άλλο είδος σχετικότητας; Μπορούμε απλά να προσδιορίσουμε το μέγεθος ενός συνόλου (τον πληθάριθμό του) ως προς μία ερμηνεία ή μία επέκταση της θεωρίας συνόλων; Κάποιοι φιλόσοφοι θεωρούν ότι αυτά τα αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι στην πραγματικότητα δεν έχει έννοια ούτε η υπόθεση του συνεχούς, ούτε το σχετικό 'μέγεθος' του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Το ίδιο ισχύει και για άλλες ανεξάρτητες προτάσεις. Αυτοί οι φιλόσοφοι πιστεύουν ότι υπάρχει μια απροσδιοριστία σχετικά με τη μαθηματική *αλήθεια* και έτσι είναι αντιρεαλιστές στην αληθοτιμή.

Το θέμα αυτό έχει έμμεσες συνέπειες που αφορούν στην πρακτική των μαθηματικών. Αν ένας μαθηματικός συντάσσεται με τους ρεαλιστές στην αληθοτιμή και θεωρεί ότι η υπόθεση του συνεχούς έχει μία συγκεκριμένη αληθοτιμή, μπορεί να αφιερώσει χρόνο και κόπο στο να προσδιορίσει αυτή την αληθοτιμή. Σε αυτήν την περίπτωση, μια φιλοσοφική απορία είναι να προσδιορίσουμε τη μεθοδολογία που μπορούσε ένας τέτοιος μαθηματικός να χρησιμοποιήσει. Δεδομένης της εκφραστικής δύναμης της θεωρίας ZFC, είναι απίθανο να υπάρχει μια πειστική *απόδειξη* της υπόθεσης του συνεχούς ή της άρνησής της, αφού μια τέτοια απόδειξη θα έπρεπε να επικαλεστεί έννοιες ή αρχές που είναι αδύνατο να συλλάβει η συνολοθεωρία ZFC. Από την άλλη μεριά, αν ένας μαθηματικός ισχυρίζεται ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν έχει μία καθορισμένη αληθοτιμή, τότε είναι ελεύθερος να την αποδεχθεί ή όχι, βασιζόμενος στο τι κάνει πιο βολική τη θεωρία συνόλων. Δεν είναι ξεκάθαρο αν τα κριτήρια που θα μπορούσε να υιοθετήσει ο ρεαλιστής για να αποφασίσει για την υπόθεση του συνεχούς, είναι διαφορετικά από τα κριτήρια που θα χρησιμοποιούσε ο αντιρεαλιστής για να προσδιορίσει τι κάνει πιο βολική την θεωρία. Ένας νατουραλιστής όπως η Maddy (1988), ξεκινά το φιλοσοφικό αυτόν στόχο, με μια εξέταση της πρακτικής των συνολοθεωρητικών αναφορικά με τα αποτελέσματα ανεξαρτησίας.

Ένα τρίτο παράδειγμα είναι το περίφημο *Θεώρημα της μη Πληρότητας* του Gödel. Έστω ότι T είναι μία αξιωματικοποίηση της αριθμητικής. Υποθέτουμε ότι η T είναι αποτελεσματική, με την έννοια ότι υπάρχει μια μηχανική διαδικασία που να προσδιορίζει αν μια ακολουθία προτάσεων στην γλώσσα της T είναι μια σωστή παραγωγή στην T. Πρόχειρα, το Θεώρημα της μη Πληρότητας συνεπάγεται ότι αν η T είναι αρκετά πλούσια, τότε υπάρχει μία πρόταση Φ στην γλώσσα της T έτσι ώστε ούτε η Φ αλλά ούτε και η άρνησή της να μπορεί να παραχθεί στην T. Με άλλα λόγια, η T δεν μπορεί να αποφασίσει για την αλήθεια της Φ.

Ένας αντιρεαλιστής της αληθοτιμής θα υποστήριζε ότι το αποτέλεσμα του θεωρήματος της μη πληρότητας επιβεβαιώνει ότι τουλάχιστον κάποιες προτάσεις της αριθμητικής στερούνται συγκεκριμένων αληθοτιμών, η συζήτηση όμως θα προϋπόθετε ότι ο μόνος δρόμος για την αλήθεια είναι μέσω της απόδειξης σε ένα σταθερό, αποτελεσματικό, απαγωγικό σύστημα. Ένας ρεαλιστής στην αληθοτιμή, σχετικά με την αριθμητική, ερμηνεύει το θεώρημα της μη πληρότητας ως ένδειξη ότι δεν υπάρχει μία αποτελεσματική αξιωματικοποίηση της οποίας τα θεωρήματα να είναι μοναδικές αλήθειες της αριθμητικής. Το αποτέλεσμα υποδηλώνει ότι υπάρχει κάτι περισσότερο στην αλήθεια από ότι στην αποδειξιμότητα, σε κάθε δοσμένο απαγωγικό σύστημα. Φυσικά δεν είναι αρκετό για έναν ρεαλιστή απλώς να *πει* κάτι τέτοιο. Το καθήκον του είναι να δείξει από τι αποτελείται η αλήθεια στην αριθμητική και πώς η αλήθεια στην αριθμητική ξεπερνά αυτό που τυπικά δυνατόν να παραχθεί.

Παρεμπιπτόντως, μια εξέταση της απόδειξης του θεωρήματος μη πληρότητας δείχνει ότι η μη αποκρίσιμη πρόταση Φ είναι αληθής για τους φυσικούς αριθμούς. Εκ πρώτης όψεως έχουμε μια άτυπη απόδειξη της αλήθειας μιας τυπικά μη αποκρίσιμης πρότασης. Έτσι ο ρεαλιστής μας θα μπορούσε να ισχυρισθεί ότι υπάρχει κάτι περισσότερο στην αριθμητική *αποδειξιμότητα* από ό,τι μπορεί να παραχθεί σε μιά οποιαδήποτε σταθερή τυπική αξιωματικοποίηση.

Κάποιοι φιλόσοφοι θεωρούν ότι το θεώρημα μη πληρότητας αντικρούει τη μηχανιστική αντίληψη για τη σκέψη, τη θέση δηλαδή ότι ο ανθρώπινος νους λειτουργεί σαν μία μηχανή. Αν εύλογα ταυτίσουμε τα συμπεράσματα (έξοδο) μιας δοσμένης μηχανής με τα θεωρήματα ενός αποτελεσματικού παραγωγικού συστήματος, και αν εξιδανικεύσουμε αρκετά τα πράγματα, τότε το θεώρημα μη πληρότητας δείχνει ότι η αλήθεια στην αριθμητική και η μη τυπική αριθμητική αποδειξιμότητα ξεπερνούν αυτά που μπορούν να παραχθούν από μια μηχανή. (βλ. Lucas 1961 και, πιο πρόσφατα, Penrose 1994). Ο ίδιος ο Gödel έβγαλε το προσεκτικό συμπέρασμα ότι είτε ο νους δεν είναι μηχανή είτε υπάρχουν ερωτήματα στην αριθμητική που είναι 'απολύτως μη αποκρίσιμα', ερωτήματα που από άποψη αρχής, είναι αδύνατον να απαντηθούν από εμάς τους ανθρώπους. Παρ' όλα αυτά, τα επιχειρήματα αυτών των στοχαστών δεν είναι γενικώς αποδεκτά. Ο Judson Webb (1980) χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα της μη πληρότητας για να υποστηρίξει την μηχανιστική θέση για την σκέψη.

Μια άλλη ομάδα θεμάτων περιλαμβάνει τις προσπάθειες να διαρθρωθούν και να ερμηνευθούν συγκεκριμένες μαθηματικές *θεωρίες* και *έννοιες*. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το έργο της θεμελίωσης στην γεωμετρία, αριθμητική και ανάλυση. Μερικές φορές αυτού του είδους η δραστηριότητα έχει έμμεσες επιπτώσεις για τα ίδια τα μαθηματικά, και έτσι προκαλεί και ασαφοποιεί τα σύνορα μεταξύ μαθηματικών και φιλοσοφίας. Ενδιαφέρουσες και ισχυρές μέθοδοι έρευνας συχνά πηγάζουν από το έργο της θεμελίωσης που προωθεί συνδέσμους μεταξύ των μαθηματικών κλάδων. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, την σύνδεση μεταξύ των πραγματικών αριθμών και των σημείων στο χώρο που αποκαλύπτεται στην αναλυτική γεωμετρία. Μας λέει τίποτα αυτό σχετικά με το τι είναι ένα σημείο ή ένας αριθμός; Υπάρχει, επίσης, η εμφύτευση των μιγαδικών αριθμών στο επίπεδο και η εμφύτευση των φυσικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο μέσω της αναλυτικής θεωρίας των αριθμών. Αυτού του είδους η θεμελιακή δραστηριότητα γονιμοποίησε ολόκληρους κλάδους των μαθηματικών και επιπρόσθετα έριξε φως στα βασικά οντολογικά ερωτήματα.

Μερικές φορές οι εξελίξεις μέσα στα μαθηματικά οδηγούν σε ασάφειες σχετικά με το τι είναι μια έννοια. Είναι διάσημο το γεγονός ότι η εργασία πάνω στα θεμέλια της ανάλυσης οδήγησε σε ασάφειες γύρω από το τι ακριβώς είναι η συνάρτηση καταλήγοντας τελικά στη σύγχρονη έννοια της συνάρτησης ως μία αντιστοιχία μεταξύ συνόλων (αντίθετα με την έννοια της συνάρτησης ως κανόνα ή τύπο). Διακυβεύονταν η ορθή μεθοδολογία και λογική των μαθηματικών. Σε ένα ακόμα παράδειγμα, η ανακατασκευή της ιστορίας στο Lakatos (1976) δείχνει πώς μια σειρά 'αποδείξεων και ανασκευών' οδήγησε σε ενδιαφέρουσες και σημαντικές ερωτήσεις για το τι είναι ένα πολύεδρο. Οι ερωτήσεις είναι τουλάχιστον εν μέρει οντολογικές, σχετικά με την ουσία των διαφόρων μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών.

Αυτή η ομάδα θεμάτων τονίζει την *ερμηνευτική* φύση της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Η δουλειά εδώ είναι να καταλάβουμε τι *είναι* μια δοσμένη μαθηματική έννοια, και τι μας *λέει* μία επέκταση του μαθηματικού λόγου. Η μελέτη του Lakatos, για παράδειγμα, ξεκινά με μια 'απόδειξη' αποτελούμενη από ένα νοερό πείραμα στο οποίο κάποιος μετακινεί μια έδρα ενός δοσμένου πολυέδρου, επεκτείνει το υπόλοιπο προς τα έξω σε μια επίπεδη επιφάνεια, και μετά τραβά γραμμές, κόβει και μετακινεί τα διάφορα μέρη – κρατώντας λογαριασμό – κατά τη διάρκεια της εργασίας. Η ανάπτυξη είναι πειστική και έχει το άρωμα μιας απόδειξης, αλλά δεν είναι ξεκάθαρο πώς αυτός ο κατάφωρα δυναμικός λόγος θα γίνει κατανοητός. Η γλώσσα αυτή δεν ταιριάζει εύκολα στο καλούπι των σύγχρονων αναπτύξεων της λογικής. Ποια είναι η λογική μορφή του λόγου και ποια είναι η λογική του; Ποιά είναι η οντολογία της; Το σύνολο σχεδόν των μετέπειτα μαθηματικών/φιλοσοφικών εργασιών στρέφονται ακριβώς σ' αυτές τις ερωτήσεις.

Επιστρέφοντας πιο κοντά στην κυρίαρχη τάση, ας θεωρήσουμε τη βασική γλώσσα του απειροστικού λογισμού και της πραγματικής ανάλυσης. Η επιφανειακή γραμματική θα υποδείκνυε ότι η έκφραση 'dx' είναι ένας ενικός όρος, όπως μια αντωνυμία ή ένα κανονικό ουσιαστικό που υποδηλώνει ένα αντικείμενο. Παρ' όλα αυτά χρειάσθηκε μια σημαντική μαθηματική ανάπτυξη για να δούμε ότι το 'dx' δεν δηλώνει τίποτα. Δεν έχει αυτούσια σημασία. Ενώ η έκφραση 'dx/dy' είναι ένας ενικός όρος και πράγματι δηλώνει κάτι – μια συνάρτηση και όχι ένα πηλίκο. Η ιστορία της ανάλυσης δείχνει πόσο δύσκολο και βασανιστικό έργο είναι να δείξεις ακριβώς, τι σημαίνουν εκφράσεις σαν και αυτές.[10]

Φυσικά τα μαθηματικά μπορούν πολλές φορές να τα πηγαίνουν πολύ καλά και χωρίς αυτήν την ερμηνευτική φιλοσοφική δουλειά, και μερικές φορές αυτό το ερμηνευτικό έργο είναι πρόωρο και αποσπασματικό στη καλύτερη περίπτωση. Η περίφημη και λογικά διεισδυτική κριτική της ανάλυσης του George Berkeley είχε αγνοηθεί σε μεγάλο βαθμό από τους μαθηματικούς – αρκεί να ήξεραν 'πως να συνεχίσουν' όπως θα το έθετε ο Wittgenstein. Στην παρούσα φάση η ερώτηση είναι αν ο μαθηματικός πρέπει να σταματήσει τα μαθηματικά μέχρις ότου έχει λύσει πλήρως το πρόβλημα της σημασιολογίας για τον μαθηματικό λόγο. Σίγουρα όχι. Περιστασιακά, όμως, διάφορες τάσεις ανάμεσα στους μαθηματικούς οδηγούν στο ερμηνευτικό φιλοσοφικό/σημασιολογικό εγχείρημα. Κάποιες φορές ο μαθηματικός δεν είναι σίγουρος πώς να «συνεχίσει όπως πριν», ούτε είναι σίγουρος ποιες είναι ακριβώς οι έννοιες. Επιπλέον, δεν είμαστε ποτέ βέβαιοι ότι το ερμηνευτικό έργο είναι ακριβές και πλήρες, και ότι δεν καραδοκούν άλλα προβλήματα στην πορεία.

[10][Σ.τ.Ε.] Πρέπει ωστόσο να σημειώσουμε εδώ ότι στη μη συμβατική ανάλυση του Robinson, το 'dx' σημαίνει έναν υπερπραγματικό αριθμό, που μπορεί να είναι διάφορος του μηδενός, και που είναι μικρότερος από κάθε συμβατικό θετικό πραγματικό αριθμό. Είναι δηλαδή ένα 'απειροστό'.