

Η ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ  
ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

MICHAEL DUMMETT

Ο Michael Dummett διδάσκει φιλοσοφία των μαθηματικών στην Οξφόρδη. Έγραψε ένα ογκώδες βιβλίο πάνω στον Frege (1973) και ασχολήθηκε με τον ιντουισιονισμό. Το παρόν κείμενό του είναι το 7ο Κεφάλαιο του βιβλίου *Elements of Intuitionism* (Oxford University Press, 1977: 360-389). Ο Dummett πλησιάζει τον ιντουισιονισμό μέσω του ύψιπρου Wittgenstein και υποστηρίζει (1) ότι η χρήση καθορίζει το νόημα ενός όρου, ειδικά των λογικών σταθερών («και», «ή», «όχι», που συνδέουν αποφάνσεις, και των ποσοδεικτών «όλα» και «υπάρχει») και (2) κάθε μεμονωμένη απόφαση (sentence) έχει καθορισμένο περιεχόμενο που εξαρτάται από τα ουσιαστικά μέρη της, επομένως, είναι ανεξάρτητο από άλλες αποφάνσεις που δεν περιέχουν αυτά τα μέρη ('The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic' *Philosophy of Mathematics*, ed. by P. Benacerraf and H. Putnam, Cambridge University Press, 1983: 98 και 104 αντίστοιχα). Οι δύο θέσεις θα συγκρούονταν, αν η έννοια της χρήσης ήταν καθορισμένη. Ο Dummett γράφει ότι η πρώτη συνθήκη «περιορίζει την επιλογή του γνωρισματος των αποφάνσεων που θα θεωρηθούν κεντρικές στη θεωρία του νόηματος» (στο ίδιο, σ. 105). Ποιο είναι αυτό το γνώρισμα; Γνωρίζουμε το νόημα μιας δήλωσης (statement) που κάνουμε χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη απόφαση, όταν «κατέχουμε μια μέθοδο απόφασης», δηλ. μία μέθοδο που για μας επιτρέπει να αναγνωρίσουμε την παρουσία των συνθηκών αλήθειας της δήλωσης. Μία τέτοια μέθοδος είναι η απόδειξη της μαθηματικής δήλωσης ή η επαλήθευση της μη μαθηματικής δήλωσης. Η άποψη αυτή (i) είναι αντιρεαλιστική, γιατί ο ρεαλιστής δέχεται ότι η δήλωση έχει νόημα ακόμα κι όταν τα άτομα δεν μπορούν να αναγνωρίσουν την παρουσία αυτών των συνθηκών· (ii) αντικαθιστά την αλήθεια με την απόδειξη και την ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων με την κατασκευή τους· (iii) προέρχεται από τη φιλοσοφία της κοινής γλώσσας, όπως αποδεικνύει το γεγονός ότι ο σημειολογικός ορισμός του Tarski (βλ. το άρθρο του στην παρούσα συλλογή) πρέπει να τροποποιηθεί, ώστε να προνοεί για ρηματικούς χρόνους και για τροπικούς τελεστές (στο ίδιο, σ. 115) ή, όπως πιστεύω, να εγκαταλειφθεί εντελώς. Τέλος, κατά την προσαρμογή του να προτείνει αξιώματα για την ιντουισιονιστική λογική, ο Dummett θεωρεί ότι χρειαζόμαστε δύο έννοιες της απόδειξης: η πρώτη θα σημαίνει «ακαταμάχητο τεκμήριο για τη διεύαση μιας πρότασης» και θα είναι «αποτιλιωματικό μέσο για την

ανεύρεση της κανονικής απόδειξης» – της οποίας η σημασία είναι «αποτείνη» (1983: 122-3) και οπωσδήποτε αποκλείει την ερμηνεία της «αν Α, τότε Β ή Γ» ως υποθετικού λόγου δευτέρου είδους. Για άλλες απόψεις, βλ. τα άρθρα του Benacerraf και του Henkin, που περιλαμβάνονται στην παρούσα συλλογή.

H.X.

Όπως τόνισε ο Kneisel, η ιντουισιονιστική φιλοσοφία των μαθηματικών περιλαμβάνει δύο θέσεις: μία θετική και μία αρνητική. Η θετική θέση λέει ότι ο ιντουισιονιστικός τρόπος ερμηνείας των μαθηματικών εννοιών και λογικών πράξεων έχει συνοχή και είναι νόμιμος, ότι δηλ. τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά αποτελούν κατανοητό θεωρητικό σύνολο. Η αρνητική θέση λέει ότι ο κλασικός τρόπος ερμηνείας των μαθηματικών εννοιών και λογικών πράξεων δεν έχει συνοχή και δεν είναι νόμιμος, ότι τα κλασικά μαθηματικά, μολονότι περιέχουν με διαστρεβλωμένη μορφή πολλά αξιόλογα πράγματα, είναι ακατανόητα με την τωρινή τους μορφή. Φυσικά η αρνητική θέση υποβοηθά τη θετική: αν στην καρδιά των κλασικών μαθηματικών υπάρχει ψεγάδι, τότε, ακόμα και αν η ιντουισιονιστική ανασυγκρότηση των μαθηματικών δεν είναι ορθή σε κάθε της λεπτομέρεια, σωστό θα είναι κάτι που θα της μοιάζει, εκτός και αν είναι πλάνη όλα τα μαθηματικά – με εξαίρεση το πιο στοιχειώδες μέρος τους –, κάτι που είναι αδιανόητο. Άλλωστε, αν τα κλασικά μαθηματικά είναι εντάξει, τότε δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος να υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια εντελώς συνεπής κατασκευαστική ανασυγκρότηση των μαθηματικών: αν αποδεικνυόταν αδύνατον να εξηγηθούν φιλοσοφικά οι βασικές έννοιες των ιντουισιονιστικών μαθηματικών με τρόπο που να είναι σταθερές και να μην υπόκεινται σε φαύλη κυκλικότητα, αυτό μπορεί να οφείλεται όχι στο ότι υπάρχει κάποιο λάθος στην επεξεργασία των λεπτομερειών του ιντουισιονιστικού προγράμματος, αλλά στο ότι ήταν παράλογο το ίδιο το σχέδιο ανοικτόδομησης των μαθηματικών πάνω σε κατασκευαστικές βάσεις. Οσοίσο μερικοί, όπως ο ίδιος ο Kneisel, προτιμούν μία εκλεκτική θέση: δέχονται τη θετική ιντουισιονιστική θέση, αλλά απορρίπτουν την αρνητική. Έτσι, μπορεί κανείς να δεχθεί και τα κλασικά και τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, που θα συνυπάρχουν ειρηνικά.

Δεν γνωρίζω επιχειρήματα εναντίον αυτού του εκλεκτικισμού, εκτός από τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούν οι ιντουισιονιστές εναντίον όλων γενικά των κλασικών μαθηματικών: όμως παραμένει το γεγονός ότι αν τα κλασικά μαθηματικά είναι κατανοητά, τότε, ενώ μπορούν να είναι κατα-

νοητά και τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, οσοίσο χάνουν πολλή από τη σημασία τους. Με το να δεχθούμε ως νόμιμες τις κλασικές εξηγήσεις των αποφαντικών τελεστών (sentential operators) και των ποσοδεικτών, δεν αποκλείουμε τις ιντουισιονιστικές εξηγήσεις τους: αλλά τότε δεν είναι σαφής ο λόγος για τον οποίο θα πρέπει να ενδιαφέρεται κανείς να χρησιμοποιεί αποφάνσεις των οποίων οι λογικές σταθερές πρέπει να νοούνται με τον ιντουισιονιστικό τρόπο – εκτός βέβαια αν το θεωρούμε ως άσκηση. Στο 1ο Κεφάλαιο τόνισαμε ότι τα κλασικά μαθηματικά μπορούν να φιλοξενηθούν την έννοια της ίδιας της κατασκευαστικής απόδειξης και δεν υπάρχει λόγος για τον οποίο, ειρδών θέσει κάτι τέτοιο, ο κλασικός μαθηματικός δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει σύμβολα που να παριστούν τη διάξεση και τον υπαρκτικό ποσοδείκτη με την ιντουισιονιστική σημασία, κοντά στις κοινές μαθηματικές σταθερές. Αλλά η έννοια της κατασκευαστικής απόδειξης δεν θα συνέλιπτε με την έννοια της ιντουισιονιστικής απόδειξης. Αυτό φαίνεται εύκολα στην περίπτωση της αρχής του Markov. Αν το ' $P(x)$ ' είναι ένα αποκρίσιμο κατηγορημά των φυσικών αριθμών, και πιστεύουμε ότι έχουμε μία απόδειξη της ' $\forall n \neg P(n)$ ', με την κλασική έννοια, τότε δεν υπάρχει λόγος να μην ισχυριζόμαστε ότι έχουμε μία αποτελεσματική μέθοδο εύρεσης ενός αριθμού ο οποίος ικανοποιεί την ' $P(x)$ ': οσοίσο, αν δεν έχουμε περισσότερες πληροφορίες για τον τρόπο με τον οποίο αποδείχθηκε η ' $\forall n \neg P(n)$ ', δεν έχουμε εξασφαλίσει το ότι η ' $\exists n P(n)$ ', μπορεί να αποδειχθεί ιντουισιονιστικά. Ο ιντουισιονιστής δεν είναι ελεύθερος να αναγνωρίσει κάτι ως αποτελεσματική μέθοδο για την εύρεση ενός αριθμού δεδομένου είδους, επειδή ακριβώς δεν μπορεί να συλλάβει το νόημα που ο κλασικός μαθηματικός θέλει να προσδώσει στις λογικές σταθερές: αν όμως κάποιος πιστεύει ότι μπορεί να συλλάβει αυτά τα νοήματα, τότε δεν έχει λόγο να θεωρεί ότι παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον μέθοδοι που θα αναγνωρισθούν αποτελεσματικές ακόμη και από όποιον δεν μπορεί να συλλάβει αυτά τα νοήματα.

Ο ιντουισιονισμός θέτει λοιπόν δύο φιλοσοφικά ερωτήματα. (1) Κατορθώνουν οι ιντουισιονιστές να δώσουν συνεπές νόημα στις εκφράσεις που χρησιμοποιούν στα μαθηματικά τους και ειδικά στις λογικές σταθερές; (2) Είναι βάσιμη η πεποίθηση ότι τα κλασικά μαθηματικά δεν κατορθώνουν να δώσουν κατανοητό νόημα στις λογικές σταθερές και γενικά στις μαθηματικές εκφράσεις που χρησιμοποιούν; Από τα δύο ερωτήματα, κατά κάποιο τρόπο, το δεύτερο έχει προτεραιότητα και, ασφαλώς, είναι το ύψιθερο.

Είναι φανερό ότι η αρνητική ιντουισιονιστική θέση πρέπει να διαϊζεται σε μία κριτική του τρόπου με τον οποίο υποτίθεται ότι σημασιοδοτούνται τα κλασικά μαθηματικά. Για να είναι δυνατή μία τέτοια κριτική, δεν μπορεί μία οποιαδήποτε καθιερωμένη έκφραση να αιτιολογείται με το αιτιόλο γι-

νός ότι παρατηρείται συχνά· ιδιαίτερα, πρέπει να είναι λάθος το να υποθέτουμε πως αυτό συμβαίνει για οποιοδήποτε δεδομένο σύνολο γενικά αποδεκτών κανόνων συμπερασμού. Είναι βέβαια φανερό ότι υπάρχει αμοιβαία εξάρτηση ανάμεσα στα νοήματα ενός συνόλου λογικών σταθερών και στους κανόνες συμπερασμού που τις διέπουν: απ' αυτό όμως δεν αιτιολογείται ότι οποιοδήποτε τυχόν σύνολο (μη αντιφατικών) κανόνων συμπερασμού έχει ένα πεδίο –ακόμα λιγότερο: ένα μοναδικό πεδίο– νοημάτων για τις λογικές σταθερές του, πεδίο για το οποίο είναι έγκυροι μόνο οι κανόνες συμπερασμού, που μπορούν να παραχθούν από το σύνολο αυτό. Αυτό θα έπρεπε να συμβαίνει αν το να συλλαμβάνει κανείς το νόημα μιας λογικής σταθεράς συνίστατο μόνο στην ετοιμότητα να δεχθούμε ως ορθά εκείνα τα συμπεράσματα στα οποία παρεμβάινει και τα οποία αιτιολογούν παραδείγματα ενός από τους κανόνες σε κάποιο κατάλληλο βιαικό σύνολο κανόνων. Μια τέτοια ιδέα σαγηνεύει τον λογικό, αφού αυτός έχει την τάση να πιστεύει πως οι λογικές σταθερές ενοικούν μόνο στους λογικούς λογισμούς· αλλά βέβαια δεν ενοικούν στους λογισμούς, αφού ο κύριος σχολός τους είναι να μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πραγματικές αποφάσεις, και η πρωταρχική χρήση τέτοιων αποφάσεων δεν είναι η έκθεση παραγωγικών επιχειρημάτων· το παραγωγικό επιχείρημα είναι και πρέπει να υιοθετείται στον πρωταρχικό σκοπό για τον οποίο εκφέρουμε αποφάσεις. Κανένας δεν μπορεί να σκεφτείται ότι το να συλλαμβάνουμε το νόημα μιας τυχούσας απόφασης συνίσταται αποκλειστικά στη γνώση των τρόπων με τους οποίους αυτή θα μπορούσε να παρουσιάζεται σε μια συνεπαγωγή, ως υπόθεση ή ως συμπέρασμα. Μια τέτοια ιδέα είναι περισσότερο αληθοφανής για τις μαθηματικές παρά για τις άλλες αποφάσεις· αυτό συμβαίνει στο βαθμό που, στην περίπτωση τους, μία γενικότερη άποψη ανάγει την κατανόηση μιας απόφασης στη συλλογιστική δύναμη (inferential power). Αν πρωταρχική λειτουργία μιας απόφασης θεωρήσουμε την πληροφορική λειτουργία της, τότε είναι φυσικό να θεωρούμε πως το να συλλαμβάνουμε το νόημά της συνίσταται στο να αντιλαμβανόμαστε το περιεχόμενό της· και τούτο ισοδυναμεί με γνώση των συνθηκών στις οποίες είναι ορθή μία βεβαίωση που κάνουμε όταν εκφέρουμε την απόφαση. Από τον καιρό του Frege έχει αναγνωρισθεί γενικά ότι πρέπει να δοίμε την κατανόηση μιας λέξης ή ενός σημείου ως γνώση εκείνου που καθορίζει τη συμβολή της στο νόημα οποιασδήποτε πρότασης στην οποία μπορεί να παρουσιαστεί. Αυτό πρέπει να ισχύει τόσο για τις λογικές σταθερές όσο και για τις άλλες λέξεις· επομένως, το νόημα της λογικής σταθεράς πρέπει να συνίσταται στη συμβολή του στον καθορισμό της ορθότητας μιας βεβαίωσης που γίνεται με τη βοήθεια μιας απόφασης στην οποία υπεισέρχεται και όχι άμεσα στην εγκυρότητα ή μη εγκυρότητα των δυνατών μορφών συμπερασμού. Η αφελής άποψη του ζητήματος είναι μάλλον και η ορθή: οι κα-

νόνες συμπερασμού αιτιολογούνται ή όχι, ανάλογα με το αν μας μεταφέρουν πάντα από αποφάσεις που θα ήταν ορθό να βεβαιωθούν σε αποφάσεις που έχουν την ίδια ιδιότητα, σύμφωνα με τα νοήματα των εν λόγω λογικών σταθερών.

Αυτό δεν σημαίνει ότι είναι ψευδής η υπόθεση ότι κάποιο δεδομένο σύνολο κανόνων συμπερασμού καθορίζει ένα πεδίο νοημάτων για τις λογικές σταθερές. Για να ισχύει αυτή η υπόθεση, πρέπει να ικανοποιούνται δύο συνθήκες. Πρώτη συνθήκη: η ορθότητα μιας βεβαίωσης που γίνεται με τη βοήθεια μιας απόφασης που περιέχει μία λογική σταθερά, πρέπει πάντα να συμπίπτει με την ύπαρξη της παραγωγής, μέσω εκάινων των συμπερασματικών κανόνων, αυτής της απόφασης από ορθές προεξίμενες οι οποίες δεν περιέχουν καμία από τις λογικές αυτές σταθερές. Δεύτερη συνθήκη: δεν πρέπει να υπάρχει καμία παραγωγή από παρόμοιες προεξίμενες μέσω αποφάσεων στις οποίες υπεισέρχονται οι σταθερές ενός συμπεράσματος που δεν περιέχει καμία σταθερά και του οποίου η βεβαίωση δεν θα ήταν ορθή. Το δεύτερο αίτημα είναι, στην πραγματικότητα, το αίτημα: η προσθήκη των λογικών σταθερών στο τμήμα της γλώσσας που τις στερείται, πρέπει να συνιστά συντηρητική επέκταση εκείνου του τμήματος (ως προς την ιδιότητα της ορθής βεβαίωσιμότητας). Το πρώτο αίτημα είναι αναγκαίο, αν θέλουμε να παρακούν οι κανόνες συμπερασμού –δεδομένων των νοημάτων των αποφάσεων που δεν περιέχουν λογικές σταθερές– ώστε να καθορίζουν τις συνθήκες για την ορθή βεβαίωσιμότητα αποφάσεων που περιέχουν λογικές σταθερές· το δεύτερο αίτημα χρειάζεται, αν θέλουμε να μπορούμε να παίρνουμε ως δεδομένα τα νοήματα αποφάσεων που δεν περιέχουν λογικές σταθερές. Το αν αυτά τα αίτηματα ικανοποιούνται ή όχι, εξαρτάται βέβαια και από τα νοήματα των αποφάσεων που δεν περιέχουν λογικές σταθερές και από τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι αποφάσεις που περιέχουν λογικές σταθερές· επομένως, δεν κρίνεται μόνο από την εξέταση των κανόνων συμπερασμού. Πάντως αποκλείουν την παραδοχή ότι η διατύπωση οποιασδήποτε συνεπούς συνόλου κανόνων συμπερασμού πάνω στο φόντο οποιασδήποτε γλώσσας αρκεί για να καθορίσει τα νοήματα των λογικών σταθερών.

Το ερώτημά μας είναι: πώς είναι δυνατόν να ασκήσουμε κριτική εναντίον γενικά αποδεκτών κανόνων συμπερασμού; Αν κάθε αυθαίρετο σύνολο κανόνων συμπερασμού καθορίζει ένα πεδίο νοημάτων για τις λογικές σταθερές, ή ένα πεδίο αποδεκτών συνόλων από νοήματά τους, τότε θα ήταν αδύνατη μία τέτοια κριτική· αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία γλώσσα για την οποία δεν ισχύει η πρώτη από τις δύο συνθήκες, η οποία αφορά το σύνολο των κανόνων συμπερασμού που δέχονται γενικά όσοι τη μιλούν. Σ' αυτή την περίπτωση, πρέπει να παραδεχθούμε ότι για να γνωρίζει κανείς τα νοήματα των λογικών σταθερών, δεν πρέπει να γνωρίζει μονάχα τους κανόνες συμπερασμού· πρέπει ακόμα να γνωρίζει



και συνθήκες για την ορθότητα βεβαιώσεων που γίνονται με τη βοήθεια αποφάνσεων που περιέχουν λογικές σταθερές οι οποίες δεν μπορούν να διατυπωθούν με τη βοήθεια αυτών των κανόνων. Αυτό διόλου δεν σημαίνει πως οι ίδιοι οι κανόνες συμπερασμού υπόκεινται σε κριτική. Τι συμβαίνει λοιπόν αν δεν ισχύει ούτε η δεύτερη συνθήκη; Αν ερμηνεύσουμε εντελώς κυριολεκτικά την προηγούμενη διατύπωση του αιτήματος, τότε αυτή συνεπάγεται μια σοβαρή ατέλεια στους κανόνες συμπερασμού, αφού μ' αυτούς μπορούμε να κατασκευάσουμε μία παραγωγική [αποδεικτική] αλυσίδα που οδηγεί από ορθές αρχικές υποθέσεις σε εσφαλμένο συμπέρασμα. Αλλά, εκτός εάν η εισαγωγή εκείνων των κανόνων συμπερασμού κάνει τη γλώσσα ασυνεπή, δεν χρειάζεται να δούμε το ζήτημα με αυτό τον τρόπο· μπορούμε να το ερμηνεύσουμε ως αίτημα που συνεπάγεται το ότι, όσον αφορά την πλήρη γλώσσα (στην οποία περιλαμβάνονται οι λογικές σταθερές), η αντίληψη της συνθήκης για την ορθή βεβαιωσιμότητα μιας απόφανσης στην οποία δεν παρουσιάζονται οι λογικές σταθερές με τις οποίες δουλεύουμε, είναι ανεπαρκής και απαιτεί συμπλήρωση ώστε να είναι δυνατή μία παραγωγή του είδους που αναφέραμε. Έτσι ερμηνευμένο, το γεγονός ότι δεν ισχύει το δεύτερο αίτημα σημαίνει μονάχα ότι χωρίς να αναφερθούμε στους κανόνες συμπερασμού δεν μπορούμε να συλλάβουμε την πλήρη συνθήκη για την ορθότητα μιας βεβαίωσης που γίνεται μέσω μιας απόφανσης. Και τι μ' αυτό;

Πάνω σ' αυτό το σημείο υπάρχει αντιμαχία. Πολλοί θα υποστήριζαν ότι δεν υπάρχει τίποτε το επίμεμπτο στην υπόθεση ότι υφίσταται μία τέτοια κατάσταση. Και, αν έχουν δίκιο, τότε αληθεύει ότι αυτοί που μιλούν μία γλώσσα μπορούν να υιοθετήσουν *οποιοδήποτε* σύνολο κανόνων συμπερασμού χωρίς να είναι ασυνεπείς. Το να υιοθετηθούν αυτοί οι κανόνες συμπερασμού μπορεί από μόνο του να μην καθορίζει τα νοήματα των λογικών σταθερών· αλλά θα έχουν κάποιο πεδίο νοημάτων που θα εναρμονίζεται με αυτούς τους κανόνες και θα καθορίζεται από τους ίδιους τους κανόνες και από τις παραπάνω συνθήκες, αλλά δεν θα μπορεί να χαρακτηριστεί με παραγωγικά επιχειρήματα που αναγνωρίζονται από όσους μιλούν τη γλώσσα ως εκείνα για τα οποία είναι ορθή η βεβαίωση μιας απόφανσης που περιέχει μια λογική σταθερά. Με τον ίδιο τρόπο, αν για τη γλώσσα αυτή δεν ισχύει το δεύτερο αίτημα, τότε με το να υιοθετηθούν αυτοί οι κανόνες συμπερασμού, θα έχουν τροποποιηθεί τα νοήματα και αυτών ακόμα των αποφάνσεων που δεν περιέχουν τις λογικές σταθερές. Ωστόσο, στη γλώσσα με τη νέα συγκρότηση, τέτοιου είδους αποφάνσεις δεν θα πάψουν να έχουν εντελώς καθορισμένα νοήματα· μόνο που η συνθήκη για την ορθότητα μιας βεβαίωσης που γίνεται με το να εκφέρουμε μία τέτοια απόφανση θα περιλαμβάνει περιοτάσεις στις οποίες υπάρχει ένα παραγωγικό επιχειρήμα που την έχει ως συμπέρασμά του και, επομένως, δεν είναι πλήρως κατανοη-

τή χωρίς αναφορά στους κανόνες συμπερασμού. Ούτε μία τέτοια άποψη αφήνει περιθώρια στην κριτική της αποδοχής τυχόντων κανόνων συμπερασμού, τουλάχιστον εφόσον αυτοί είναι τριπλά μη αντιφατικοί.

Η άποψη που μόλις σκιαγραφήσαμε είναι μία μορφή γλωσσικού ολισμού: δεν μπορούμε να κατανοήσουμε πλήρως καμία απόφανση της γλώσσας, αν δεν κατανοήσουμε τη γλώσσα στο σύνολό της. Η κατανόηση μιας απόφανσης περιλαμβάνει την ετοιμότητα να αναγνωρίζει κανείς κάθε δυνατό μέσο με το οποίο αυτή θα μπορούσε να παρηχθεί λογικά από αληθείς αποφάνσεις· και επειδή δεν μπορούμε να περιορίσουμε τις αποφάνσεις που θα μπορούσαν να παρουσιαστούν στη διάρκεια μιας τέτοιας παραγωγής, δεν υπάρχει γνήσιο απόκασμα της γλώσσας για το οποίο μπορούμε να πούμε ότι, όταν γίνει κανείς κάτοχός του, τότε θα έχει φτάσει στην πλήρη κατανόηση εκείνης της απόφανσης. Σύμφωνα μ' αυτή την άποψη, η γλώσσα είναι ένα παιχνίδι που διέπεται από ένα εξαιρετικά πολύπλοκο σύστημα κανόνων και, για να μπορεί κανείς να συλλάβει τη σημασία οποιασδήποτε κίνησης στο παιχνίδι, πρέπει να γνωρίζει όλους τους κανόνες.

Ο εντυπωσιασμός συμφωνεί με τον πλατωνισμό στην απόρριψη μιας τέτοιας ολιστικής αντίληψης της γλώσσας. Ο ολιστής δεν θα ήταν διατεθειμένος να ξηγάσει τη γλώσσα των μαθηματικών χωριστά από την ολόκληρη γλώσσα· από τη γλώσσα λ.χ., των φυσικών επιστημών· αλλά αν το έκανε, τότε ασφαλώς θα ανηχόταν μία ερμηνεία της σημασίας (significance) των μαθηματικών αποφάνσεων βασισμένη στη δυνατότητα απόδειξής τους με κλασικούς διαλογισμούς· οι μορφές της επιχειρηματολογίας που χρησιμοποιεί απλώς ο διαλογισμός δεν θα χρειάζονταν αιτιολόγηση με κάτι άλλο και θα καθόριζαν τα νοήματα των μαθηματικών εκφράσεων. Έτσι ο ολισμός, στην πραγματικότητα, δεν διαφέρει από το φορμαλισμό, δηλ. τη θεωρία σύμφωνα με την οποία οι μαθηματικοί τύποι δεν είναι γνήσιες αποφάνσεις και επομένως δεν έχουν το είδος του περιχομένου που χρειάζεται για να γίνει μία βεβαίωση, μολονότι, βέβαια, το παιχνίδι που παίζουν οι μαθηματικοί με αυτές τις ψευδο-αποφάνσεις έχει τους δικούς του κανόνες τους οποίους οι μαθηματικοί έχουν το δικαίωμα να θεσπίζουν όπως τους αρέσει, χωρίς να λογοδοτούν σε κάποιον άλλο· επομένως δεν υπάρχει έννοια αλήθειας των μαθηματικών αποφάνσεων, που να διαφέρει από την παραγωγικότητά τους μ' τη βοήθεια των κανόνων που υιοθετήθηκαν, και αναφορικά με τους οποίους ίσως να απαιτήσουμε από τους αποδεικτικούς κανόνες να διατηρούν την αλήθεια. Αυτού του είδους η τυποκρατία που αρνείται ότι οι μαθηματικοί τύποι έχουν γνήσιο αποφαντικό νόημα, και ανάγκη τοποθετεί την παραδειγματική μαθηματική πραγματική υπεράνω κάθε κριτικής, και πρέπει να απορριφθεί τόσο από τους εντυπωσιαστές όσο και από τους πλατωνιστές, βάσει του κοινού δόγματός ότι οι μαθημα-

τικές αποφάνσεις έχουν νόημα ανάλογο με το νόημα των άλλων αποφάνσεων και ότι, επομένως, τα μαθηματικά είναι αυτό που φαίνονται, δηλ. ένας τομέας στην αναζήτηση της αλήθειας. Η ουσιαστική αναδίπλωση του ολισμού στην τυποκρατία δεν αποφεύγεται με το να θεωρήσουμε τη μαθηματική γλώσσα ως τμήμα μιας ευρύτερης γλώσσας, όπως φυσικά θα έκανε ο ολιστής· γιατί τότε η μαθηματική θεωρία παύει να έχει ανεξάρτητη σημασία και γίνεται μονάχα ένα πλέγμα τρόπων παραγωγής συμπερασμάτων στο πλαίσιο μιας εμπειρικής θεωρίας· και, δεδομένου ότι η εμπειρική θεωρία ευσταθεί ή απορρίπτεται μόνο στο σύνολό της, δεν μπορεί να υπάρξει ζήτημα σχετικά με το αν τέτοιες παραγωγές είναι αιτιολογημένες αυτές καθ' εαυτές. Στην πράξη, μια τέτοια άποψη δεν διαφέρει από την παραλλαγή της τυποκρατίας που υπογραμμίζει τις εφαρμογές των μαθηματικών θεωριών και σ' αυτές τις εφαρμογές βλέπει εμπειρικές ερμηνείες λογισμών που ήταν προηγουμένως ανερμήνευτοι. Σύμφωνα μ' αυτή την άποψη, μία μαθηματική θεωρία δεν χρειάζεται άλλη αιτιολόγηση εκτός από το ότι 'λειτουργεί' και 'λειτουργεί' μόνο στην περίπτωση που μπορεί να ενσωματωθεί σε κάποια επιτυχή εμπειρική θεωρία· ωστόσο δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε τη συμβολή της μαθηματικής συνιστώσας στη σύνθετη θεωρία, αφού έχει υπόσταση μόνο ως συστατικό του συνόλου.

Αυτή η αντίληψη της γλώσσας είναι ανεπαρκής τόσο από εννοιολογιστική όσο και από πλατωνιστική σκοπιά. Η κατανόηση του περιεχομένου μιας απόφρασης πρέπει να μπορεί να παρουσιασθεί απομονωμένη, σαν να λέγαμε, χωριστά από την υπόλοιπη γλώσσα· αλλιώς δεν θα ελέγχαμε αυτό που λέει η απόφραση, αφού η πολλαπλότητα των τρόπων με τους οποίους η συνθήκη για την ορθότητα μιας βεβαίωσης που γίνεται μέσω αυτής, δεν θα μπορούσε με κανένα τρόπο να αποτελέσει αντικείμενο επισκόπησης. Μ' αυτό δεν ισχυριζόμαστε ότι θα μπορούσε η κατανόηση μιας απόφρασης να υπάρχει αυτοτελώς, χωρίς τη γνώση κάποιου τμήματος της υπόλοιπης γλώσσας· κάθε απόφραση συντίθεται από λέξεις ή σημεία που δεν θα ήταν κατανοητά αν δεν ήταν γνωστός ο τρόπος χρήσης τους τουλάχιστον σε μερικές άλλες αποφάνσεις. Η κατανόηση οποιασδήποτε δεδομένης απόφρασης θα εξαρτηθεί από το πόσο κατέχει κανείς κάποιο τμήμα της γλώσσας, λιγότερο ή περισσότερο εκτεταμένο, ανάλογο με την πολυπλοκότητα ή το βάθος της απόφρασης. Αλλά γι' αυτή την άποψη είναι ουσιαστικό το ότι οι αποφάνσεις μπορούν να καταταχθούν σε μία ιεραρχία ανάλογα με την πολυπλοκότητά τους και ότι μία τέτοια κατάταξη αποτελεί τουλάχιστον μία σχεδόν διάταξη. Δεν χρειάζεται μόνο να έχουμε κάποιο γενικό μοντέλο για εκείνο στο οποίο έγκειται η κατανόηση μιας απόφρασης, αλλά η κατανόηση, όπως την παριστά αυτό το μοντέλο, κάθε συγκεκριμένης απόφρασης πρέπει να μπορεί να προκύπτει από την κατανόηση των λέξεων που τη συγκροτούν, οι οποίες και ερμηνεύονται βάσει του ίδιου του μοντέλου.

Εδώ δεν υπάρχει αντίρρηση στο να υποθέσουμε ότι η κατανόηση κάποιας δεδομένης λέξης εξαρτάται από την κατανόηση κάποιας απλούστερης γλωσσικής έκφρασης. Το πιο φανερό είδος παραδείγματος είναι εκείνο στο οποίο η γνώση του νοήματος κάποιας λέξης εξαρτάται από τη ρητή γνώση κάποιας ρηματικής εξήγησής της· αλλά με αυτή την άποψη θα συμβαίεζόταν εξίσου καλά το να υποστηρίζεται κανείς ότι η κατανόηση αριθμητικών δηλώσεων εξαρτάται από την πρότερη κατανόηση της χρήσης των αριθμητικών (λέξεων που αναφέρονται στους φυσικούς αριθμούς) με τα οποία δίδεται ο πληθικός αριθμός των αντικειμένων ενός ορισμένου είδους, τα οποία ικανοποιούν κάποιο κατηγορημα. Αυτό που θα καθιστούσε ακατανόητη τη λειτουργία της γλώσσας θα ήταν η υπόθεση ότι η σχέση (άμεσης ή μακρινής) εξάρτησης του νοήματος μιας λέξης από τα νοήματα άλλων λέξεων μπορεί να μην ήταν ασυμμετρική, δηλ. όταν κατά την αναζήτηση αυτού που απαιτείται για την κατανόηση μιας δεδομένης απόφρασης και, επομένως, των λέξεών της, οδηγούμαστε σε φαύλο κύκλο. Γι' αυτούς τους δύο συσχετισμένους λόγους – τη δυνατότητα να εξαχθεί το νόημα μιας απόφρασης από τα νοήματα των ορμητικών της και την ασυμμετρία της νοητικής εξάρτησης – δεν μας ικανοποιεί η γενική εξήγηση ότι η κατανόηση του νοήματος κάθε μαθηματικής απόφρασης συνίσταται στην κατάληψη (apprehension) της συνθήκης αποδειξιμότητάς της σύμφωνα με μερικούς αυθαίρετους τρόπους διαλογισμού. Αν, λ.χ., θεωρήσουμε μία διαξενκτική πρόταση, τότε (αν πρέπει πράγματι να θεωρήσουμε την έννοια της αποδειξιμότητας κεντρική στην παράσταση του νοήματος των μαθηματικών αποφάνσεων) η κατανόησή μας της ειδικής συνθήκης για την αποδειξιμότητά της πρέπει να πηγάζει από τη σύλληψη της δομής της και πρώτ' απ' όλα του σχηματισμού της από δύο δευτερεύουσες αποφάνσεις μέσω του συνδετικού «ή». Επομένως, πρέπει να υπάρχει κάποια γενική αντίληψη του τρόπου με τον οποίο η αποδειξιμότητα μιας διαξενκτικής απόφρασης εξαρτάται από την αποδειξιμότητα των δύο υπο-αποφάνσεων που τη συνιστούν. Αν θέ-  
 όαα δεχθούμε τον κλασικό τρόπο σκέψης, δεν είναι δυνατή η διατύπωση μιας τέτοιας γενικής συνθήκης για το αποδειξιμικό μιας διαξενκτικής απόφρασης. Μόνο του όμως αυτό δεν αρκεί ώστε να δείξει ότι ο κλασικός διαλογισμός είναι φορτωμένος, αφού δεν μπορούμε χωρίς άλλο να υποθέσουμε ότι η αποδειξιμότητα είναι η ορθή έννοια με την οποία πρέπει να αναπαριστήσουμε την κατανόηση των μαθηματικών αποφάνσεων. Δείχνει όμως ότι δεν μπορούμε να δώσουμε μια γενική εξήγηση της σύλληψης της σημασίας των μαθηματικών αποφάνσεων στηρημένοι στη γνώση των συνθηκών για την αποδειξιμότητά τους μέσω καθορισμένων τρόπων διαλογισμού (όπως θα μπορούσε να κάνει ο ολιστής, αν ήταν διατιθεμένος να θεωρήσει τη γλώσσα των μαθηματικών ξεχωριστά), εκτός αν αυτοί οι τρόποι διαλογισμού ικανοποιούν μία αρκετά περιοριστική συνθήκη: δηλ. να μας επιτρέ-

πουν να εξηγήσουμε πώς μπορούμε να καθορίσουμε τη συγκεκριμένη συνθήκη για την αποδειξιμότητα κάθε επιμέρους απόφασης από την εσωτερική σύνθεσή της, όπου η σύλληψη των νοημάτων των λέξεων που τη συνιστούν εξηγείται και πάλι από το ίδιο μοντέλο, δηλ. βάσει της συμβολής τους στις συνθήκες αποδειξιμότητας των αποφάσεων στις οποίες εμφανίζονται.

Αυτή η αντι-ολιστική αντίληψη της γλώσσας, που επισημάναμε ότι είναι κοινή στην ιντουισιονιστική και στην πλατωνιστική φιλοσοφία των μαθηματικών, επιβάλλει στους κανόνες συμπερασμού να αιτιολογούνται βάσει κάποιας σημασιολογικής έννοιας λογικής συνέπειας. Όταν ο λογικός προσπαθεί να βρει μία σημασιολογία ως προς την οποία ένα δεδομένο λογικό σύστημα είναι εύστοχο (sound) και πλήρες, δεν αναζητά μόνο έναν αλγεβρικό χαρακτηρισμό της σχέσης παραγωγιμότητας του συστήματος εν αντιθέσει προς το χαρακτηρισμό μέσω της θεωρίας των αποδείξεων: πρέπει να ξεχωρίσουμε τις καθαυτό σημασιολογικές θεωρίες (όπως, λ.χ., αυτή στην οποία αποβλέπουν τα δέντρα του Beth) από τα συστήματα αλγεβρικής αποτίμησης (όπως είναι η τοπολογική ερμηνεία της ιντουισιονιστικής λογικής, λ.χ., ως προς την πραγματική ευθεία.) Αν υπάρχει η δυνατότητα να διακρίνουμε ανάμεσα σε μία σημασιολογική θεωρία και σε ένα καθαρά αλγεβρικό σύστημα αποτίμησης, τότε αυτή θεμελιώνεται στο γεγονός ότι η σημασιολογική θεωρία, αντίθετα προς την καθαρά αλγεβρική, συνδέεται με τον τρόπο με τον οποίο σημασιοδοτούνται και οι λογικές και οι μη λογικές εκφράσεις. Σύμφωνα με την άποψη αυτή, ένα σύστημα αποτίμησης συνιστά γνήσια σημασιολογία μόνο στην περίπτωση που αυτό μπορεί να επεκταθεί ώστε να γίνει αληθοφανής θεωρία του νοήματος για τη γλώσσα. Αυτό σημαίνει ότι η ίδια η προτεινόμενη σημασιολογική θεωρία πρέπει να κριθεί ανάλογα με το αν μπορεί πάνω της να οικοδομηθεί μία αληθοφανής θεωρία του νοήματος. Ακριβώς όπως η τυποποίηση κάποιου τμήματος της λογικής πρέπει να κριθεί ανάλογα με το αν μπορεί να αποδειχθεί εύστοχη και, αν είναι δυνατόν, πλήρης ως προς κάποια σημασιολογική θεωρία, έτσι και η ίδια η σημασιολογική θεωρία πρέπει να κριθεί με κριτήρια που δεν ανήκουν στη λογική με τη στενή σημασία αλλά στη φιλοσοφία της γλώσσας. Από αυτή τη σκοπιά η γλωσσική πρακτική γενικά και ειδικά η αποδοχή τρόπων συμπερασμού δεν αιτιολογούν τον εαυτό τους. Η γλωσσική πρακτική έχει συνοχή μόνο αν μπορούμε να βρούμε κάποια εφαρμόσιμη θεωρία του νοήματος, κάποιο μοντέλο για αυτό στο οποίο συνίσταται η κατανόηση μιας απόφασης και για το πώς αυτή η κατανόηση προκύπτει από την κατανόηση των λέξεων που τη συγκροτούν, μοντέλο με το οποίο μπορεί να αιτιολογηθεί εκείνη η πρακτική: αν δεν μπορούμε, τότε η πρακτική πρέπει να αναθεωρηθεί, ανεξάρτητα από το πόσο είναι καθιερωμένη.

Οι μορφές διαλογισμού που χρησιμοποιούν τα κλασικά μαθηματικά, δηλ.

αυτές που ενσαρκώνει η κλασική λογική, μπορούν να αιτιολογηθούν μόνο από μία δίτημη σημασιολογία ή, τουλάχιστον, από ένα σύστημα σημασιολογικής αποτίμησης του οποίου τα στοιχεία αποτελούν μία άλγεδρα του Boole. Η γενίκευση σε αυθαίρετη άλγεδρα του Boole χρειάζεται για την περιπτώση στην οποία θεωρούμε πως η μαθηματική θεωρία δεν έχει μόνο ένα κύριο μοντέλο, αλλά περιλαμβάνει και αλήθειες που ισχύουν σε καθένα από τα εξίσου αποδεκτά μοντέλα ενός φάσματος: κάθε στοιχείο του συστήματος αποτίμησης θα συμπίπτει με το σύνολο των μοντέλων στα οποία αληθεύει κάποια δεδομένη απόφαση της θεωρίας, και το σύνολο όλων των αποδεκτών μοντέλων θα είναι το μόνο προσδιορισμένο στοιχείο. Ένας ωραίος πλατωνισμός, λ.χ., δείχνει ότι έχουμε μία προκαταρκτική εποπτεία της μαθηματικής δομής που προσπαθούμε να περιγράψουμε καθώς μελετάμε τη θεωρία των συνόλων, μία εποπτεία που καθορίζει το κύριο μοντέλο για εκείνη τη θεωρία μέχρι ισομορφισμού: επομένως είναι καθορισμένη η αλήθεια ή το ψεύδος κάθε συνολοθεωρητικής δήλωσης: η ανεξαρτησία της υπόθεσης του συνεχούς και άλλων δηλώσεων αντανακλά μόνο το γεγονός ότι δεν κατορθώσαμε να διασαφηνίσουμε την εποπτεία μας ιερτά, ώστε το σύστημα των αξιωμάτων μας να εννοματώνει όλα τα χαρακτηριστικά της αλήθειας. Μία εναλλακτική άποψη, που δεν θα παρενοχλούσε την κλασική λογική, θα απέδιδε τα αποτελέσματα που αφορούν την ανεξαρτησία σε μία απροσδιοριστία της αντίληψής μας για τις μαθηματικές δομές που περιγράφει η θεωρία μας: σύμφωνα με αυτή την άποψη, δεν έχουμε καν στοιχειώδη ή αδιατάκτο λόγο για να προτιμήσουμε το ένα ή το άλλο μοντέλο, και οι δομές που περιγράφουμε πρέπει να θεωρηθούν ότι συμπίπτουν με όλα τα μοντέλα του υπάρχοντος αξιωματικού συστήματος ή με όσα είναι ορισμένου είδους (λ.χ. όλα όσα δίνουν ένα σταθεροτυπικό μοντέλο των φυσικών αριθμών): επομένως, θα υπάρχουν συνολοθεωρητικές δηλώσεις που δεν θα είναι ούτε απόλυτα αληθείς ούτε ισαπόλυτα ψευδείς (αλλά που είναι αληθείς σε μερικά μοντέλα και ψευδείς σε άλλα). Από ιντουισιονιστική σκοπιά, η διάκριση ανάμεσα στις δύο αυτές απόψεις είναι ασήμαντη. Και για τις δύο, βασική σημασιολογική έννοια είναι η αλήθεια σε ένα μοντέλο, και διαφέρουν μόνο ως προς τον αριθμό των επιτρεπών μοντέλων για μία δεδομένη θεωρία: και για τις δύο, η κλασική λογική είναι η λογική που αιτιολογείται από τη σημασιολογία η οποία ιστορική από μία σωστή θεωρία του νοήματος για τη γλώσσα των μαθηματικών.

Ήταν σκόπιμα ασαφής ο ισχυρισμός που προδλήθηκε προηγουμένως ότι το να συλλάβει κανείς το νόημα μιας απόφασης πρέπει να ταυτίζεται με μία κατάληψη της συνθήκης στην οποία μία βεβαίωση που κάναμε με τη βοήθειά της είναι ορθή. Είναι προφανές ότι ουσιαστικό για την έννοια μιας βεβαίωσης είναι το να μπορεί να είναι ορθή ή λανθάνουσα και, επομένως, στο βαθμό που θεωρούμε ότι η βεβαίωση είναι ο πρωτογενής τρόπος χρήσης



των αποφάνσεων, είναι θεμελιώδες για τη συνολική κατανόηση της γλώσσας το ότι οι αποφάνσεις μπορούν να είναι αληθείς ή ψευδείς – όπου μία απόφαση είναι αληθής αν με το να την εκφέρει κανείς μπορεί να κάνει μία ορθή βεβαίωση και ψευδής αν μία τέτοια βεβαίωση θα ήταν λανθάνουσα. Αλλά, μέσα σ' αυτό το γενικό πλαίσιο, είναι δυνατές πολλές διαφορετικές αντιλήψεις του τι σημαίνει να λέμε ότι μία βεβαίωση είναι ορθή, και επομένως του ποια είναι η έννοια της αλήθειας που ταυτίζεται στις αποφάνσεις μας. Είναι ουσιαστικό γνώρισμα οποιασδήποτε θεωρίας του νοήματος από την οποία εξηγείται μία σημασιολογία που επικυρώνει την κλασική λογική το ότι κάθε απόφασή της θεωρείται ότι έχει μία καθορισμένη τιμή αλήθειας, ανεξάρτητα από το αν γνωρίζουμε αυτή την τιμή ή όχι, ή αν διαθέτουμε τα μέσα για να την ανακαλύψουμε. Αν χρησιμοποιούσαμε μία απροκάλυπτα δίτιμη σημασιολογία, αυτό σημαίνει ότι κάθε απόφαση είναι σαφώς αληθής ή ψευδής, ανεξάρτητα από τη γνώση μας ή τα μέσα της γνώσης μας: αν θεωρούμε ότι μία απόφαση έχει νόημα, όταν συσχετίζεται με ένα φάσμα μαθηματικών δομών (μοντέλων), τότε αυτό ισοδυναμεί με το να πούμε ότι η αλήθεια ή το ψεύδος της απόφασης είναι καθορισμένα σε κάθε ένα από τα αποδεκτά μοντέλα.

Αν συμβαίνει πραγματικά να διαθέτουμε ένα μέσο για να καθορίζουμε την τιμή αλήθειας κάθε απόφασης της γλώσσας μιας δεδομένης μαθηματικής θεωρίας, τότε δεν έχει σημασία το γεγονός ότι αυτή η τιμή αλήθειας είναι κατ' αρχάς ανεξάρτητη από τη γνώση μας: πρέπει όμως να αναγνωρίσουμε ότι και για αρκετά στοιχειώδεις μαθηματικές θεωρίες, όπως είναι η πρωτοβάθμια αριθμητική, υπάρχουν αποφάνσεις για τις οποίες όχι μόνο δεν γνωρίζουμε την τιμή αλήθειας, αλλά μπορεί και να μην έχουμε τα μέσα να τη γνωρίσουμε. Δεν υπάρχει αργότερο λόγος να υποθέσουμε ότι οι συλλογιστικοί τρόποι που είμαστε ικανοί να κατανοήσουμε και να αναγνωρίσουμε ως έγκυρους είναι αρκετά ισχυροί, ώστε να επιτρέψουν την απόδειξη ή την απόδειξη του εναντίου κάθε αριθμητικής δήλωσης ή ακόμη κάθε δήλωσης της οποίας η μορφή περιέχει έναν ποσοδείκτη (δηλ. δήλωση που είναι αποτέλεσμα εφαρμογής ενός μόνο απεριόριστου ποσοδείκτη σε ένα αποκρίσιμο κατηγορημα). Επομένως, με την παραδοχή ότι κάθε τέτοια δήλωση είναι καθορισμένα αληθής ή ψευδής, η έννοια της αλήθειας μιας αριθμητικής δήλωσης δεν πρέπει να εξηγηθεί με τις μεθόδους που διαθέτουμε για να αναγνωρίζουμε την αλήθεια αυτών των δηλώσεων. Αφού οι αποφαντικοί τελεστές οδηγούν από αποκρίσιμες δηλώσεις μόνο σε αποκρίσιμες δηλώσεις, εκείνο το οποίο στην περίπτωση των αριθμητικών δηλώσεων δημιουργεί αυτή την κατάσταση είναι, πρώτ' απ' όλα, η χρήση κατά το σχηματισμό τους της απεριόριστης ποσοποίησης πάνω στους φυσικούς αριθμούς. Δεδομένου ότι η θεωρία του νοήματος που αποτελεί τη βάση των κλασικών μαθηματικών, όπως την αντιλαμβάνεται ο πλατωνι-

στής, απαιτεί η κατανόηση μιας απόφασης να συνίσταται σε μία γνώση της συνθήκης για την αλήθειά της (ή την αλήθειά της σε ένα συγκεκριμένο μοντέλο), να συνίσταται δηλ. στην αντίληψη του τι πρέπει να συμβαίνει ώστε η απόφαση να αληθεύει, πρέπει να κατανοούμε την ποσοποίηση πάνω σε άπειρο πεδίο που δεν σχετίζεται με τα περιορισμένα μέσα που διαθέτουμε για να αναγνωρίσουμε ως αληθείς τις αποφάνσεις που σχηματίζονται από μία τέτοια ποσοποίηση, αλλά οδηγεί [ενν. η θεωρία] σε μία αντίληψη της αλήθειας αυτών των αποφάνσεων ως πράγματος που είναι καθορισμένο αν το έχουν ή δεν το έχουν. Η ουσία της κριτικής που ο εντοπισμομορμής ασκεί στα κλασικά μαθηματικά είναι ο ισχυρισμός ότι ούτε έχουμε ούτε μπορούμε να έχουμε μία τέτοια αντίληψη της μαθηματικής αλήθειας: το ότι υποθέτουμε πως την έχουμε οφείλεται σε μία ψευδαίσθηση που διασίζεται σε κακή αναλογία.

Αν συμφωνήσουμε ότι η κατανόηση μιας απόφασης συνίσταται στην αντίληψη της συνθήκης κάτω από την οποία μπορεί να γίνει μία ορθή βεβαίωση με το να εκφέρουμε την απόφαση, τότε είναι αναμφίβολο ότι μια τέτοια κατανόηση μπορεί να παραισθήσει ως γνώση της συνθήκης αλήθειας της απόφασης. Αλλά αν ρωτήσουμε τι σημαίνει το να αποδώσουμε σε κάποιον μια τέτοια γνώση, δεν είναι προβληματική η απόδοση μιας τέτοιας γνώσης στην περίπτωση όπου η γνώση του συνίσταται στην ικανότητά του να δηλώνει τη συνθήκη αλήθειας της απόφασης με μη κυκλικό τρόπο, δηλ. όταν η γνώση αυτή είναι ρητή ή γνώση που μπορεί να εκφραστεί με λέξεις. Είναι όμως φανερό πως δεν μπορούμε να πάρουμε τη ρητή γνώση αυτού του είδους ως μοντέλο με καθολική εφαρμογή για την κατανόηση του νοήματος των λέξεων, των εκφράσεων και των αποφάνσεων της γλώσσας: είναι αδύνατον να έχουμε ένα μη κυκλικό σύστημα ρηματικών εξηγήσεων για όλες τις λέξεις της γλώσσας, και δεν είναι δυνατόν η γλωσσική δεξιότητα να συνίσταται στην ικανότητα να δίνουμε κυκλικές εξηγήσεις. Επομένως, αν η κατανόηση μιας γλώσσας συνίσταται στην ικανότητα να παράγουμε, για κάθε απόφασή της, τη γνώση της συνθήκης για την αλήθεια της, τότε αυτή η γνώση πρέπει, για πολλές αποφάνσεις, να είναι μόνο ενδιάθετη γνώση: επομένως, πρέπει να διρευνήσουμε τι σημαίνει να αποδίδουμε σε κάποιον μία ενδιάθετη γνώση της συνθήκης αλήθειας μιας απόφασης. Αν τώρα δεχθούμε ότι μπορούμε να καθορίσουμε, από τη γλωσσική ή άλλη συμπεριφορά ενός ανθρώπου, το πότε εκδηλώνει την αποδοχή της αλήθειας μιας απόφασης, τότε δεν είναι δύσκολο να πούμε τι χρειάζεται ώστε κάποιος να γνωρίζει τη συνθήκη για την αλήθεια μιας απόφασης, εφόσον αυτή η συνθήκη είναι τέτοια ώστε να είναι ικανός να αναγνωρίσει ότι ισχύει κάθε φορά που ισχύει πραγματικά: δηλ. θα πρέπει, κάθε φορά που ισχύει η συνθήκη, να μπορεί να δεχθεί την απόφαση ως αληθή. Μπορούμε να ισχυριστούμε κάτι τέτοιο για ελάχιστες αποφάνσεις: αλλά, κάθε φορά που μία

απόφανση είναι αποκρίσιμη, τότε, μολονότι δεν θα αναγνωρίζουμε πάντα ότι η συνθήκη για την αλήθειά της πραγματοποιείται κάθε φορά που ισχύει πραγματικά, ωστόσο μπορούμε, όποτε θέλουμε, να υιοθετήσουμε μία στάση που θα επιτρέψει να αναγνωρίσουμε αν ισχύει ή όχι: έτσι, σε μία τέτοια περίπτωση, μπορούμε να ταυτίσουμε τη γνώση που έχει κάποιος της συνθήκης για την αλήθεια μιας απόφανσης με την ετοιμότητά του να τη δεχθεί ως αληθή κάθε φορά που πραγματοποιείται η συνθήκη για την αλήθειά της και αυτός είναι σε θέση να αναγνωρίσει ότι πραγματοποιήθηκε, μαζί με την πρακτική γνώση της μεθόδου για να υιοθετηθεί αυτή η στάση, όπως μαρτυρεί το ότι αυτός την εφαρμόζει κάθε φορά που έχει κατάλληλο κίνητρο.

Ωστόσο, η απάντηση στο ερώτημά μας «Σε τι συνίσταται η γνώση που έχει όποιος μιλάει τη γλώσσα της συνθήκης για την αλήθεια μιας απόφανσης;» δόθηκε μόνο για περιπτώσεις πολύ ειδικού τύπου. Αν είναι ορθή η παραδοχή, που αποτελεί τη βάση μιας πλατωνιστικής θεωρίας του νοήματος, ότι έχουμε, για όλες τις μαθηματικές δηλώσεις, μία αντίληψη της αλήθειας σύμφωνα με την οποία ισχύει η αρχή των δύο σθενών, τότε θα υπάρχουν πολλές αποφάνσεις που δεν είναι αποκρίσιμες και για τις οποίες η συνθήκη αλήθειας δεν μπορεί να δηλωθεί χωρίς κυκλικότητα. Μεταξύ τους θα υπάρχουν μερικές για τις οποίες θα γνωρίζουμε ότι, αν ισχύει η συνθήκη αλήθειας τους, τότε είναι δυνατόν να βρεθούμε σε θέση να την αναγνωρίσουμε: επιπλέον, γι' αυτές έχουμε μία αποτελεσματική μέθοδο που ενδέχεται να μας επιτρέψει να βρεθούμε σε τέτοια θέση, εφόσον ισχύει η συνθήκη, αλλά για την οποία είναι απεριορίστη η έκταση στην οποία πρέπει να εφαρμοσθεί η μέθοδος, ώστε να έχουμε θετικό αποτέλεσμα: χαρακτηριστική περίπτωση είναι οι αριθμητικές δηλώσεις με ένα μόνο υπαρκτικό ποσοδείκτη. Για κάθε τέτοια δήλωση θα ήταν δυνατόν να ταυτίσουμε τη γνώση της συνθήκης της αλήθειας της με την ικανότητα να αναγνωρίζουμε τη δήλωση ως αληθή, όταν είμαστε σε θέση να το κάνουμε, μαζί με τη γνώση της μεθόδου που οδηγεί σε μία τέτοια αναγνώριση, αν η δήλωση είναι αληθής. Ωστόσο, είναι οσοτείνό αυτό που εμπεριέχει ο ισχυρισμός ότι ο ομιλητής αντιλαμβάνεται πως είναι καθορισμένο το ότι η δήλωση είναι αληθής ή ψευδής: ή —και αυτό είναι ισοδύναμο— ο ισχυρισμός ότι με το να γνωρίζει τη συνθήκη για την αλήθεια μιας τέτοιας δήλωσης, γνωρίζει και τη συνθήκη για την αλήθεια της (κλασικής) άρνησής της (χαρακτηριστικά, μια αριθμητική δήλωση με έναν και μόνο καθολικό ποσοδείκτη). Για μία αριθμητική δήλωση που περιέχει τον καθολικό ποσοδείκτη, δεν υπάρχει εγγύηση ότι, αν αυτή είναι αληθής, θα είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε το ότι έχει εκπληρωθεί η συνθήκη για την αλήθειά της: όχι μόνο δεν διαθέτουμε μέθοδο για να μπορέσουμε να το αναγνωρίσουμε, αλλά από ό,τι γνωρίζουμε, η συνθήκη μπορεί να είναι τέτοια ώστε κανένας άνθρωπος να μην μπορέσει ποτέ να αναγνωρίσει ότι ισχύει. Για τέτοιες δηλώσεις —οτις

οποίες δέβεται ανήκουν όλες οι μαθηματικές δηλώσεις εκτός από τις πολύ απλές— η έννοια μιας γνώσης της συνθήκης για την αλήθειά τους έχει φαντασματικά χάρσι κάθε υπόσταση.

Συνοπτικά: αφού εξ υποθέσεως, από την παραδοχή ότι ισχύει η συνθήκη για την αλήθεια μιας μαθηματικής δήλωσης με την πλατωνιστική έννοια, δεν μπορεί γενικά να συναχθεί ότι πρόκειται για συνθήκη που θα ήταν ποτέ ικανός ένας άνθρωπος να αναγνωρίσει ότι ισχύει, δεν μπορούμε να τεκμηριώσουμε την αντίληψη ότι έχουμε μία ενδιαφέρουσα γνώση αυτού στο οποίο συνίσταται η συνθήκη, αφού τίποτε από αυτά που κάνουμε δεν μπορεί να λογισθεί ως φανέρωση μιας τέτοιας γνώσης.

Η λύση έγκειται στο να εγκαταλείψουμε την αρχή των δύο σθενών και να υποθέσουμε ότι οι δηλώσεις μας είναι αληθείς μόνο στην περίπτωση που αποδείξαμε πως είναι αληθείς, δηλ. αν πρόκειται για μαθηματικές δηλώσεις, όταν τις έχουμε αποδείξει, ή τουλάχιστον διαθέτουμε μία αποτελεσματική μέθοδο για την εξεύρεση μιας απόδειξής τους. Η κατανόηση μιας απόφανσης μπορεί τώρα να θεωρηθεί ότι συνίσταται στη γνώση της συνθήκης κάτω από την οποία αποδείχθηκε αποτελεσματικά ότι μία δήλωση είναι αληθής: δεν προκαλεί πια δυσκολία το ερώτημα σχετικά με το τι συνιστά μια τέτοια γνώση, αφού η σχετική συνθήκη είναι κατ' ανάγκην τέτοια, ώστε να είμαστε ικανοί να την αναγνωρίσουμε: στην πραγματικότητα, το νόημα εξηγείται τώρα με βάση αυτό που όντως μαθαίνουμε να κάνουμε, όταν μαθαίνουμε να χρησιμοποιούμε τις αποφάνσεις της γλώσσας μας.

Αυτού του είδους η επιχειρηματολογία βασίζεται σε μία θεμελιώδη αρχή που, με την ορολογία του Wittgenstein, μπορεί να διατυπωθεί συνοπτικά ως η αρχή ότι η κατανόηση του νοήματος μιας έκφρασης πρέπει να φανερωθεί ολοκληρωτικά στη χρήση αυτής της έκφρασης. Αυτό σημαίνει, όπως ήδη παρατηρήσαμε, ότι η κατανόηση μιας έκφρασης δεν μπορεί γενικά να θεωρηθεί ότι συνίσταται στην ικανότητα να δίνουμε μία ρηματική εξήγησή της και ότι, επομένως, πρέπει να απολεί ενδιαφέρουσα γνώση της σημασίας της στον καθορισμό της συνθήκης για την αλήθεια της απόφανσης στην οποία παρουσιάζεται και η απόδοση ενδιαφέρουσας γνώσης πρέπει πάντα να μπορεί να εξηγηθεί με αυτό που λογαριάζεται ως φανέρωμα αυτής της γνώσης, δηλ. την κατοχή κάποιων πρακτικών ικανοτήτων. Όταν πρόκειται για τη γνώση του νοήματος μιας λέξης, τότε πρέπει η ίδια η πρακτική ικανότητα που συνιστά αυτή τη γνώση να είναι γλωσσική ικανότητα, ικανότητα χρήσης ή αντίδρασης σε αποφάνσεις που περιέχουν τη λέξη με κάποιο τρόπο που να μπορεί, τελικά, να προσδιορισθεί χωρίς να επικαλεσθούμε σημασιολογικές έννοιες που υποτίθεται πως είναι ήδη κατανοητές.

Ο πλατωνιστής μπορεί να αντικρούσει αυτό το είδος επιχειρήματος με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Πρώτον, μπορεί να δεχθεί την αρχή πάνω στην οποία βασίζεται, δηλ. ότι η κατανόηση του νοήματος είναι (μόνο) δε-



Ξιότητα στη χρήση, αλλά να υποστηρίξει ότι η κατανόηση των συνθηκών στις οποίες οι μαθηματικές αποράσεις είναι αληθείς με την πλατωνιστική έννοια, φανερώνεται ακριβώς από τη διαφορά στη γλωσσική συμπεριφορά η οποία διακρίνει τον κλασικό μαθηματικό από τον ιντουισιονιστικό, δηλ. το ότι χρησιμοποιεί κλασικούς τρόπους διαλογισμού. Αυτή η απάντηση είναι μάλλον ισχυρή. Χωρίς αμφιβολία, αν για τις μαθηματικές δηλώσεις έχουμε κάποια αντίληψη της αλήθειας, σύμφωνα με την οποία ισχύει η αρχή των δύο σθενών, τότε οι νόμοι της κλασικής λογικής είναι έγκυροι· αλλά δεν είναι ευλογοφανές το ότι η απλή τάση να σκεφτόμαστε σύμφωνα με αυτούς τους νόμους, *συνιστά* κατανόηση μιας τέτοιας έννοιας της αλήθειας. Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε άλλη τάξη δηλώσεων για τις οποίες θα ήταν γενικά αποδεκτό ότι δεν διαθέτουμε μια έννοια της αλήθειας που να υπόκειται στην αρχή των δύο σθενών – λ.χ. στους υποθετικούς λόγους δεύτερου είδους<sup>1</sup> – μπορούμε αμέσως να καταλάβουμε ότι η εκπαίδευσή μας, κατά την παιδική ηλικία, μας παρέσυρε στο να εφαρμόζουμε σ' αυτές τους νόμους της κλασικής λογικής· και μπορούμε να αναγνωρίσουμε ότι σε τέτοιες περιστάσεις τείνουμε να υποθέτουμε ότι διαθέτουμε μία έννοια αλήθειας για τέτοιες δηλώσεις, σύμφωνα με την οποία καθεμιά τους είναι καθορισμένα αληθής ή ψευδής. Πράγματι, στην περίπτωση των υποθετικών λόγων β' είδους, μας βασανίζει καμιά φορά ένας τέτοιος πειρασμός: είναι εύκολο να αρχίσουμε να αναιρωτιόμαστε τι θα είχε συμβεί, αν κάποια σημαντική απόφαση της ζωής μας ήταν διαφορετική όταν, εξαιτίας της διάθεσής μας, υποκύνουμε στην ψευδαίσθηση ότι μία τέτοια ερώτηση πρέπει να δέχεται καθορισμένη απάντηση, ότι δηλ. πρέπει η αλήθεια του ζητήματος να είναι καθορισμένη. Πάντως δεν φαίνεται να έχει καμιά αξία η ιδέα ότι, με το να εξασκηθούμε μόνο στην εφαρμογή των νόμων της κλασικής λογικής σ' αυτές τις δηλώσεις, θα αποκτήσουμε αυτό που τώρα μας λείπει, δηλ. μία αντίληψη της αλήθειας τους, σύμφωνα με την οποία πρέπει να είναι καθορισμένο για καθεμιά τους αν είναι αληθής ή ψευδής.

Ο πλατωνιστής είναι λοιπόν υποχρεωμένος να απαρνηθεί την αρχή, σύμφωνα με την οποία το νόημα είναι η χρήση, αν και πρέπει να δεχθεί πως μόνο από την εξάσκηση στη χρήση των εκφράσεων κάθε δεδομένης περιοχής προέρχεται η κατανόηση των νοημάτων τους. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Από τη μία μεριά, μπορεί να τονώσει τον *θεωρητικό* χαρακτήρα της θεωρίας του νοήματος. Μέσα σε μία τέτοια θεωρία, εξηγούμε το ότι ο ομιλητής κατανοεί μία έκφραση ή απόφαση με το να του αποδώσουμε γνώση ενός χαρακτηριστικού της ή με το να πούμε ότι μ' αυτή συσχετίζει κάποιο σημασιολογικό στοιχείο ή σύνθετο [από στοιχεία]· αλλά σ' αυτή την περίπτωση, για να εξηγήσουμε τι σημαίνει το να έχει αυτή τη γνώση ή να κάνει αυτόν το συσχετισμό, δεν χρειάζεται να αναχθούμε στη γλωσσική του συμπεριφορά. Σύμφωνα μ' αυτή την άποψη, δεν προσπα-

θαύμε να απονδολώσουμε το σύνθετο από πρακτικές ικανότητες, που συνιστούν το να κατέχει κανείς μια γλώσσα, από τα απλά ουσιαστικά τους τα οποία αντιλαμβάνομαστε ως απομονώσεις, μολονότι αμοιβαία συνδεδεμένες πρακτικές ικανότητες· το μόνο που επιδιώκουμε είναι να έχουμε αυτό που δίνει κάθε θεωρία, μία συνολική εικόνα που σημασιοδοτεί ένα σύνθετο φαινόμενο, δηλ. επιτρέπει τη γενική επόπτευσή του, κι ως μην υπάρχει αμφι-μονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στις λεπτομέρειες της εικόνας και στα παρατηρήσιμα γνωρίσματα του φαινομένου. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, το να δεχθούμε τον κλασικό διαλογισμό στα μαθηματικά δεν *συνιστά* αντίληψη μιας έννοιας αλήθειας για μαθηματικές δηλώσεις που υπόκειται στην αρχή των δύο σθενών, όπως συνιστούσε, σύμφωνα με την πρώτη δυνατή πλατωνιστική απάντηση που εξετάσαμε· μάλλον εξουσιοδοτεί να αποδώσουμε την αντίληψη μιας τέτοιας έννοιας αλήθειας στο άτομο που τη δέχεται. Αυτό δεν αποτελεί πλήρη υποχώρηση στον ολισμό, αφού ακόμα δεν αποκλείει την αναγκαιότητα της αναζήτησης κάποιας θεωρίας του νοήματος, κάποιας γενικής μορφής παράστασης αυτού στο οποίο συνίσταται η κατανόηση μιας απόφασης ακόμα και αν μία τέτοια θεωρία δεν χρειάζεται να αιτιολογηθεί κατά τμήματα. Είναι η πιο εξεζητημένη από τις τρεις πλατωνιστικές απαντήσεις που εξετάσαμε εδώ. Το αν μπορούμε να τη δεχθούμε ή όχι, εξαρτάται από το αν μπορεί ή όχι να υποστηριχθεί η εξηγητική θεωρία που κρύβεται σ' αυτήν – εδώ δεν θα επιχειρήσουμε να διερευνήσουμε αυτό το ζήτημα.

Τρίτον, μπορεί ο πλατωνιστής να υποθετήσει έναν αφιλέστερο τρόπο απόκρουσης της αρχής ότι το νόημα είναι η χρήση: μπορεί να υποστηρίξει πως, μολονότι αντλούμε την κατάληψη των νοημάτων των γλωσσικών εκφράσεων μόνο από την εξάσκηση στη χρήση της γλώσσας, ωστόσο αυτό που χρειάζεται για μια τέτοια κατάληψη δεν είναι η απλή ικανότητα τήρησης των κανόνων που διέπουν τη χρήση των εκφράσεων, αλλά ο σχηματισμός της ορθής νοητικής αντίληψης των αρχών στις οποίες στηρίζονται αυτοί οι κανόνες. Επομένως, η χρήση δεν συνιστά το νόημα, σαν να ήμασταν ηλεκτρονικοί υπολογιστές προγραμματισμένοι με τον έναν και όχι με τον άλλο τρόπο· επειδή είμαστε έλλογα πλάσματα μας *καθοδηγεί* στο να επιλέγουμε την κύρια<sup>2</sup> νοητική παράσταση ανάμεσα στους διάφορους δυνατούς υποψήφιους. Πράγματι, μαθαίνουμε τα πιο πρωτογενή τμήματα της γλώσσας με το να συνδέουμε τη χρήση τους με τις ικανότητές μας: για τα απλούστερα είδη αποφάσεων, η γνώση των συνθηκών για την αλήθειά τους συνίσταται στην ικανότητά μας να αναγνωρίζουμε, όταν όρισόμαστε σε κατάλληλη θέση, ότι πραγματοποιούνται αυτές οι συνθήκες· με την παρατήρηση στην περίπτωση των εμπειρικών δηλώσεων και με τον υπολογισμό στην περίπτωση των μαθηματικών δηλώσεων. Έχοντας γίνει κάτοχοι αυτού του κατώτατου επιπέδου της γλώσσας, προχωράμε σε ανώτερα επί-

πεδα χρησιμοποιώντας την αναλογία. Αντιλαμβάνομαστε τη συνθήκη για την αλήθεια μιας απόφανσης που ανήκει σε ένα από τα ανώτερα γλωσσικά στρώματα ανάγοντάς την στο τι θα συνέβαινε αν ήταν κανείς ικανός να αναγνωρίσει αποτελεσματικά την αλήθεια ή το ψεύδος της με άμεσο τρόπο· πρόκειται για ικανότητα που δεν την έχουμε εμείς οι ίδιοι, αλλά για την οποία μπορούμε να σχηματίσουμε μία αντίληψη κατ' αναλογία με τις ικανότητες που έχουμε. Λόγου χάρι, πρώτα μαθαίνουμε το νόημα των ποσοδεικτών (ή άλλων εκφράσεων γενικότητας) για πεπερασμένα και ελοπιεύσιμα πεδία: στην περίπτωση των αριθμητικών δηλώσεων μαθαίνουμε πώς να προσδιορίζουμε την αλήθεια ή το ψεύδος μιας δήλωσης στην οποία υπεισέρχονται περιορισμένοι ποσοδείκτες με το να θεωρούμε διαδοχικά όλες τις ειδικές περιπτώσεις της. Κατόπιν σχηματίζουμε αναλογικά την αντίληψη της συνθήκης για την αλήθεια μιας δήλωσης στην οποία υπεισέρχονται απεριόριστοι ποσοδείκτες, με το να φανταστούμε ένα ον που διαφέρει από μας κατά το ότι μπορεί, σε πεπερασμένο χρόνο, να ελέγξει τις τιμές αλήθειας ενός αριθμητικού αριθμού ειδικών περιπτώσεων μιας τέτοιας δήλωσης. Σ' αυτό μας καθοδηγούν οι κανόνες του συμπεριρισμού, τους οποίους εξασκηθήκαμε να δεχόμαστε για τέτοιες δηλώσεις: επειδή είναι καθιερωμένη πρακτική να εφαρμόζουμε σ' αυτές το νόμο του αποκλεισμένου τρίτου, καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να τις συλλαβίζουμε ως καθορισμένα αληθείς ή ψευδείς. Φυσικά, λοιπόν, γι' αυτό που απαιτείται ώστε να καθοριστεί η αλήθεια ή το ψεύδος τους, ανατρέχουμε στην αντίληψη εκείνη που πλησιάζει περισσότερο στα μέσα που οι ίδιοι χρησιμοποιούμε για να καθορίσουμε τις τιμές αλήθειας αποφάνσεων που έχουν σχηματισθεί με τρόπο γλωσσολογικά όμοιο. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, η αντίληψη του τι σημαίνει το να είναι αληθής μία απόφαση συνίσταται πάντα σε μία εικόνα του τι θα σήμαινε το να είναι κανείς ικανός να την αναγνωρίσει ως αληθή, όταν είναι αληθής, εικόνα που ίσως να συνελάγεται την προσφυγή σε υποθετικές ικανότητες που δεν τις έχουμε, αλλά που θεωρούνται ότι αποτελούν επέκταση αυτών που έχουμε. Ο δελεαστικός χαρακτήρας αυτού του τρόπου σκέψης εξηγεί το ότι οι πλατωνιστές τείνουν να παραμερίζουν ως καθαρά περιστασιακούς τους περιορισμούς στους οποίους υπόκεινται η ικανότητα παρατήρησης και οι νοητικές μας διεργασίες, όπως μαρτυρεί η παρατήρηση του Russell ότι «μόνο για λόγους φυσιολογίας είναι αδύνατον» να κάνουμε άπειρα πράγματα σε πεπερασμένο χρόνο. Επομένως, σύμφωνα με αυτή την άποψη, η κατανόηση, λ.χ., της συνθήκης για την αλήθεια μιας αριθμητικής δήλωσης η οποία περιέχει απεριόριστη ποσοποίηση, δεν συνίσταται στην αποδοχή της κλασικής λογικής για τέτοιες δηλώσεις, όπως συνέβαινε στην πρώτη πλατωνιστική απάντηση· ούτε η αποδοχή αυτής της λογικής εκ μέρους μας αποτελεί απλή εξουσιοδότηση να μας αποδώσουν την κατανόηση χωρίς άλλη εξήγηση, όπως συνέβαινε στη δεύτερη απάντη-

ση· αλλά μας παρακινεί να αποκτήσουμε μία τέτοια κατανόηση η οποία θα εξηγηθεί με τη βοήθεια της αναλογικής αντίληψής μας για το τι θα ήταν δυνατόν για ένα ον του οποίου οι δυνάμεις υπερβαίνουν τις δικές μας.

Από τις τρεις πλατωνιστικές απαντήσεις, η πρώτη είναι ασφαλώς η ασθενέστερη, η δεύτερη είναι η ισχυρότερη θέση για συζήτηση και η τρίτη εκείνη που πρακτικά συγκαίνει περισσότερο. Από ιντουισιονιστική σκοπιά πρόκειται για μία απαράδεκτη υπερόψιση. Η γλώσσα που χρησιμοποιούμε, όταν κάνουμε μαθηματικά, καθώς και όταν καταπιανόμαστε με άλλες δραστηριότητες είναι η γλώσσα μας και το νόημά της πρέπει να συνδέεται με τις ικανότητές μας· δεν μπορεί να παράγεται από την υποθετική αντίληψη ικανοτήτων που δεν διαθέτουμε, και η προσπάθεια να το εξηγήσουμε με τέτοια μέσα δείχνει μόνο τις αντιπάτες που κρύβονται στην παρανόηση της γλώσσας μας. Η συζήτηση μπορεί βέβαια να συνεχιστεί επί πολύ ακόμα· αλλά θα τη διακόψουμε εδώ, γιατί η παρούσα έκθεση αποβλέπει μόνο στο να αποκαλύψει τα ζητήματα που κρύβει η αντιμαχία.

Όταν προσπαθεί κανείς να σχηματίσει μία συζήτηση ανάμεσα σε έναν πλατωνιστή και έναν ιντουισιονιστή, πρέπει απαραίτητα να βρει όρους για την επικοινωνία τους. Για τον πλατωνιστή, το ότι ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς υπάρχει τουλάχιστον ένας που ικανοποιεί ένα δεδομένο αποκρίσιμο κατηγορηματικό 'P(x)' είναι μία συνθήκη που, με καθορισμένο τρόπο, είτε ισχύει είτε δεν ισχύει, και επομένως δεν μπορεί να υπάρχει αμφιβολία πως είναι σωστό να την επιλέξουμε ως αναγκαία και επαρκή συνθήκη για την αλήθεια της '∃nP(n)'. Ωστόσο, δεν μπορεί να προβάλλει αυτόν τον ισχυρισμό στον ιντουισιονιστή, γιατί, αν και για τον ιντουισιονιστή οι λέξεις «Ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς υπάρχει ένας τουλάχιστον που να ικανοποιεί την 'P(x)» έχουν νόημα, αυτός δεν τις ερμηνεύει ως έκφραση μιας συνθήκης που είτε ισχύει είτε δεν ισχύει με καθορισμένο τρόπο: όλη η αντιμαχία τους αφορά, κατά πρώτο λόγο, το είδος του νοήματος που μπορεί να θεωρηθεί πως έχει μία τέτοια απόφαση. Γι' αυτό ήταν ανάγκη η αντιμαχία να παρουσιαστεί ως σχετική με το εξής ζήτημα: με ποια μέσα πρέπει να αντιλαμβάνομαστε πώς σημασιοδοτούνται οι μαθηματικές δηλώσεις; Το να παρουσιάσουμε τη συζήτηση χωρίς να προϋποθέσουμε οτιδήποτε σχετικό με το αν οι μαθηματικές αποφάνσεις του είδους που μόλις εξετάσαμε δηλώνουν ή δεν δηλώνουν συνθήκες οι οποίες είτε ισχύουν είτε δεν ισχύουν – με καθορισμένο τρόπο – έχει ως συνέπεια το να παρασταθεί η αντιμαχία ως πρόβλημα που ανήκει στη γενική φιλοσοφία της γλώσσας, όχι ως ειδικό πρόβλημα της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Όλα τα επιχειρήματα που επικαλεστήκαμε υπέρ ή κατά της ιντουισιονιστικής κριτικής των κλασικών μαθηματικών στηρίζονταν σε κάποια γενική παρατήρηση πάνω στη φιλοσοφία της γλώσσας, δηλ. πάνω στη μορφή που πρέπει να έχει μια θεωρία του νοήματος· επομένως, μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα πεδίο που είναι

πολύ ευρύτερο από τη γλώσσα των μαθηματικών. Αν τα επιχειρήματα που παραθέσαμε έως εδώ υπέρ της ιντουισιονιστικής αντίληψης του νοήματος των μαθηματικών δηλώσεων είναι ορθά, τότε δεν θα επιτρέπουν ούτε τη ρεαλιστική αντίληψη των δηλώσεων που ανήκουν σε πολλές άλλες περιοχές έξω από την περιοχή των μαθηματικών και μ' αυτό θα απαγορεύουν ως άκυρη την εφαρμογή της κλασικής λογικής σ' αυτές τις περιοχές. (Με αυτό δεν λέει κανείς ότι, σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, η λογική που είναι κατάλληλη γι' αυτές τις δηλώσεις συμπίπτει με την ιντουισιονιστική λογική· το γεγονός ότι οι εμπειρικές δηλώσεις, αντίθετα προς τις μαθηματικές, δεν έχουν την ιδιότητα αφού επαληθευτούν μία φορά να παραμένουν επαληθευμένες, πρέπει να μας αποτρέπει να τους εφαρμόσουμε μια σημασιολογία που να μοιάζει με τη σημασιολογία που είναι κατάλληλη για τις δηλώσεις των ιντουισιονιστικών μαθηματικών.) Επομένως, δεν μπορούμε να ζήσουμε την ορθότητα παρόμοιων επιχειρημάτων με αποκλειστική αναφορά στα μαθηματικά· ευσταθούν ή όχι, ανάλογα με το αν ή όχι μπορεί να προταθεί μία ευλογοφανής γενική θεωρία του νοήματος, που να βασίζεται σε αρχές σύμφωνες με αυτά τα επιχειρήματα.

Αν εξαιρέσουμε μερικές ευκαιριακές παρατηρήσεις στα φιλοσοφικότερα γραπτά του Brouwer, οι ίδιοι οι ιντουισιονιστές είναι συνήθως επιφυλακτικοί και δεν ισχυρίζονται ότι οι ιδέες τους για το νόημα μπορούν να εφαρμοσθούν έξω από το πεδίο των μαθηματικών· γι' αυτό και πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχει τρόπος να παρουσιάσει κανείς την ιντουισιονιστική κριτική των κλασικών μαθηματικών ως κάτι που εξαρτάται από ιδιαίτερα γνωρίσματα του αντικειμένου των δηλώσεων στις οποίες αναφέρεται. Συνήθως αυτό γίνεται με το να παριστάνονται ως ιντουισιονιστές οι μαθηματικοί που απορρίπτουν τη ρεαλιστική άποψη των πλατωνιστών για τη μαθηματική πραγματικότητα: για τον πλατωνιστή, οι μαθηματικές δηλώσεις αφορούν μία αντικειμενική πραγματικότητα που αποτελείται από αφηρημένα αντικείμενα το οποία συνδέονται μεταξύ τους, ώστε να σχηματίσουν μια ποικιλία αφηρημένων δομών οι οποίες υπάρχουν ανεξάρτητα από μας και από τη σκέψη μας γι' αυτά· επομένως, αυτά καθορίζουν το αν αυτές οι δηλώσεις είναι αληθείς ή ψευδείς, ανεξάρτητα από τη γνώση μας, ακριβώς όπως, σύμφωνα με τη ρεαλιστική αντίληψη του φυσικού σύμπαντος, αυτό συνιστά μία αντικειμενική πραγματικότητα, ανεξάρτητη από τη γνώση που έχουμε σχετικά μ' αυτήν, η οποία καθιστά αληθείς ή ψευδείς με καθορισμένο τρόπο τις δηλώσεις που κάνουμε σχετικά με τα υλικά αντικείμενα. Αντίθετα, για τον ιντουισιονιστή αυτό που κάνει αληθείς ή ψευδείς τις μαθηματικές δηλώσεις μας είναι η μαθηματική δραστηριότητά μας, η οποία είναι ουσιαστικά νοητική δραστηριότητα: επομένως, η μαθηματική πραγματικότητα δεν είναι κάτι που υπάρχει ανεξάρτητα από μας, αν και την καταλαμβάνουμε μόνο μερικά, αλλά είναι μόνο προϊόν της σκέψης μας.

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η διαφορά ανάμεσα στην ιντουισιονιστική και στην πλατωνιστική αντίληψη της μαθηματικής πραγματικότητας, όταν την περιγράψουμε όπως κάναμε τώρα μόλις, είναι γνήσια διαφορά. Ωστόσο το ερώτημα είναι αν η οντολογική θέση που υποθετεί ο καθένας είναι γι' αυτόν μία αρχική παραδοχή από την οποία αντλεί την άποψή του για τον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατόν να σημασιοδοτηθούν οι μαθηματικές δηλώσεις, και επομένως να ερμηνευθούν όπως αυτός θέλει. Για όποιον παρακολούθησε την ουσία του επιχειρήματος που σκιαγραφήσαμε προηγουμένως, κατά την ιντουισιονιστική ερμηνεία των μαθηματικών δηλώσεων η ιντουισιονιστική οντολογία είναι επακόλουθο της ιντουισιονιστικής θεωρίας του νοήματος, όχι αρχική της παραδοχή. Σε μία τέτοια προοπτική, η ρεαλιστική ερμηνεία των δηλώσεων μιας δεδομένης τάξης είναι η υπόθεση ότι γι' αυτές διαθέτουμε μία αντίληψη της αλήθειας που υπόκειται στην αρχή των δύο σθενών, και αυτό είναι ζήτημα που πρέπει να διευθετηθεί από την έρευνα του τρόπου με τον οποίο τις σημασιοδοτούμε, δηλ. την έρευνα της ορθής θεωρίας του νοήματος τους. Η μεταφυσική άποψη – ρεαλιστική ή μη ρεαλιστική – που υποθετούμε είναι, επομένως, από αυτή τη σκοπιά, επακόλουθο της θέσης που υποστηρίζουμε σχετικά με τη θεωρία του νοήματος, όχι κάτι που πρέπει να αποφασισθεί προτού επιλέξουμε αυτή τη θέση· με την κατάφαση ή μετά την άρνηση της ύπαρξης μιας αντικειμενικής πραγματικότητας που περιγράφουν οι δηλώσεις μας, και η οποία τις καθιστά αληθείς ή ψευδείς με καθορισμένο τρόπο, σημαίνει ότι υποθετούμε μία εικόνα που συμφωνεί με τη μία ή την άλλη αντίληψη για το είδος του νοήματος που έχουν αυτές οι δηλώσεις, εικόνα όμως που η ίδια δεν έχει άλλη ιδιότητα από το να αποτελεί παρίσταση μιας δεδομένης αντίληψης του νοήματος.

Αντίθετα, για να είναι η μεταφυσική άποψη των ιντουισιονιστών για τη μαθηματική πραγματικότητα βάση της ιντουισιονιστικής αντίληψης του νοήματος των μαθηματικών δηλώσεων, δεν μπορεί η απόρριψη της κλασικής ερμηνείας των λογικών σταθερών και, πρώτ' απ' όλα, της ποσοποίησης πάνω σε αριθμήσιμο πεδίο, να στηρίζεται στις πολύ γενικές σκέψεις που παραθέσαμε πιο πάνω, αλλά πρέπει να εξαρτάται από το (υποθετικό) γεγονός ότι, όταν κάνουμε μαθηματικές δηλώσεις, δεν φιλοδοξούμε να περιγράψουμε μία εξωτερική πραγματικότητα. Επομένως, θα μας ήταν, λ.χ., ακόμα δυνατόν – τουλάχιστον στο βαθμό που τα επιχειρήματα των ιντουισιονιστών έχουν πέριση – να υποθετήσουμε μία ρεαλιστική αντίληψη της φυσικής πραγματικότητας· και, σ' αυτή την περίπτωση, αντίθετα με την ποσοποίηση πάνω στους φυσικούς αριθμούς, η ποσοποίηση πάνω σε διαστήματα άπειρου χρόνου ή περιοχές άπειρου χώρου, ή σώματα διατεταγμένα σε τέτοιο χρόνο ή χώρο, θα δώσει δηλώσεις που είναι αληθείς ή ψευδείς με καθορισμένο τρόπο· η διαφορά θα οφείλεται στο γεγονός ότι οι δη-



λώσεις που αφορούν υλικά αντικείμενα αναφέρονται σε μία εξωτερική πραγματικότητα, ενώ οι μαθηματικές δηλώσεις δεν αναφέρονται σε μία εξωτερική πραγματικότητα.

Για να απφασίσουμε αν μπορεί να κατασκευασθεί ένα πειστικό επιχειρήμα πάνω σ' αυτή τη βάση, πρέπει πρώτα να απαντήσουμε σε δύο ερωτήματα: αν η οντολογική άποψη πρέπει να χρησιμεύσει ως βάση της άποψης για το νόημα, τότε πώς πρέπει να θεμελιωθεί αυτή η ίδια; Και ποιος είναι ο δρόμος που από αυτήν οδηγεί στην άποψη για το νόημα; Εκ πρώτης όψεως η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα είναι προφανής: αφού δεν υπάρχει μία πραγματικότητα με ανεξάρτητη ύπαρξη, η οποία να καθιστά την ποσοποιημένη δήλωση αληθή ή ψευδή, αυτή μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής μόνο στο βαθμό που είμαστε ικανοί να την αναγνωρίζουμε ως αληθή ή ψευδή. Όταν όμως ξανασκεφτούμε το ζήτημα, τότε δεν είναι τόσο απλό. Ας υποθέσουμε ότι μελετάμε μία αριθμητική δήλωση της μορφής '∃nP(n)', όπου το 'P(x)' είναι αποκρίσιμο. Κάποιος μπορεί να υποστηρίξει ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι αντικείμενα με αντικειμενική, ανεξάρτητη ύπαρξη, για τα οποία είναι καθορισμένο αν το κατηγορημα 'P(x)' ή εφαρμόζεται ή δεν εφαρμόζεται – με καθορισμένο τρόπο – και ταυτόχρονα να υποστηρίξει ότι η δήλωση '∃nP(n)' δεν είναι μία από τις δηλώσεις που μπορούμε να υποθέσουμε πως είναι καθορισμένα αληθής ή ψευδής: το επιχειρημά του, σύμφωνα με αυτά που είπαμε για έναν τρόπο επιχειρηματολογίας υπέρ της ιντουισιονιστικής θέσης, μπορεί να είναι ότι δεν διαθέτουμε μία αντίληψη της αλήθειας, που να υπερβαίνει την αναγνωριστική ικανότητά μας και ως προς την οποία θα ίσχυε η αρχή των δύο σθενών για τη δήλωση αυτή. Αυτή τη στιγμή, όμως, μας ενδιαφέρει το αντίθετο: Θα ήταν άραγε δυνατός κάποιος να θεωρεί τους φυσικούς αριθμούς ως νοητικές κατασκευές, ως προϊόντα της ανθρώπινης σκέψης, αλλά να σκέφτεται ότι πρέπει η '∃nP(n)' να είναι αληθής ή ψευδής, ανεξάρτητα από τη γνώση μας;

Κατά βάθος δεν είναι φανερό ότι η άποψη που αυτός υποστηρίζει σχετικά με το οντολογικό status των φυσικών αριθμών πρέπει, αυτή καθ' εαυτήν, να επηρεάζει την ερμηνεία του ποσοδείκτη. Οι πλασματικοί χαρακτήρες είναι δημιουργήματα της ανθρώπινης φαντασίας (και αυτό είναι βέβαια κάτι που διαφέρει εντελώς από εκείνο που εννοούμε, όταν ονομάζουμε τα μαθηματικά αντικείμενα δημιουργήματα της ανθρώπινης σκέψης): ωστόσο όμως, η δήλωση που λέει ότι ανάμεσα στους χαρακτήρες του Shakespeare υπάρχει ένας που έχει ένα νόμιμο γιο και ένα νόθο, έχει καθορισμένη τιμή αλήθειας. Αυτή η σύγκριση μπορεί να επικριθεί με πολλούς τρόπους. Πρώτον, μπορεί κάποιος να υποστηρίξει ότι, αντίθετα από τους χαρακτήρες του Shakespeare, οι φυσικοί αριθμοί δεν αποτελούν μία καθορισμένη ολότητα, δηλ. ότι δεν εννοούμε ότι τα αξιώματα του Peano καθορίζουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι ισομορφισμού: αυτή όμως δεν είναι ιντουισ-

ιονιστική άποψη. Ή, πάλι, μπορεί κανείς να επιμείνει – και ορθά – ότι όταν εφαρμόζουμε ποσοποίηση πάνω στους φυσικούς αριθμούς, δεν το κάνουμε, όπως στην περίπτωση των χαρακτήρων του Shakespeare, πάνω σε κατασκευές που έχουν γίνει, αλλά και πάνω σε κατασκευές που θα μπορούσαν να γίνουν, σύμφωνα με καθορισμένους κατασκευαστικούς κανόνες, πάνω σε δυνατές καθώς και σε πραγματικές νοητικές κατασκευές: εδώ το επιχειρήμα βασίζεται στον δυνάμει ή μη πλήρη χαρακτήρα μιας άπειρης ολότητας την οποία αντιλαμβάνομαστε ιντουισιονιστικά. Ασφαλώς υπάρχει μια τέτοια δυσαναλογία ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις: αλλά, εφόσον συμφωνούμε ότι οι κατασκευαστικές αρχές είναι εντελώς καθορισμένες, δεν είναι σαφώς ο λόγος για τον οποίο το γεγονός ότι δεν έχουν κατασκευασθεί πραγματικά όλοι οι φυσικοί αριθμοί πρέπει να στερεί τη δήλωση με τον ποσοδείκτη από την καθορισμένη τιμή αλήθειας. (Πρέπει να σημειωθεί ότι θα ήταν αθέμιτο να επικαλεσθούμε εδώ το γεγονός ότι στην πράξη δεν μπορούμε να εμποτεύσουμε ολόκληρη μία άπειρη ολότητα και, επομένως, δεν μπορούμε να αποφασίσουμε μηχανικά για την τιμή αλήθειας της δήλωσης με ποσοδείκτη, γιατί αυτό θα ίσχυε εξίσου και για μία δήλωση με ποσοποίηση πάνω σε άπειρο παρελθόντα ή μέλλοντα χρόνο, και αυτή η δήλωση μπορεί να έχει καθορισμένη τιμή αλήθειας, όταν υιοθετήσουμε μία ρεαλιστική άποψη για το φυσικό σύμπαν.) Τέλος, μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι η σύγκριση μαρτυρεί το αντίθετο. Η δήλωση που πήραμε ως παράδειγμα συμβαίνει να είναι αληθής: αλλά, αφού η αρχή των δύο σθενών δεν ισχύει για δηλώσεις με ατομικούς πλασματικούς χαρακτήρες (η δήλωση «ο Άγγελος είχε μουστάκι» δεν είναι ούτε αληθής ούτε ψευδής) δεν ισχύει ούτε για τυχούσα δήλωση στην οποία υπεισέρχεται ποσοποίηση πάνω σε πλασματικούς χαρακτήρες, όσο περιορισμένο και αν είναι το πεδίο τους.

Σκοπός της τρίτης αντίρρησης θα ήταν, φυσικά, να απορρίψει την αρχή των δύο σθενών, ακόμα και για ειδικές περιπτώσεις 'P(k)' της ποσοποιημένης δήλωσης, δηλ. το αποτέλεσμα εφαρμογής ενός αποκρίσιμου κατηγορηματος σε ένα συγκεκριμένο αριθμό. Είναι φανερό ότι, αν δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε δήλωση της ακολουθίας 'P(0)', 'P(1)', 'P(2)', ... είναι καθορισμένα ή αληθής ή ψευδής, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό ισχύει για τη δήλωση '∃nP(n)' ή τη δήλωση '(∀n)P(n)'. Είναι βέβαια νόμιμο από ιντουισιονιστική σκοπιά να θεαίνουμε το νόμο του αποκλεισμένου τρίτου 'P(k) ∨ ¬P(k)', και επομένως για οποιαδήποτε απόφαση Q που μπορούμε να δείξουμε ότι απορρέει από την 'P(k)' και από την '¬P(k)'. αυτό όμως δεν συνεπάγεται το ότι πρέπει να θεωρούμε πως η 'P(k)' είναι ήδη αληθής ή ψευδής.

Ως εδώ δεν θεωρήσαμε προβληματικά τα νοήματα των αποκρίσιμων δηλώσεων, επιτρέποντας στον πλατωνιστή να τους αποδίδει καθορισμένες τιμές αλήθειας, γιατί αυτό οδηγούσε σε μία κλασική λογική η οποία γι' αυ-

τές τις δηλώσεις ήταν οπωσδήποτε ορθή με ιντουισιονιστικά κριτήρια. Εδώ όμως αμφισβητείται αυτή η παραχώρηση: μολονότι δεν αμφισβητούμε τους λογικούς νόμους που διέπουν τέτοιες δηλώσεις, αυτό που αμφισβητείται ακόμα και γι' αυτές είναι ότι διαθέτουμε μία έννοια της αλήθειας δηλώσεων που παράγονται από αυτές με ποσοποίηση, ακόμα κι αν κάνουμε την πλατωνιστική παραδοχή ότι επιτρέπεται να σχηματίζουμε το λογικό άθροισμα ή γινόμενο μιας άπειρης ακολουθίας τιμών αλήθειας. Όταν υπάρχει μια φαινομενική πραγματικότητα στην οποία αναφέρονται οι δηλώσεις μας, τότε είναι δυνατόν να θεωρήσουμε ότι έχουν καθορισμένη τιμή αλήθειας, ανεξάρτητα από το αν τη γνωρίζουμε πραγματικά ή όχι. Αλλά ακριδώς όπως ένας πλασματικός χαρακτήρας μπορεί να έχει μόνο τις ιδιότητες που περιέχονται στην περιγραφή του, και ένα αντικείμενο της αντίληψης (αισθητηριακό δεδομένο) μπορεί να έχει μόνο τις ιδιότητες που αντιλαμβάνομαστε ότι έχει, έτσι και η νοητική κατασκευή μπορεί να έχει μόνο τις ιδιότητες που είτε συνομολογήθηκαν είτε αποδείχθηκαν γι' αυτήν: επομένως, ακόμα και αν έχουμε μία μηχανική μέθοδο για να αποφασίσουμε αν ένας φυσικός αριθμός  $k$  ικανοποιεί ένα κατηγορημα  $P(x)$ , αυτό ούτε ικανοποιεί ούτε δεν ικανοποιεί το κατηγορημα προτού αποφασίσουμε και, επομένως, πριν αποφασίσουμε η δήλωση  $P(k)$  δεν είναι ούτε αληθής ούτε ψευδής.

Έτσι αποκτά καίρια σημασία το ζήτημα του ποια έννοια αλήθειας είναι αποδεκτή ακόμη και για τις αποκρίσιμες δηλώσεις. Αυτό δεν είναι εκπληκτικό, αφού το μεταφυσικό ερώτημα «Γι υπάρχει πραγματικά;» –όχι τόσο ποια αντικείμενα περιλαμβάνει το σύμπαν, όσο ποια γεγονότα συμβαίνουν – συμπίπτει με το ερώτημα: Για ποιες δηλώσεις μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουν καθορισμένη τιμή αλήθειας; Σύμφωνα με το πρώτο είδος επιχειρήματος που εξετάσαμε, θεωρήσαμε ως μόνες προβληματικές τις δηλώσεις για τις οποίες, από ιντουισιονιστική άποψη, δεν ισχύουν οι νόμοι της κλασικής λογικής, δηλ. τις μη αποκρίσιμες μαθηματικές δηλώσεις γι' αυτό θεωρήσαμε ότι το ζήτημα του αν υπάρχει, όπως υποθέτει ο πλατωνιστής, μία αντικειμενική πραγματικότητα που καθορίζει για καθένα από αυτές τις δηλώσεις αν είναι αληθής ή ψευδής, λύνεται με το να απαντήσουμε στο πρότερο ερώτημα: Σε τι μπορεί να συνίσταται η κατανόηση αυτών των δηλώσεων; Αλλά κατά τη δεύτερη αυτή προσέγγιση θέσαμε το ερώτημα της αντίληψης της αλήθειας που ταιριάζει στις αποκρίσιμες μαθηματικές δηλώσεις, δηλ. σε εκείνες τις δηλώσεις για τις οποίες δεν έχουμε σοβαρές αμφιβολίες για το πώς πρέπει να εξηγήσουμε τι είναι το να τις κατανοούμε: αναμφίβολα η κατανόησή τους συνίσταται στο ότι κατέχουμε τη συναφή διαδικασία απόφασης (και ίσως και στην –εξίσου μη προβληματική– αντίληψή μας των εμπειρικών εφαρμογών τους).

Ποιο λόγο μπορούμε να έχουμε για να υποθέσουμε ότι μία δήλωση όπως

η «ο  $10^{20}$  είναι άθροισμα δύο πρώτων αριθμών» είναι αληθής ή ψευδής, εκτός του ότι πιστεύουμε προκαταβολικά ότι υπάρχει μία μαθηματική πραγματικότητα που την καθιστά αληθή ή ψευδή; Η προφανής απάντηση είναι ότι διαθέτουμε μία (και αρχίως) αποτελεσματική μέθοδο για τον καθορισμό της τιμής αλήθειάς της, και ότι αυτή η μέθοδος, αν εφαρμοσθεί, θα δώσει το ένα ή το άλλο αποτέλεσμα. Σ' αυτό μπορεί να δοθεί η ανταπάντηση: όταν το  $\rightarrow$  παριστά την υποθετική υποτακτική (subjunctive conditional) της κοινής γλώσσας, η συναγωγή της  $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$  από την  $P \rightarrow Q \vee R$  δεν είναι έγκυρη περισσότερο απ' ό,τι όταν το  $\rightarrow$  παριστά την υποθετική υποτακτική των ιντουισιονιστικών μαθηματικών. Επομένως, από την αλήθεια της «Αν εφαρμόζαμε τη μέθοδο απόφασης, θα δείχναμε ότι το  $10^{20}$  είναι το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών ή ότι δεν είναι» δεν μπορούμε να συναγάγουμε ούτε την αλήθεια της «Αν εφαρμόζαμε τη μέθοδο απόφασης, θα δείχναμε ότι ο  $10^{20}$  είναι άθροισμα δύο πρώτων αριθμών». Οι περιπτώσεις στις οποίες είμαστε διατεθειμένοι να επιτρέψουμε τη συναγωγή της  $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$  από την  $P \rightarrow Q \vee R$  είναι ακριδώς εκείνες στις οποίες πιστεύουμε στην ύπαρξη μιας αντικειμενικής πραγματικότητας η οποία καθορίζει τον έναν ή τον άλλον υποθετικό λόγο ως αληθή, ακόμα και όταν το ηγούμενο του υποθετικού λόγου δεν είναι πια δυνατόν να εκπληρωθεί: λ.χ., εκτός αν έχουμε μία πολύ ιδεαλιστική άποψη για το παρελθόν ή για τον φυσικό κόσμο, πρέπει να δεχθούμε ότι πρέπει να αληθεύει είτε η «Αν είχαμε μετρήσει το ακροατήριο (στη διάλεξη), θα είχαμε βρει 50 ή περισσότερα άτομα» είτε η «Αν είχαμε μετρήσει το ακροατήριο, θα είχαμε βρει λιγότερα από 50 άτομα» – ακόμα και αν το ακροατήριο έχει τώρα διαλυθεί και δεν είναι δυνατόν να συγκεντρωθεί ξανά.

Ωστόσο, αν θεωρήσουμε τα προφανή αντιπαράδειγματα στον κανόνα:

$$\frac{P \rightarrow Q \vee R}{(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)}$$

όπου το  $\rightarrow$  συμβολίζει την υποθετική υποτακτική, αυτά ανήκουν σε δύο τύπους. Πρώτον, περιπτώσεις στις οποίες υπάρχει κάποιος άλλος καθοριστικός παράγοντας που ούτε συνάγεται από το ηγούμενο ούτε προϋποτίθεται στο ηγούμενο: περιπτώσεις στις οποίες θα ήμασταν διατεθειμένοι να βεβαιώσουμε την  $P \& S \rightarrow Q$  και επίσης την  $P \& \neg S \rightarrow R$ , ώστε αν μας ρωτήσουν «Αν είχε συμβεί να ισχύει η  $P$ , θα συνέβαινε να ισχύει η  $Q$  ή η  $R$ ;», τότε μπορούμε μόνο να απαντήσουμε «Θα εξαρτιόταν από το αν ίσχυε η  $S$  ή όχι». Δεύτερον, περιπτώσεις στις οποίες πιστεύουμε ότι υπάρχει πραγματική προσδιοριστία που βασίζεται στην κβαντομηχανική ή στο ότι παρεμβαίνει ένας βουλητικός παράγοντας: επομένως, μολονότι ισχύει η  $P \rightarrow Q \vee R$ , καμία προσθήκη στο ηγούμενο δεν θα μας επέτρεπε να ενισχύσουμε το επόμενο ως  $Q$  ή  $R$ , αν δεν συνεπαγόταν, συνδυασμένα με την  $P$  το

ένα ή το άλλο σκέλος της διάζευξης. Το μαθηματικό παράδειγμα δεν υπάγεται σε καμία από τις δύο κατηγορίες. Δεν υπάγεται στην πρώτη, γιατί όταν εφαρμόσουμε τη μέθοδο απόφασης, το αποτέλεσμα πρέπει να είναι πάντα το ίδιο, όποιες και αν είναι οι συνθήκες στις οποίες εφαρμόζεται: δεν θα τη θεωρούσαμε μέθοδο απόφασης, αν το αποτέλεσμα εξαρτιόταν από οποιονδήποτε εξωτερικό παράγοντα. Το παράδειγμα δεν υπάγεται στη δεύτερη κατηγορία, γιατί η μέθοδος απόφασης αρκεί από μόνη της για να καθορίσει, αν εφαρμοσθεί, την αλήθεια ή το ψεύδος της δήλωσης: είναι μέθοδος ακριβώς επειδή πάντα δίνει αποτέλεσμα χωρίς να είναι ανάγκη να γίνουν προσθήκες ή να παρέμβει η κρίση μας. Επομένως, μία τέτοια περίπτωση φαίνεται παραδειγματική για τον ισχυρισμό ότι πρέπει να ισχύει το ένα ή το άλλο αποτέλεσμα της μεθόδου, ανεξάρτητα από το αν πραγματικά εκτελούμε τη διαδικασία της εφαρμογής της: και επομένως η αποκρίσιμη μαθηματική δήλωση έχει καθορισμένη τιμή αλήθειας, ανεξάρτητα από το αν τη γνωρίζουμε πραγματικά.

Και πάλι θα εγκαταλείψουμε τη συζήτηση σ' αυτό το σημείο, χωρίς να επιχειρήσουμε να δώσουμε λύση. Κατάληξη της επισκόπησης της δεύτερης αυτής άποψης είναι ότι το status των μαθηματικών αντικειμένων, ως αντικειμένων που υπάρχουν ανεξάρτητα από μας ή ως προϊόντων της σκέψης μας, δεν έχει σχέση με το αν είναι αποδεδειγμένη ή κλασική ερμηνεία των λογικών σταθερών ή αν αυτές μπορούν να ερμηνευθούν μόνο με ιντουισιονιστικό τρόπο, εκτός αν η θέση ότι αυτά τα αντικείμενα είναι προϊόντα της σκέψης μας εννοηθεί με τον δυνατότερο ριζοσπαστικό τρόπο, δηλ. ως θέση που συνεπάγεται ότι ακόμα και τα πρωτογενή κατηγορήματα (και όσα παράγονται από αυτά με σύνθεση μέσω των αποφαντικών τελεστών και της ποσοποίησης πάνω σε πεπερασμένο πεδίο) αληθεύουν γι' αυτά, μόνο όταν τα έχουμε ρητά αναγνωρίσει ως αληθή. Ο βαθμός στον οποίο μπορεί να υποστηριχθεί ένας τόσο ριζικός αντι-ρεαλισμός για τα μαθηματικά αντικείμενα, και ο βαθμός στον οποίο συμβιβάζεται με το ρεαλισμό προκειμένου για τα περιεχόμενα του φυσικού σύμπαντος είναι ζητήματα που αφήνουν τον αναγνώστη να τα σκεφθεί μόνος του.

## Σημειώσεις

1. Counterfactual conditionals. Είναι οι υποθετικοί λόγοι της μορφής «αν ήταν  $p$ , τότε θα ήταν  $q$ », όπου γνωρίζουμε ότι δεν πραγματοποιήθηκε εκείνο που λέει η ' $p$ '. Λόγου χάρι, «αν ο Ναπολέων είχε νικήσει όλους τους αντιπάλους του, η Ευρώπη θα ήταν ενοποιημένη». Φυσικά, το επόμενο, δηλ. ' $q$ ', δεν είναι αυτομάτως αληθές. Ο υποθετικός λόγος «αν ήταν  $p$ , θα ήταν  $q$ » αναλύεται συνήθως ως συμπυκνωμένο ή ατελές επιχείρημα που απαιτεί συμπλήρωση με ένα σύστημα δηλώσεων  $\Sigma$ , το οποίο με την προσθήκη της δήλωσης ότι  $p$  ως υπόθεση (επομένως ούτε ως αληθές ούτε ως ψευδούς δήλωσης) συνεπάγεται ότι  $q$ . Η σύνθετη δήλωση που προκύπτει από τη σύζευξη των στοιχείων του  $\Sigma$  και της  $p$  συνεπάγεται την  $q$  (ή άλλη). Το σύστημα  $\Sigma$  «στηρίζει» τον υποθετικό λόγο, αλλά δεν τον συνεπάγεται. Άλλοι συγγραφείς υποστηρίζουν ότι ο υποθετικός λόγος του β' είδους δεν ανάγεται σε τίποτε άλλο. Ο Dummett (1983: 126-27) αναλύει την  $A \rightarrow (B \vee \neg B)$  με δύο τρόπους: (i) υπάρχει μία συνθήκη  $\Sigma$  τέτοια ώστε  $A \wedge \Sigma \rightarrow B$  και  $A \wedge \neg \Sigma \rightarrow \Gamma$ , λ.χ., αν ο Ν συναντούσε τον Μ ή θα του μιλούσε ευγενικά ή θα τον έβριζε. Η συμπεριφορά του Ν θα εξαρτηθεί από τον τόπο της συνάντησης (συνθήκη  $\Sigma$ ). (ii) δεν υπάρχει επαρκής συνθήκη ώστε να αποχωστούμε εκ των προτέρων αν θα συμβεί το Β ή το Γ: λ.χ. «αν μία φωτεινή δέσμη πέσει πάνω σε ένα άτομο, το άτομο είτε θα μεταπηδήσει σε ανώτερη τροχιά, είτε θα μείνει στην ίδια τροχιά: αλλά τίποτε δεν μπορεί να καθορίσει εκ των προτέρων τι θα συμβεί». Βλ. και παρακάτω τη συζήτηση για την «υποθετική υποτακτική» [ΣτΜ].

2. Αντιστοιχεί στο «κόριο μοντέλο» (intended model) που ορίζεται ως το μοντέλο που υποτίθεται πως πρέπει να συλλάβουν τα αξιώματά μας. Λόγου χάρι, το πέμπτο αξίωμα του Peano προσπαθεί να συλλάβει την αρχή της μαθηματικής επαγωγής και δεν παριστάνεται στον πρωτοβάθμιο κατηγορηματικό λογιισμό του οποίου τα μοντέλα επιτρέπουν το πολύ ένα αριθμητικό πλήθος από ιδιότητες. Λέμε ότι αυτή η αξιωματική διεύθυνση κωδικοποιεί «en mérito» τη θεωρία των φυσικών αριθμών [ΣτΜ].



