Henri Poincaré

Η ΛΟΓΙΚΗ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ*

Μετάφραση: *Γιῶργος Μαραγκός*

1. *Τί πρέπει νὰ εἶναι μιὰ ταξινομία.*

ΟΙ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΚΑΝΟΝΕΣ τῆς λογικῆς εἶναι ἄραγε δυνατὸν νὰ ἐφαρμόζονται ὡς ἔχουν ὅταν ἡ θεωρητικὴ ἔρευνα ἀφορᾶ συλλογὲς ἀπὸ ἀπειροπληθῆ ἀντικείμενα; Αὐτὸ τὸ ἐρώτημα δὲν ἀπασχόλησε τοὺς μαθηματικοὺς ἐξ ἀρχῆς· ἀπὸ τότε ὅμως ποὺ αὐτοὶ ἔγιναν εἰδικοὶ στὴ μελέτη τοῦ ἀπείρου, τὰ πράγματα τοὺς ὤθησαν νὰ διερευνήσουν τὸ ἐρώτημα καθὼς ξαφνικὰ ἀνέκυψαν ὁρισμένες, ἔστω φαινομενικές, ἀντιφάσεις. Οἱ ἀντιφάσεις αὐτὲς προέρχονται ἄραγε ἀπὸ κακὴ ἐφαρμογὴ τῶν κανόνων τῆς λογικῆς, ἢ ἀπὸ τὸ ὅτι οἱ κανόνες αὐτοὶ παύουν νὰ ἰσχύουν ἔξω ἀπὸ τὸ οἰκεῖο πεδίο τους, ἔξω δηλαδὴ ἀπὸ τὸ πεδίο συλλογῶν ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ πεπερασμένο ἀριθμὸ ἀντικειμένων; Πιστεύω ὅτι δὲν θὰ ἦταν ἀνώφελο νὰ ἀσχοληθοῦμε δι᾿ ὀλίγων μὲ τὸ ὅλο θέμα, καὶ νὰ δώσουμε στοὺς ἀναγνῶστες μιὰ ἰδέα ἀπὸ τὶς πιὸ πρόσφατες συζητήσεις τὶς σχετικὲς μὲ τὸ ἐν λόγῳ πρόβλημα.

Ἡ τυπικὴ λογικὴ εἶναι ἁπλῶς ἡ μελέτη τῶν ἰδιοτήτων ποὺ εἶναι κοινὲς σὲ ὅλες τὶς ταξινομίες. Μᾶς διδάσκει ὅτι, ἂν δύο στρατιῶτες ἀνήκουν στὸ ἴδιο σύνταγμα, ἀνήκουν ὡς ἐκ τούτου στὴν ἴδια ταξιαρχία, καὶ κατὰ συνέπεια στὴν ἴδια μεραρχία: αὐτὴ εἶναι ὅλη κι ὅλη ἡ θεωρία τοῦ συλλογισμοῦ. Ποιός ὅρος λοιπὸν πρέπει νὰ ἱκανοποιεῖται γιὰ νὰ ἰσχύουν οἱ κανόνες αὐτῆς τῆς λογικῆς; Ἡ ἑκάστοτε ταξινομία πρέπει νὰ εἶναι *ἀμετάβλητη*. Μαθαίνουμε ὅτι δύο στρατιῶτες ἀνήκουν στὸ ἴδιο σύνταγμα, καὶ θέλουμε νὰ συμπεράνουμε ἐξ αὐτοῦ ὅτι ἀνήκουν στὴν ἴδια ταξιαρχία· τὸ ἔχουμε αὐτὸ τὸ δικαίωμα, μὲ τὸν ὅρο ὅτι, ἐνόσω ἐκδιπλώνεται ὁ συλλογισμός μας, δὲν ἔχει μετατεθεῖ σὲ ἄλλο σύνταγμα κάποιος ἀπὸ τοὺς δύο στρατευμένους μας.

Οἱ ἀντινομίες ποὺ ἔχουν ἐπισημανθεῖ προέρχονται ὅλες ἀπὸ τὸ ὅτι λησμο-

* H. Poincaré, «La logique de l'infini», *Dernières Pensées*, Παρίσι 1963 ('1913)· πρώτη δημοσίευση *Révue de Métaphysique et de Morale* (1909), 461-482.

νεῖται αὐτὸς ὁ τόσο ἁπλὸς ὅρος: στὴ βάση ὑπῆρχε μιὰ ταξινομία ποὺ οὔτε ἦταν οὔτε μποροῦσε νὰ εἶναι ἀμετάβλητη. Βεβαίως, ἡ ταξινομία εἶχε προκαταβολικὰ ἀνακηρυχτεῖ *ἀμετάβλητη*. Αὐτὸ ὅμως τὸ προληπτικὸ μέτρο ἦταν ἀνεπαρκές· ἡ ταξινομία ἔπρεπε νὰ καταστεῖ ὄντως ἀμετάβλητη, κι αὐτὸ σὲ ὁρισμένες περιπτώσεις δὲν εἶναι δυνατόν.

Ἂς μοῦ ἐπιτραπεῖ νὰ ἐπαναλάβω ἐδῶ ἕνα παράδειγμα ποὺ ἔχει φέρει ὁ κ. Russell. Ἐξ ἄλλου τὸ ἐπικαλέστηκε ἐναντίον μου. Ἤθελε νὰ δείξει ὅτι οἱ δυσκολίες δὲν προέρχονταν ἀπὸ τὴν εἰσαγωγὴ τοῦ *ἐνεργείᾳ* ἀπείρου, καθὼς ἐμφανίζονται ἀκόμη καὶ ὅταν θεωροῦμε πεπερασμένους ἀριθμούς. Ἐπ᾽ αὐτοῦ θὰ ἐπανέλθω κατωτέρω — τώρα μὲ ἀπασχολεῖ κάτι ἄλλο, καὶ ἐπιλέγω τὸ παράδειγμα γιατὶ εἶναι διασκεδαστικὸ καὶ δείχνει ἀνάγλυφα τὸ γεγονὸς ποὺ ἐπισήμανα.

Ποιός εἶναι ὁ μικρότερος ἀκέραιος ἀριθμὸς ποὺ δὲν ὁρίζεται μέσω προτάσεων μὲ λιγότερες ἀπὸ ἑκατὸ λέξεις τῆς γαλλικῆς, ἂς ποῦμε, γλώσσας; Καὶ πρῶτα-πρῶτα, ὑπάρχει αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

Ναί, γιατὶ μὲ ἑκατὸ λέξεις τῆς γαλλικῆς μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε πεπερασμένο μόνο ἀριθμὸ φράσεων, ἀφοῦ ὁ ἀριθμὸς λέξεων τοῦ γαλλικοῦ λεξιλογίου εἶναι περιορισμένος. Στὶς φράσεις αὐτὲς θὰ συγκαταλέγονται καὶ μερικὲς ποὺ δὲν θὰ ἔχουν κανένα νόημα καὶ δὲν θὰ ὁρίζουν κανέναν ἀκέραιο. Κάθε φράση μὲ νόημα θὰ ὁρίζει *τὸ πολὺ* ἕναν μόνο ἀκέραιο. Ὡς ἐκ τούτου, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκεραίων ποὺ θὰ ἦταν δυνατὸν νὰ ὁριστοῦν κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπο εἶναι περιορισμένος· ἑπομένως ὑπάρχουν ὁπωσδήποτε ἀκέραιοι ποὺ δὲν ὁρίζονται κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπο, κι ἀνάμεσα στοὺς ἀκεραίους αὐτοὺς ὑπάρχει βεβαίως ἕνας μικρότερος ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους.

Ὄχι, γιατὶ ἂν ὑπῆρχε αὐτὸς ὁ ἀριθμός, ἡ ὕπαρξή του θὰ εἶχε ὡς συνέπεια μιὰν ἀντίφαση, ἀφοῦ θὰ ὁριζόταν ἀπὸ τὴν ἴδια τὴ φράση ποὺ βεβαιώνει ὅτι δὲν μπορεῖ νὰ ὑπάρχει.

Ὁ συλλογισμὸς αὐτὸς στηρίζεται σὲ μιὰ ταξινομία τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν σὲ δύο κατηγορίες: ὅσους ὁρίζονται μὲ μιὰ φράση μὲ λιγότερες ἀπὸ ἑκατὸ λέξεις τῆς γαλλικῆς, καὶ ὅσους δὲν ὁρίζονται κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπο. Θέτοντας τὸ ἐρώτημα, προβάλλουμε σιωπηρὰ τὸν ἰσχυρισμὸ ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ταξινομία εἶναι ἀμετάβλητη, καὶ ὅτι ἀρχίζουμε νὰ συλλογιζόμαστε μετὰ τὴν ὁριστικὴ συγκρότησή της. Κάτι τέτοιο ὅμως εἶναι ἀδύνατον. Ἡ ταξινομία μπορεῖ νὰ ὁριστικοποιηθεῖ μόνον ἐφ᾽ ὅσον θὰ ἔχουμε διατρέξει ὅλες τὶς φράσεις μὲ λιγότερες ἀπὸ ἑκατὸ λέξεις, καὶ ἀφοῦ θὰ ἔχουμε ἀπορρίψει ὅσες ἀπὸ αὐτὲς δὲν ἔχουν νόημα, καὶ θὰ ἔχουμε ἐν τέλει προσδιορίσει ἐπακριβῶς τὸ νόημα ὅσων ἔχουν νόημα. Ὡστόσο, μερικὲς ἀπὸ τὶς φράσεις αὐτὲς ἀποκτοῦν νόημα μόνο μετὰ τὴν ὁριστικὴ συγκρότηση τῆς ταξινομίας, κι αὐτὲς εἶναι ὅσες ἀφοροῦν στὴν ἴδια τὴν ταξινομία. Συνοπτικά: ἡ ταξινομία τῶν ἀριθμῶν ὁριστικοποιεῖται μόνον *ἀφοῦ περατωθεῖ* ἡ διαλογὴ τῶν προτάσεων, καὶ ἡ διαλογὴ αὐτή, μὲ τὴ σειρά της, περατώνεται μόνο *ἀφοῦ ὁριστικοποιηθεῖ* ἡ ταξινομία, ἔτσι ὥστε *ποτὲ* δὲν μπορεῖ νὰ ὁριστεῖ οὔτε ἡ ταξινομία οὔτε ἡ διαλογή.

Τέτοιου εἴδους δυσκολίες ἀνακύπτουν πολὺ συχνότερα ὅταν ἐξετάζονται ἀπειροπληθεῖς συλλογές. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ στόχος εἶναι νὰ ταξινομηθοῦν τὰ στοιχεῖα ἀπειροπληθοῦς συλλογῆς καὶ ὅτι ἡ ἀρχὴ δυνάμει τῆς ὁποίας γίνεται ἡ ταξινομία στηρίζεται σὲ κάποια σχέση τοῦ πρὸς ταξινόμηση στοιχείου μὲ τὴ συλλογὴ θεωρούμενη ὡς ὅλον. Εἶναι ποτὲ δυνατὸν παρόμοια ταξινομία νὰ θεωρηθεῖ ὡς τετελεσμένη; Δὲν ὑπάρχει *ἐνεργείᾳ* ἄπειρο, καὶ ὅταν κάνουμε λόγο γιὰ συλλογὴ μὲ ἄπειρα τὸ πλῆθος στοιχεῖα, ἐννοοῦμε μιὰ συλλογὴ ὅπου εἶναι δυνατὸν νὰ προστίθενται διαρκῶς στοιχεῖα (κατ᾽ ἀναλογία πρὸς ἕναν κατάλογο συνδρομητῶν ποὺ δὲν θὰ ἔκλεινε ποτὲ ἐν ἀναμονῇ νέων συνδρομητῶν). Ὡς ἐκ τούτου, ἡ ταξινομία δὲν θὰ ἦταν τετελεσμένη παρὰ μόνον ἐφ᾽ ὅσον ὁ κατάλογος θὰ εἶχε κλείσει. Ὅποτε προστίθενται νέα στοιχεῖα στὴν ταξινομία, ἡ ταξινομία τροποποιεῖται. Εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ ἀλλάζει καὶ ἡ σχέση τῆς συλλογῆς πρὸς τὰ ἤδη ταξινομημένα στοιχεῖα· καὶ δεδομένου ὅτι τὰ στοιχεῖα ἔχουν τοποθετηθεῖ στὸ α ἢ στὸ β συρτάρι σύμφωνα μὲ τὴ σχέση αὐτή, διόλου δὲν ἀποκλείεται κάποτε, ἂν καὶ ἐφ᾽ ὅσον ἡ σχέση ἔχει ὄντως ἀλλάξει, τὰ στοιχεῖα τῆς ταξινομίας νὰ μὴν εἶναι πιὰ στὸ σωστὸ συρτάρι καὶ νὰ χρειάζεται νὰ μετακινηθοῦν σὲ ἄλλο. Ὅσο ὑπάρχουν νέα πρὸς ταξινόμηση στοιχεῖα, ὑπάρχει πάντοτε φόβος νὰ χρειαστεῖ νὰ ἐπαναληφθεῖ τὸ ἔργο ἐξ ὑπαρχῆς. Καὶ ἡ ἀλήθεια εἶναι ὅτι ποτὲ δὲν θὰ πάψουν νὰ ὑπάρχουν νέα πρὸς ταξινόμηση στοιχεῖα· ἑπομένως, ἡ ταξινομία ποτὲ δὲν θὰ εἶναι τετελεσμένη.

Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει, ὅσον ἀφορᾶ στὰ στοιχεῖα ἀπειροπληθῶν συλλογῶν, ἡ διάκριση ἀνάμεσα σὲ δύο εἴδη ταξινομίας, ἐφαρμόσιμα στὰ στοιχεῖα τῶν ἀπειροπληθῶν συλλογῶν: οἱ *κατηγορηματικὲς* [prédicatives] καὶ οἱ *μὴ κατηγορηματικές* [non prédicatives]. Οἱ κατηγορηματικὲς ταξινομίες εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνατραποῦν μόνο ἂν εἰσαχθοῦν νέα μέλη· οἱ μὴ κατηγορηματικὲς εἶναι τέτοιες ὥστε ἡ εἰσαγωγὴ νέων στοιχείων ἐξαναγκάζει σὲ διαρκὴ τροποποίησή τους.

Ἂς ὑποθέσουμε, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι οἱ ἀκέραιοι ταξινομοῦνται σὲ δύο οἰκογένειες ἀνάλογα μὲ τὸ μέγεθός τους. Μποροῦμε νὰ ἀναγνωρίσουμε ἂν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τοῦ 10, χωρὶς νὰ χρειάζεται νὰ συνυπολογίσουμε τὶς σχέσεις τοῦ ἑκάστοτε ἀριθμοῦ μὲ τὸ σύνολο τῶν ὑπολοίπων ἀκεραίων. Ἔστω ὅτι ἔχουν ὁριστεῖ οἱ πρῶτοι 100· θὰ εἶναι τότε γνωστὸ ποιοί ἐξ αὐτῶν εἶναι μικρότεροι τοῦ 10 καὶ ποιοί μεγαλύτεροι· ὅταν στὴ συνέχεια θὰ λάβουμε τὸν ἀριθμὸ 101, ἢ οἱονδήποτε ἀπὸ τοὺς ἑπόμενους, ὅσοι ἀπὸ τοὺς πρώτους 100 ἦταν μικρότεροι τοῦ 10 θὰ ἐξακολουθοῦν νὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ 10, ὅσοι ἦταν μεγαλύτεροι θὰ ἐξακολουθοῦν νὰ εἶναι μεγαλύτεροι· ἡ ταξινομία αὐτὴ εἶναι κατηγορηματική.

Ἂς φανταστοῦμε, ἀπὸ τὴν ἄλλη, ὅτι θέλουμε νὰ ταξινομήσουμε τὰ σημεῖα τοῦ χώρου, καὶ ὅτι διακρίνουμε ὅσα εἶναι δυνατὸν νὰ ὁριστοῦν μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων ἀπὸ ὅσα δὲν ὁρίζονται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο. Μερικὲς ἀπὸ τὶς φράσεις αὐτὲς θὰ μνημονεύουν ὁλόκληρη τὴ συλλογή, δηλαδὴ τὸν χῶρο ἢ μέρη τοῦ χώρου. Ὅταν θὰ εἰσαχθοῦν νέα σημεῖα στὸν χῶρο, τὸ νόημα τῶν φράσεων αὐτῶν θὰ μεταβληθεῖ καὶ δὲν θὰ ὁρίζουν πιὰ τὸ ἴδιο σημεῖο· ἢ θὰ χάσουν κάθε νόημα· μπορεῖ ἀκόμη καὶ νὰ ἀποκτήσουν νόημα, ἐνῶ πρωτύτερα δὲν εἶχαν. Καὶ τότε, θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ὁριστοῦν σημεῖα ποὺ πρωτύτερα δὲν ὁρίζονταν· ἄλλα πάλι θὰ πάψουν νὰ ὁρίζονται, ἐνῶ πρωτύτερα ὁρίζονταν. Θὰ πρέπει ἀναγκαστικὰ νὰ περάσουν ἀπὸ μία κατηγορία σὲ μιὰ ἄλλη. Ἡ ταξινομία αὐτὴ δὲν θὰ εἶναι κατηγορηματική.

Μερικοὶ σώφρονες θεωροῦν ὅτι ἐπιτρέπεται νὰ στοχαζόμαστε μόνο γιὰ ὅσα ἀντικείμενα ὁρίζονται μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων, καὶ ἀπὸ τὴν πλευρά μου δὲν θὰ μποροῦσα βεβαίως νὰ μὴν τοὺς θεωρῶ σώφρονες, ἀφοῦ μάλιστα κι ἐγὼ ὁ ἴδιος πρόκειται νὰ ὑπερασπίσω τὴ γνώμη τους. Ὁρισμένοι ἴσως κρίνουν ἀπρόσφορο τὸ προηγούμενο παράδειγμα, δὲν εἶναι ὅμως δύσκολο νὰ τροποποιηθεῖ.

Γιὰ νὰ ταξινομήσω τοὺς ἀκεραίους, ἢ τὰ σημεῖα τοῦ χώρου, θὰ ἐξέταζα τὴ φράση ποὺ ὁρίζει κάθε ἀκέραιο ἢ κάθε σημεῖο. Ὁ ἴδιος ἀριθμός, ἢ τὸ ἴδιο σημεῖο, μπορεῖ κάλλιστα νὰ ὁρίζεται μὲ περισσότερες ἀπὸ μία φράσεις· θὰ ταξινομοῦσα λοιπὸν τὶς φράσεις αὐτὲς κατ' ἀλφαβητικὴ σειρά, καὶ ἀνάμεσά τους θὰ ἐπέλεγα τὴν πρώτη. Ἡ ἑκάστοτε ἐπιλεγόμενη φράση θὰ τελειώνει ἢ σὲ φωνῆεν ἢ σὲ σύμφωνο, καὶ ἡ ταξινομία θὰ μποροῦσε νὰ γίνει σύμφωνα μ' αὐτὸ τὸ κριτήριο. Ὡστόσο μιὰ ταξινομία τέτοιου εἴδους δὲν θὰ ἦταν κατηγορηματική· ἂν εἰσαχθοῦν νέοι ἀκέραιοι, ἢ νέα σημεῖα, φράσεις ποὺ δὲν εἶχαν νόημα ἐνδέχεται νὰ ἀποκτήσουν. Καὶ τότε στὸν κατάλογο τῶν φράσεων ὅσων ὁρίζουν ἕναν ἀκέραιο, ἢ ἕνα σημεῖο, θὰ πρέπει κατ' ἀνάγκη νὰ προστεθοῦν νέες φράσεις ποὺ, ἐνῶ ἕως ἐκείνη τὴ στιγμὴ δὲν εἶχαν νόημα, ἀπέκτησαν μόλις, καὶ ὁρίζουν ἀκριβῶς αὐτὸ τὸ ἴδιο σημεῖο. Δὲν ἀποκλείεται οἱ νέες φράσεις νὰ βρεθοῦν στὴν κεφαλὴ τοῦ ἀλφαβητικοῦ καταλόγου, καὶ νὰ τελειώνουν σὲ φωνῆεν, ἐνῶ οἱ παλαιὲς τελείωναν σὲ σύμφωνο. Καὶ τότε ὁ ἀκέραιος, ἢ τὸ σημεῖο μας, ἐνῶ εἶχαν προσωρινὰ ταξινομηθεῖ σὲ μία κατηγορία, θὰ πρέπει νὰ μεταφερθοῦν σὲ ἄλλη.

Ἄν, ἀντιθέτως, ταξινομοῦμε τὰ σημεῖα τοῦ χώρου κατὰ τὸ μέγεθος τῶν συντεταγμένων τους, καὶ συμφωνήσουμε νὰ ταξινομοῦμε μαζὶ ὅλα ὅσα ἔχουν τεταγμένη μικρότερη τοῦ 10, τότε, ὅταν εἰσαχθοῦν νέα σημεῖα, ὅσα ὁρίζονταν κατὰ τὸν ὅρο αὐτό, δὲν θὰ πάψουν νὰ τὸν ἱκανοποιοῦν. Αὐτὴ ἡ ταξινομία θὰ εἶναι κατηγορηματική.

Ὅσα ἐλέχθησαν γιὰ τὶς ταξινομίες ἐφαρμόζονται ἀπευθείας στοὺς ὁρισμούς, γιατὶ ὄντως κάθε ὁρισμὸς εἶναι ταξινομία. Ἕνας ὁρισμὸς χωρίζει ὅσα ἀντικείμενα τὸν ἱκανοποιοῦν ἀπὸ ὅσα δὲν τὸν ἱκανοποιοῦν καὶ τὰ τοποθετεῖ σὲ δύο κλάσεις, διακριτὲς ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλη. Ἂν ὁ ὁρισμὸς χωρεῖ, κατὰ τη Σχολαστικὴ ὁρολογία, per proximum genus et differentiam specificam, προφανῶς βασίζεται στὴ διαίρεση τοῦ γένους σὲ εἴδη. Ἑπομένως, οἱ ὁρισμοὶ ὅπως καὶ οἱ ταξινομίες μπορεῖ νὰ εἶναι ἢ νὰ μὴν εἶναι κατηγορηματικοί.

Ἐδῶ ὅμως ἀναφύεται μιὰ δυσκολία. Ἂς πάρουμε πάλι τὸ προηγούμενο παράδειγμα. Οἱ ἀκέραιοι ἀνήκουν στὴν κλάση Α ἢ στὴν κλάση Β, ἀνάλογα ἂν εἶναι μικρότεροι ἢ μεγαλύτεροι τοῦ 10.5. Ὅρισα μερικοὺς ἀκεραίους α β γ..., καὶ τοὺς καταχώρησα σὲ δύο κλάσεις Α καὶ Β. Ὁρίζω καὶ εἰσάγω νέους ἀκεραίους. Εἶπα ὅτι ἡ καταχώρηση δὲν τροποποιήθηκε καὶ ὅτι ἄρα ἡ ταξινομία ἦταν κατηγορηματική. Προκειμένου ὅμως νὰ μὴν ἀλλάξει ἡ θέση τοῦ α στὴν ταξινομία, δὲν ἀρκεῖ νὰ μὴν ἔχει ἀλλάξει τὸ πλαίσιο τῆς ταξινομίας, ἐπὶ πλέον πρέπει ὁ ἀριθμὸς α νὰ ἔχει μείνει ὁ ἴδιος, πρέπει δηλαδὴ ὁ ὁρισμός του νὰ εἶναι κατηγορηματικός. Διὰ ταῦτα, ἀπὸ μιὰ ὁρισμένη σκοπιά, δὲν θὰ ἔπρεπε νὰ λέγεται ὅτι μιὰ ταξινομία εἶναι κατηγορηματικὴ ἁπλῶς, ἀλλὰ ὅτι εἶναι κατηγορηματικὴ ὡς πρὸς ἕναν τρόπο ὁρισμοῦ.

2. *Ὁ πληθικὸς ἀριθμός.*

Οἱ ὡς ἄνω ἐπισημάνσεις δὲν πρέπει νὰ λησμονοῦνται ὅταν ὁρίζονται οἱ ἀπόλυτοι, πληθικοί, ἀριθμοί. Ἂν πάρουμε δύο συλλογές, θὰ ἦταν δυνατὸν νὰ θεσπίσουμε ἕνα νόμο ἀντιστοιχίας ἀνάμεσα στὰ ἀντικείμενα αὐτῶν τῶν δύο συλλογῶν, ἔτσι ὥστε σὲ κάθε ἀντικείμενο τῆς πρώτης νὰ ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνο ἕνα στοιχεῖο τῆς δεύτερης, καὶ ἀντιστρόφως. Ἂν κάτι τέτοιο εἶναι ἐφικτό, λέμε ὅτι οἱ δύο συλλογὲς ἔχουν τὸν ἴδιο πληθικὸ ἀριθμὸ [πληθάριθμο].

Καὶ ἐδῶ, ὅμως, ὁ νόμος ἀντιστοιχίας ἐνδείκνυται νὰ εἶναι κατηγορηματικός. Ἂν πρόκειται γιὰ δύο ἀπειροπληθεῖς συλλογές, ποτὲ δὲν θὰ μπορέσουμε νὰ τὶς συλλάβουμε ἐξαντλητικά. Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε πάρει στὴν πρώτη ὁρισμένο ἀριθμὸ ἀντικειμένων, ὁ νόμος ἀντιστοιχίας θὰ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὁρίσουμε τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς δεύτερης. Ἄν, στὴ συνέχεια, εἰσάγουμε νέα ἀντικείμενα, εἶναι δυνατὸν μὲ τὴν εἰσαγωγὴ τῶν νέων στοιχείων νὰ ἀλλάξει τὸ νόημα τοῦ νόμου ἀντιστοιχίας, ἔτσι ὥστε τὸ ἀντικείμενο Α' τῆς δεύτερης συλλογῆς, ἐνῶ πρὶν ἀπὸ τὴν εἰσαγωγὴ τῶν νέων ἀντικειμένων ἀντιστοιχοῦσε στὸ ἀντικείμενο Α τῆς πρώτης, μετὰ τὴν εἰσαγωγὴ τῶν νέων, δὲν ἀντιστοιχεῖ πλέον στὸ Α. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὁ νόμος ἀντιστοιχίας δὲν θὰ εἶναι κατηγορηματικός.

Θὰ προσπαθήσω νὰ τὸ ἐξηγήσω αὐτὸ μὲ δύο ἀντιτιθέμενα παραδείγματα. Θεωρῶ τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων καὶ τὸ σύνολο τῶν ἀρτίων. Σὲ κάθε ἀκέραιο n μπορῶ νὰ ἀντιστοιχήσω τὸν ἄρτιο $2n$. Ὅταν θὰ εἰσαγάγω νέους ἀκεραίους, στὸν ἀκέραιο n θὰ ἀντιστοιχεῖ πάντοτε ὁ ἴδιος ἄρτιος $2n$. Ὁ νόμος ἀντιστοιχίας εἶναι κατηγορηματικός, καὶ τὸ ἴδιο ἰσχύει γιὰ ὅλους ὅσους λαμβάνει ὁ Cantor γιὰ νὰ ἀποδείξει, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι ὁ πληθάριθμος τῶν ρητῶν ἰσοῦται μὲ τὸν πληθάριθμο τῶν ἀκεραίων, ἢ ὅτι ὁ πληθάριθμος τῶν σημείων τοῦ χώρου ἰσοῦται μὲ τὸν πληθάριθμο τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας.

Σὲ ἀντιπαράθεση, ἂς ὑποθέσουμε ὅτι συγκρίνουμε τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων μὲ τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ χώρου ποὺ εἶναι δυνατὸν νὰ ὁριστοῦν μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων. Ἔστω ὅτι ἐγκαθιδρύω μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν συνόλων τὴν ἀκόλουθη ἀντιστοιχία. Καταρτίζω τὸν κατάλογο ὅλων τῶν δυνατῶν φράσεων· κατατάσσω τὶς φράσεις μὲ τὴ σειρὰ κατὰ τὸν ἀριθμὸ τῶν λέξεων, καὶ κατ᾽ ἀλφαβητικὴ σειρὰ ὅσες ἔχουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ λέξεων. Διαγράφω ὅσες δὲν ἔχουν κανένα νόημα ἢ δὲν ὁρίζουν κανένα σημεῖο, ἢ ὁρίζουν σημεῖο ποὺ ἔχει ἤδη ὁριστεῖ μὲ μία ἀπὸ τὶς προηγούμενες φράσεις τοῦ καταλόγου. Σὲ κάθε σημεῖο, θὰ ἀντιστοιχίσω τὴ φράση ποὺ τὸ ὁρίζει, καὶ τὸν *ἀριθμὸ σειρᾶς* ποὺ κατέχει ἡ ἑκάστοτε φράση στὸν κατάλογο ποὺ θὰ ἔχω ἀποκαθάρει ἔτσι ὅπως μόλις ἐξέθεσα.

Ὅταν θὰ εἰσαγάγω νέα σημεῖα, εἶναι δυνατὸν φράσεις ποὺ δὲν εἶχαν πρὶν νόημα νὰ ἀποκτήσουν· ἢ νὰ πρέπει νὰ καταχωρηθοῦν ἐκ νέου στὸν κατάλογο ἀπ᾽ ὅπου εἶχαν πρωτύτερα διαγραφεῖ· καὶ ὡς ἐκ τούτου ὁ ἀριθμὸς σειρᾶς ὅλων τῶν ἄλλων φράσεων θὰ ἀλλάξει. Οἱ ἀντιστοιχίες θὰ ἀνατραποῦν πλήρως· ὁ νόμος ἀντιστοιχίας ποὺ θεσπίσαμε δὲν εἶναι κατηγορηματικός.

Ἂν δὲν ἀποδίδαμε τὴ δέουσα προσοχὴ στὸν ὅρο αὐτὸν κατὰ τὴ σύγκριση τῶν πληθαρίθμων, θὰ ὁδηγούμαστε σὲ μοναδικὰ παράδοξα. Τὸ ὀρθὸ λοιπὸν θὰ ἦταν νὰ τροποποιήσουμε τὸν ὁρισμὸ τῶν πληθαρίθμων διευκρινίζοντας ὅτι ὁ νόμος ἀντιστοιχίας ποὺ σ᾽ αὐτὸν θεμελιώνεται ὁ ὁρισμὸς τῶν πληθαρίθμων πρέπει νὰ εἶναι κατηγορηματικός.

Κάθε νόμος ἀντιστοιχίας βασίζεται σὲ μιὰ ταξινομία. Τὰ ἀντικείμενα τῶν δύο ὑπὸ σύγκριση συλλογῶν πρέπει νὰ τὰ ταξινομήσουμε· καὶ οἱ δύο ταξινομίες πρέπει νὰ εἶναι παράλληλες. Ἂν, γιὰ παράδειγμα, τὰ ἀντικείμενα τῆς πρώτης κατανέμονται σὲ κλάσεις, ποὺ ὑποδιαιροῦνται σὲ τάξεις, κι αὐτὲς ὑποδιαιροῦνται σὲ οἰκογένειες κτλ., τὸ ἴδιο θὰ πρέπει νὰ συμβαίνει καὶ μὲ τὴ δεύτερη συλλογή. Σὲ κάθε κλάση τῆς πρώτης ταξινομίας θὰ πρέπει νὰ ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνο μία κλάση τῆς δεύτερης, ὅπως καὶ σὲ κάθε τάξη καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως ὅτου φτάσουμε στὰ ἄτομα αὐτὰ καθαυτά.

Καὶ τότε βλέπουμε ποιός ὅρος πρέπει νὰ ἱκανοποιεῖται προκειμένου νὰ εἶναι κατηγορηματικὸς ἕνας νόμος ἀντιστοιχίας: πρέπει οἱ δύο ταξινομίες ποὺ σ᾽ αὐτὲς στηρίζεται ὁ ἑκάστοτε νόμος νὰ εἶναι οἱ ἴδιες κατηγορηματικές.

3. *Τὸ ὑπόμνημα τοῦ κ. Russell.*

Πρόσφατα δημοσιεύτηκε στὸ *American Journal of Mathematics*, τόμος XXX, ὑπόμνημα τοῦ κ. Russell, μὲ τὸν τίτλο «Mathematical logics as based on the Theory of Types», βασισμένο σὲ θεωρήσεις ἐν πολλοῖς ἀνάλογες πρὸς ὅσες

ἐκτέθηκαν ἐδῶ. Ἀφοῦ ὑπενθυμίσει μερικὰ ἀπὸ τὰ πιὸ γνωστὰ λογικὰ παράδοξα, ὁ κ. Russell ἀναζητεῖ τὴν πηγή τους, καὶ ὀρθὰ τὴν ἐντοπίζει σὲ ἕνα εἶδος φαύλου κύκλου. Οἱ ἀντινομίες ἀνακύπτουν ἐπειδὴ μέλη τῶν ὑπὸ θεώρηση συλλογῶν εἶναι ἀντικείμενα τέτοια ὥστε στὸν ὁρισμό τους ἐμφανίζεται ἡ ἴδια ἡ ἑκάστοτε συλλογή· καὶ γίνεται χρήση μὴ κατηγορηματικῶν ὁρισμῶν. Κατὰ τὸν κ. Russell, ὑπάρχει σύγχυση μεταξὺ τῶν ὅρων *all* καὶ *any* – *ὅλα* καὶ *οἱοδήποτε*.

Ὁδηγεῖται ἔτσι νὰ φανταστεῖ ὅ,τι ὀνομάζει *ἱεραρχία* [λογικῶν] *τύπων*. Ἔστω μία πρόταση ἀληθὴς γιὰ ἕνα *οἱοδήποτε* ἄτομο δεδομένης κλάσης. Ὅταν ἀναφερόμαστε σὲ ἕνα οἱοδήποτε ἀντικείμενο, πρέπει νὰ ἐννοοῦμε πρῶτα τὰ ἄτομα τῆς ἑκάστοτε κλάσης, ὅλα ὅσα μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἰδέα τῆς ἴδιας τῆς πρότασης. Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ θὰ τὰ ὀνομάζω *οἱαδήποτε ἀντικείμενα 1ης τάξης*. Οἱαδήποτε ἀντικείμενα 2ης τάξης θὰ εἶναι ὅσα ὁρίζονται ἔτσι ὥστε στὸν ὁρισμό τους θὰ μποροῦσε νὰ ὑπεισέρχεται ἡ ἰδέα τῆς πρότασης 1ης τάξης. Ἂν βεβαιώνω τὴν πρόταση γιὰ ὅλα τὰ ἄτομα 2ης τάξης, θὰ ἔχω μιὰ πρόταση 2ης τάξης. 3ης τάξης ἄτομα θὰ εἶναι ὅσα ὁρίζονται ἔτσι ὥστε στὸν ὁρισμό τους θὰ μποροῦσε νὰ ὑπεισέρχεται ἡ ἰδέα τῆς πρότασης 2ης τάξης· κ.ο.κ.

Ἂς πάρουμε ὡς παράδειγμα τὸ παράδοξο τοῦ Ἐπιμενίδη. Ψευδόμενος 1ης τάξης θὰ εἶναι ὅποιος ψεύδεται πάντοτε, ἐκτὸς ἀπὸ τότε ποὺ λέει ὅτι εἶναι ψευδόμενος 1ης τάξης· ψευδόμενος 2ης τάξης θὰ εἶναι ὅποιος ψεύδεται πάντοτε, ἀκόμη καὶ ὅταν λέει 'εἶμαι ψευδόμενος 1ης τάξης', ἀλλὰ δὲν ψεύδεται ὅταν λέει 'εἶμαι ψευδόμενος 2ης τάξης', κ.ο.κ. Ὅταν λοιπὸν ὁ Ἐπιμενίδης μᾶς πεῖ: 'ψεύδομαι', θὰ μποροῦμε νὰ τὸν ρωτήσουμε 'τί τάξης ψευδόμενος εἶσαι;' Καὶ μόνον ἐφ᾽ ὅσον θὰ ἔχει ἀπαντήσει σ᾽ αὐτὸ τὸ θεμιτὸ ἐρώτημα ὁ ἰσχυρισμός του θὰ ἔχει νόημα.

Ἂς πάρουμε ἕνα ἐπιστημονικότερο παράδειγμα καὶ ἂς ἐξετάσουμε τὸν ὁρισμὸ τῶν ἀκεραίων. Μιὰ ἰδιότητα ὀνομάζεται ἀναδρομικὴ ἂν ἀνήκει στὸ μηδέν, καὶ ἂν δὲν μπορεῖ νὰ ἀνήκει στὸ n, ἂν δὲν ἀνήκει στὸ $n + 1$· θὰ λέγεται ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ὅσοι ἔχουν μιὰ ἀναδρομικὴ ἰδιότητα ἀποτελοῦν ἀναδρομικὴ κλάση. Κατὰ ταῦτα, ἀκέραιος εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ὅποιος ἀριθμὸς ἔχει ὅλες τὶς ἀναδρομικὲς ἰδιότητες, δηλαδὴ ὅποιος ἀνήκει σὲ ὅλες τὶς ἀναδρομικὲς κλάσεις.

Μποροῦμε ἄραγε νὰ συναγάγουμε ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ αὐτὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀκεραίων εἶναι ἀκέραιος; Φαίνεται πὼς ναί· γιατὶ ἂν n εἶναι *δεδομένος* ἀκέραιος, οἱ ἀριθμοὶ x τέτοιοι ὥστε $n + x$ νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀποτελοῦν ἀναδρομικὴ κλάση. Ἑπομένως, ὁ ἀριθμὸς x δὲν θὰ ἦταν ἀκέραιος, ἂν δὲν ἦταν ἀκέραιος ὁ $n + x$. Ὡστόσο ὁ ὁρισμὸς αὐτῆς τῆς ἀναδρομικῆς κλάσης δὲν εἶναι κατηγορηματικός, ἀφοῦ στὸν ὁρισμό της (ποὺ μᾶς πληροφορεῖ ὅτι ὁ $n + x$ πρέπει νὰ εἶναι *ἀκέραιος*) ὑπεισέρχεται ἡ ἰδέα τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ποὺ προϋποθέτει τὴν ἰδέα ὅλων τῶν ἀναδρομικῶν κλάσεων.

Τὸ πρόβλημα ἐξ ἀνάγκης παρακάμπτεται ὡς ἑξῆς: ἂς ὀνομάσουμε ἀναδρομικὲς κλάσεις 1ης τάξης ὅσες μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε χωρὶς νὰ εἰσαγάγουμε τὴν ἰδέα τῶν ἀκεραίων, καὶ ἀκεραίους 1ης τάξης ὅσους ἀριθμοὺς ἀνήκουν σὲ ὅλες τὶς ἀναδρομικὲς κλάσεις 1ης τάξης. Ἂς ὀνομάσουμε ἀκολούθως ἀναδρομικὲς κλάσεις 2ης τάξης ὅσες μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε εἰσάγοντας ἐν ἀνάγκῃ τὴν ἰδέα τοῦ ἀκεραίου 1ης τάξης, χωρὶς ὅμως νὰ καταφύγουμε στὴν ἰδέα τοῦ ἀκεραίου ἀνώτερης τάξης· ἂς ὀνομάσουμε ἀκεραίους 2ης τάξης ὅσους ἀριθμοὺς ἀνήκουν σὲ ὅλες τὶς ἀναδρομικὲς κλάσεις 2ου εἴδους, κ.ο.κ. Καὶ τότε μποροῦμε νὰ ἀποδείξουμε, ὄχι ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀκεραίων εἶναι ἀκέραιος, ἀλλὰ ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀκεραίων τάξης K εἶναι ἀκέραιος τάξης K − 1.

Τὰ παραδείγματα αὐτὰ ἀρκοῦν, νομίζω, γιὰ νὰ γίνει κατανοητὸ αὐτὸ ποὺ ὁ κ. Russell ὀνομάζει ἱεραρχία [λογικῶν] τύπων. Ἀνακύπτουν ὅμως ὁρισμένα ἐρωτήματα καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν ὁ συγγραφέας δὲν ἔχει ἐκφέρει γνώμη.

1ο) Στὴν ἱεραρχία αὐτὴ εἰσάγονται χωρὶς δυσκολία προτάσεις 1ης, 2ης καὶ ἐν γένει *n*-ιοστῆς τάξης, ὅπου *n* οἱοσδήποτε πεπερασμένος ἀκέραιος. Εἶναι ἄραγε δυνατὸν νὰ θεωρήσει κανεὶς κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο προτάσεις τάξης α, ὅπου α εἶναι ὑπερπεπερασμένος τακτικὸς ἀριθμός; Ὁ κ. König ἐπινόησε μιὰ θεωρία ποὺ κατ᾽ οὐσίαν δὲν διαφέρει ἀπὸ τὴ θεωρία τοῦ κ. Russell· χρησιμοποιεῖ εἰδικὴ σημειογραφία ὅπου συμβολίζει μὲ Λ (NV) τὰ ἀντικείμενα 1ης τάξης, μὲ $Λ (NV)^2$ τὰ ἀντικείμενα 2ης τάξης, κτλ. NV εἶναι τὰ ἀρχικὰ τῆς ἔκφρασης ne varietur. Ὁ κ. König δὲν διστάζει νὰ εἰσαγάγει ἀντικείμενα $Λ (NV)^α$, ὅπου α εἶναι ὑπερπεπερασμένος, χωρὶς ὅμως ἀπὸ τὴν ἄλλη νὰ ἐξηγεῖ ἐπαρκῶς τί ἐννοεῖ.

2ο) Ὅποιος ἀπαντᾶ καταφατικὰ στὸ πρῶτο ἐρώτημα, θὰ πρέπει νὰ ἐξηγήσει τί ἐννοεῖ ὅταν κάνει λόγο γιὰ ἀντικείμενα τάξης ω, ὅπου ω εἶναι τὸ σύνηθες ἄπειρο, δηλαδὴ ὁ πρῶτος ὑπερπεπερασμένος τακτικὸς ἀριθμός, ἢ ὅταν κάνει λόγο γιὰ ἀντικείμενα τάξης α, ὅπου α θὰ ἦταν οἱοσδήποτε ὑπερπεπερασμένος τακτικὸς ἀριθμός.

3ο) Ὅποιος, ἀντίθετα, ἀπαντᾶ ἀποφατικὰ στὸ πρῶτο ἐρώτημα, πῶς μπορεῖ νὰ θεμελιώσει στὴ θεωρία τῶν τύπων τὴ διάκριση ἀνάμεσα στοὺς πεπερασμένους ἢ στοὺς ἄπειρους ἀριθμούς, ἀφοῦ ἡ ἐν λόγῳ θεωρία ἔχει νόημα μόνο ἂν ἡ διάκριση αὐτὴ ὑποτεθεῖ τετελεσμένη;

4ο) Γενικότερα, εἴτε ἀπαντήσει κανεὶς 'ναὶ' εἴτε ἀπαντήσει 'ὄχι' στὸ πρῶτο ἐρώτημα, ἡ θεωρία τῶν τύπων εἶναι ἀκατανόητη, ἂν ἡ θεωρία τῶν τακτικῶν ἀριθμῶν δὲν ὑποτεθεῖ ἤδη συγκροτημένη. Πῶς θὰ ἦταν ἑπομένως δυνατὸν νὰ θεμελιωθεῖ ἡ θεωρία τῶν τακτικῶν ἀριθμῶν στὴ θεωρία τῶν τύπων;

4. *Τὸ ἀξίωμα τῆς ἀναγωγιμότητας.*

Ὁ κ. Russell εἰσάγει ἕνα νέο ἀξίωμα καὶ τὸ ὀνομάζει *axiom of reducibility* [ἀξίωμα τῆς ἀναγωγιμότητας]. Καθὼς δὲν εἶμαι βέβαιος ὅτι ἔχω κατανοήσει πλήρως τί ἐννοεῖ, θὰ τοῦ παραχωρήσω τὸν λόγο. «We assume, that every function is equivalent, for all its values to some predicative function of the same argument». Γιὰ νὰ κατανοήσουμε ὅμως τὴν πρόταση, πρέπει νὰ ανατρέξουμε στοὺς ὁρισμοὺς ποὺ δώσαμε στὴν ἀρχὴ αὐτῆς ἐδῶ τῆς μελέτης. Τί εἶναι συνάρτηση· τί εἶναι κατηγορηματικὴ συνάρτηση; Ἂν μιὰ πρόταση βεβαιώνεται γιὰ ὁρισμένο ἀντικείμενο *α*, εἶναι πρόταση ἑνική· ἂν βεβαιώνεται γιὰ ἀπροσδιόριστο ἀντικείμενο *x*, εἶναι προτασιακὴ συνάρτηση τοῦ *x*. Μέσα στὴν ἱεραρχία τῶν τύπων, ἡ πρόταση θὰ εἶναι ὁρισμένης τάξης, καὶ ἡ τάξη της δὲν θὰ εἶναι ἡ ἴδια γιὰ οἱοδήποτε *x*, ἀφοῦ θὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τάξη τοῦ *x*. Ὡς ἐκ τούτου ἡ συνάρτηση θὰ λέγεται κατηγορηματική, ἂν εἶναι τάξης K + 1, ὅταν τὸ *x* εἶναι τάξης K.

Μετὰ τοὺς ὁρισμοὺς αὐτούς, τὸ νόημα τοῦ ἀξιώματος ἐξακολουθεῖ νὰ μὴν εἶναι πολὺ σαφές, καὶ δὲν θὰ ἦταν περιττὰ μερικὰ παραδείγματα. Ὁ κ. Russell δὲν ἔχει δώσει ὁ ἴδιος παραδείγματα, καὶ ἐγὼ διστάζω νὰ κατασκευάσω δικά μου, γιατὶ φοβᾶμαι μὴν προδώσω τὴ σκέψη του, ἀφοῦ μάλιστα δὲν εἶμαι βέβαιος ὅτι τὴν ἔχω κατανοήσει πλήρως. Ὡστόσο, παρ᾽ ὅτι δὲν ἔχω συλλάβει τί ἐννοεῖ, ὑπάρχει κάτι ποὺ γι᾽ αὐτὸ δὲν ἀμφιβάλλω: πρόκειται γιὰ νέο ἀξίωμα. Χάρη σ᾽ αὐτὸ τὸ ἀξίωμα, ὅπως ἐλπίζεται, θὰ καταστεῖ δυνατὴ ἡ ἀπόδειξη τῆς ἀρχῆς τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς· δὲν θὰ ἤθελα νὰ ἀρνηθῶ ὅτι αὐτὸ εἶναι ἐφικτό, τὴ στιγμὴ ποὺ ἔχω τὴν ὑπόνοια ὅτι τὸ ἐν λόγῳ ἀξίωμα εἶναι ἄλλη μορφὴ τῆς ἴδιας ἀρχῆς.

Ταυτόχρονα, ὁ νοῦς μου δὲν μπορεῖ νὰ μὴν πάει σὲ ὅλους ὅσοι ἰσχυρίζονται ὅτι ἀποδεικνύουν τὸ Εὐκλείδειο αἴτημα, στηριζόμενοι σὲ μία ἀπὸ τὶς συνέπειές του, καὶ θεωρώντας τὴν ἑκάστοτε συνέπεια προφανὴ ἀφ᾽ ἑαυτῆς. Τί κερδίζουν; Μήπως ὑπάρχει περίπτωση ἡ ἑκάστοτε ἀλήθεια, ὅσο κι ἂν εἶναι προφανής, νὰ εἶναι πιὸ προφανὴς ἀπὸ τὸ ἴδιο τὸ αἴτημα;

Ἄρα ὅσον ἀφορᾶ στὸν ἀριθμὸ τῶν αἰτημάτων δὲν κερδίζουμε τίποτε· μήπως τουλάχιστον κερδίζουμε σὲ ποιότητα;

Σὲ τί ὑπερέχει τὸ νέο ἀξίωμα ἔναντι τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπαγωγῆς;

1ο) Μήπως κατὰ τὴ διατύπωση εἶναι ἁπλούστερο καὶ σαφέστερο; Δὲν ἀποκλείεται, δεδομένου ὅτι ἡ διατύπωση ποὺ μᾶς δίνει ὁ κ. Russell ἀναμφίβολα ἐπιδέχεται βελτίωση· εἶναι, ὅμως, μᾶλλον ἀπίθανο.

2ο) Τὸ ἀξίωμα τῆς ἀναγωγιμότητας εἶναι ἄραγε γενικότερο ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς ἐπαγωγῆς, ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι ἀδύνατο νὰ ἀποδειχτεῖ τὸ ἀξίωμα αὐτὸ μὲ ἀφετηρία τὴν ἀρχή;

3ο) Ἢ μήπως, ἀντίθετα, τὸ ἀξίωμα εἶναι μόνο *φαινομενικὰ* λιγότερο γενικὸ ἀπὸ τὴν ἀρχή, ἔτσι ὥστε νὰ μὴν εἶναι ἀμέσως εὐδιάκριτο ὅτι ἡ ἀρχὴ περιέχεται στὸ ἀξίωμα, ἂν καὶ περιέχεται;

4ο) Ἡ χρήση τοῦ ἀξιώματος αὐτοῦ μήπως εἶναι πιὸ σύμφωνη μὲ τὶς φυσικὲς τάσεις τῆς διάνοιάς μας; Μήπως μποροῦμε νὰ τὴν δικαιολογήσουμε ψυχολογικά;

Θέτω ἁπλῶς τὰ ἐρωτήματα· δὲν διαθέτω στοιχεῖα γιὰ νὰ ἀπαντήσω, ἀφοῦ δὲν ἔχω κἂν κατορθώσει νὰ κατανοήσω πλήρως τὸ νόημα τοῦ ἐν λόγῳ ἀξιώματος.

Ὡστόσο, παρ' ὅτι δὲν μπορῶ νὰ ἐλπίζω ὅτι μὲ τὰ ὅσα πολὺ συνοπτικὰ ὑποδεικνύει ὁ κ. Russell θὰ εἰσδύσω στὸ πλῆρες νόημα τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀναγωγιμότητας, ἂς μοῦ ἐπιτραπεῖ τουλάχιστον νὰ διατυπώσω μερικὲς εἰκασίες. Ἔστω μιὰ πρόταση ὅπως, π.χ., ὁ ὁρισμὸς τῶν ἀκεραίων. Πεπερασμένος ἀκέραιος εἶναι ὁποιος ἀνήκει σὲ ὅλες τὶς ἀναδρομικὲς κλάσεις. Αὐτὴ καθ' αὐτὴ ἡ πρόταση δὲν ἔχει νόημα· δὲν πρόκειται νὰ ἔχει νόημα ἂν δὲν διευκρινιστεῖ ἡ τάξη τῶν ἑκάστοτε ἀναδρομικῶν κλάσεων. Εὐτυχῶς ὅμως συμβαίνει τὸ ἑξῆς: κάθε ἀκέραιος 2ης τάξης εἶναι *κατὰ μείζονα λόγο* ἀκέραιος 1ης τάξης, ἀφοῦ ἀνήκει σὲ ὅλες τὶς ἀναδρομικὲς κλάσεις τῶν δύο πρώτων τάξεων, καὶ ἑπομένως σὲ ὅλες τὶς κλάσεις 1ης τάξης· τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ κάθε ἀκέραιο τάξης K: ἕνας τέτοιος ἀκέραιος θὰ εἶναι *κατὰ μείζονα λόγο* ἀκέραιος τάξης K − 1. Ὁδηγούμαστε ἔτσι νὰ ὁρίσουμε μιὰ σειρὰ κλάσεων ὅλο καὶ πιὸ περιορισμένων, ἀκεραίους 1ης, 2ης, ..., *n*-ιοστῆς τάξης, ποὺ καθεμιά τους θὰ περιέχεται στὴν προηγούμενη. Θὰ ὀνομάζω ἀκέραιο τάξης ω κάθε ἀριθμὸ ποὺ θὰ ἀνήκει ταυτόχρονα σὲ ὅλες αὐτὲς τὶς κλάσεις. Κι αὐτὸς ὁ ὁρισμὸς τοῦ ἀκεραίου τάξης ω θὰ ἔχει νόημα καὶ θὰ μπορεῖ νὰ θεωρεῖται ἰσοδύναμος μὲ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ἀκεραίου, ποὺ εἶχε ἀρχικὰ προταθεῖ καὶ δὲν εἶχε νόημα. Νὰ πρόκειται ἄραγε ἐδῶ γιὰ ὀρθὴ ἐφαρμογὴ τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀναγωγιμότητας, ὅπως τὸ ἐννοεῖ ὁ κ. Russell; Προτείνω τὸ παράδειγμα μὲ πολλὴ μετριοπάθεια.

Ἂς τὸ δεχτοῦμε ὅμως, κι ἂς ἐπανεξετάσουμε τὸ πρὸς ἀπόδειξη θεώρημα σχετικὰ μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἀκεραίων. Ἀποδείξαμε ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀκεραίων τάξης K εἶναι ἀκέραιος τάξης K − 1, καὶ θέλουμε νὰ συναγάγουμε ἐξ αὐτοῦ τὸ συμπέρασμα ὅτι, ἂν x καὶ n εἶναι ἀκέραιοι τάξης ω, τὸ ἄθροισμα $n + x$ εἶναι καὶ αὐτὸ ἀκέραιος τάξης ω. Πράγματι, ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι ἀκέραιος τάξης K, ὅσο μεγάλο κι ἂν εἶναι τὸ K. Ἂν n καὶ x εἶναι ἀκέραιοι τάξης ω, θὰ εἶναι *κατὰ μείζονα λόγο* ἀκέραιοι τάξης K + 1· ἑπομένως, δυνάμει τοῦ θεωρήματος ποὺ ἔχει ἤδη ἀποδειχτεῖ, ὁ $n + x$ εἶναι ἀκέραιος τάξης K..., *ὅ.ἔ.δ.*

Νὰ εἶναι ἄραγε αὐτὴ ἡ ὀρθὴ χρήση τοῦ ἀξιώματος τοῦ κ. Russell; Ἔχω τὸ σαφὲς αἴσθημα ὅτι δὲν εἶναι ἔτσι ἀκριβῶς καὶ ὅτι ὁ κ. Russell θὰ ἔδινε στὸν συλλογισμὸ πολὺ διαφορετικὴ μορφή, τὸ βάθος ὅμως θὰ ἔμενε τὸ ἴδιο.

Δὲν θέλω νὰ συζητήσω ἐδῶ τὸ κατὰ πόσο αὐτὸς ὁ ἀποδεικτικὸς τρόπος εἶναι ὀρθός. Θὰ περιοριστῶ πρὸς στιγμὴν στὶς ἀκόλουθες ἐπισημάνσεις. Καταλήξαμε νὰ εἰσαγάγουμε παράλληλα μὲ τὴν ἰδέα ἀντικειμένων τάξης n τὴν ἰδέα ἀντικειμένων τάξης ω, καὶ πιστεύουμε ὅτι κατορθώσαμε νὰ ὁρίσουμε αὐτὴ τὴ νέα ἰδέα ὅσον ἀφορᾶ στοὺς ἀκεραίους. Ἡ μέθοδός μας ὅμως δὲν τελεσφορεῖ πάντοτε: στὴν περίπτωση τοῦ παραδόξου τοῦ Ἐπιμενίδη, γιὰ παράδειγμα, θὰ ἀστοχοῦσε τελείως. Ἡ ἐπιτυχία ὀφείλεται στὸ ἑξῆς: Ἡ ταξινομία ποὺ ἐξετάσαμε δὲν ἦταν κατηγορηματική, καὶ ἡ προσθήκη νέων στοιχείων τροποποιοῦσε ἀναγκαστικὰ τὴν ταξινομία ἀντικειμένων ποὺ εἶχαν εἰσαχθεῖ καὶ ταξινομηθεῖ πρωτύτερα. Ὡστόσο αὐτὴ ἡ τροποποίηση γινόταν μόνο πρὸς μία κατεύθυνση· θὰ χρειαζόταν ἐνδεχομένως νὰ μεταφέρουμε ἀντικείμενα ἀπὸ τὴν κλάση Α στὴν κλάση Β (ἐν προκειμένῳ, ἀπὸ τὴν κλάση τῶν ἀκεραίων στὴν κλάση τῶν μὴ ἀκεραίων), ποτὲ ὅμως δὲν θὰ εἴμαστε ἀναγκασμένοι νὰ τὰ μεταφέρουμε ἀπὸ τὴν κλάση Β στὴν κλάση Α. Θὰ χρειαζόταν μιὰ νέα σύμβαση γιὰ νὰ ὁριστοῦν τὰ ἀντικείμενα τάξης ω στὴν περίπτωση ποὺ ἡ τροποποίηση ἔπρεπε νὰ γίνει ἄλλοτε πρὸς τὴ μία καὶ ἄλλοτε πρὸς τὴν ἄλλη κατεύθυνση.

Ἀπὸ τὴν ἄλλη, ὁ ὁρισμὸς τῶν ἀκεραίων τάξης ω *δὲν εἶναι ὁ ἴδιος* μὲ τὸν ὁρισμὸ τῶν ἀκεραίων τάξης K, ὅταν τὸ K εἶναι πεπερασμένο. Τοὺς ἀκεραίους τάξης K τοὺς ὁρίζουμε *ἐπαναληπτικὰ* συνάγοντας λογικὰ τὴν ἰδέα ἀκεραίου τάξης K ἀπὸ τὴν ἰδέα ἀκεραίου τάξης K − 1. Τοὺς ἀκεραίους τάξης ω τοὺς ὁρίζουμε μὲ *μετάβαση στὸ ὅριο*, ἐξαρτώντας αὐτὴ τὴ νέα ἰδέα ἀπὸ ἀπειροπληθεῖς πρότερες ἰδέες: τὶς ἰδέες τῶν ἀκεραίων *ὅλων* τῶν πεπερασμένων τάξεων. Θὰ ἦταν ἑπομένως ἀδύνατο νὰ κατανοήσει τοὺς ὁρισμοὺς αὐτοὺς ὁποιος δὲν θὰ γνώριζε ἤδη τί εἶναι πεπερασμένος ἀριθμός· οἱ ὁρισμοὶ *προϋποθέτουν* τὴ διάκριση ἀνάμεσα σὲ πεπερασμένους καὶ ἄπειρους ἀριθμούς. Ἑπομένως, εἶναι μάταιη ἡ ἐλπίδα ὅτι θὰ θεμελιώσουμε τὴ διάκριση στοὺς ὁρισμοὺς αὐτούς.

5. *Τὸ ὑπόμνημα τοῦ κ. Zermelo.*

Ὁ κ. Zermelo ἀναζητεῖ τὴ λύση στὶς δυσκολίες ποὺ ἐπισήμανα πρωτύτερα σὲ τελείως διαφορετικὴ κατεύθυνση. Προσπαθεῖ νὰ θέσει ἕνα σύστημα ἀξιωμάτων a priori, ποὺ θὰ τοῦ ἐπέτρεπαν νὰ ἐμπεδώσει ὅλες τὶς μαθηματικὲς ἀλήθειες χωρὶς νὰ ἐκτίθεται στὸν κίνδυνο ἀντίφασης. Ὁ ρόλος τῶν ἀξιωμάτων μπορεῖ νὰ νοηθεῖ ποικιλοτρόπως. Μποροῦμε νὰ τὰ θεωρήσουμε ὡς αὐθαίρετα θεσπίσματα, ποὺ δὲν θὰ ἦταν τίποτε ἄλλο παρὰ συγκαλυμμένοι ὁρισμοὶ τῶν θεμελιωδῶν ἐννοιῶν. Ἔτσι, στὴν ἀρχὴ τῆς γεωμετρίας, ὁ κ. Hilbert εἰσάγει *«πράγματα»* καὶ τὰ ὀνομάζει σημεῖα, εὐθεῖες, ἐπίπεδα, καὶ γιὰ μιὰ στιγμὴ λησμονώντας, ἔστω φαινομενικά, τὸ σύνηθες νόημα τῶν λέξεων αὐτῶν, θέτει διάφορες σχέσεις ἀνάμεσα στὰ ἐν λόγῳ *πράγματα*, σχέσεις ποὺ τὰ ὁρίζουν.

Προκειμένου νὰ εἶναι νόμιμο κάτι τέτοιο, πρέπει νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι ὅσα ἀξιώματα εἰσάγονται κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπο δὲν εἶναι ἀντιφατικά, καὶ ὁ κ. Hilbert τὸ ἐπέτυχε ὄντως αὐτὸ ὅσον ἀφορᾶ στὴ γεωμετρία, ὑποθέτοντας τὴν ἀνάλυση ἤδη συγκροτημένη καὶ χρησιμοποιώντας την στὴ σχετικὴ ἀπόδειξη. Ὁ κ. Zermelo δὲν ἀπέδειξε ὅτι τὰ ἀξιώματά του ἦταν ἀπαλλαγμένα ἀντιφάσεων, καὶ δὲν μποροῦσε νὰ τὸ ἀποδείξει, γιατὶ πρὸς τοῦτο θὰ ἔπρεπε νὰ στηριχτεῖ σὲ ἄλλες ἤδη ἐμπεδωμένες ἀλήθειες· ὅμως ὁ κ. Zermelo ὑποθέτει ὅτι δὲν ὑπάρχουν ἀκόμη τέτοιου εἴδους ἐμπεδωμένες ἀλήθειες, ὅτι δὲν ὑπάρχει μιὰ ἤδη συγκροτημένη ἐπιστήμη — ἐκκινεῖ ἐκ τοῦ μηδενὸς καὶ θέλει τὰ ἀξιώματά του νὰ εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου αὐτάρκη.

Ἡ ἀξία ἑπομένως τῶν αἰτημάτων δὲν μπορεῖ νὰ ἀπορρέει ἀπὸ ἕνα εἶδος αὐθαίρετου θεσπίσματος· τὰ αἰτήματα πρέπει νὰ εἶναι ἀφ᾽ ἑαυτῶν προφανῆ. Δὲν θὰ πρέπει ἄρα νὰ ἀποδείξουμε τὴν ἐνάργεια αὐτή, ἀφοῦ ἡ ἐνάργεια δὲν ἀποδεικνύεται, ἀλλὰ νὰ ἐπιδιώξουμε νὰ εἰσδύσουμε στὸν ψυχολογικὸ μηχανισμὸ ποὺ τὴν δημιουργεῖ. Ἰδοὺ ἡ πηγὴ τῆς δυσκολίας: ὁ κ. Zermelo δέχεται ὁρισμένα ἀξιώματα, καὶ ἀπορρίπτει ἄλλα, ποὺ ἐκ πρώτης ὄψεως θὰ φαίνονταν ἐξ ἴσου προφανῆ μὲ ὅσα δέχεται. Ἂν τὰ δεχόταν ὅλα, θὰ περιέπιπτε σὲ ἀντίφαση, καὶ ὡς ἐκ τούτου θὰ ἔπρεπε νὰ ἐπιλέξει· ἀνακύπτει ὅμως τὸ ἐρώτημα ποιοί λόγοι ὑπαγορεύουν τὴν ἐπιλογή του, καὶ ἐδῶ χρειάζεται προσοχή.

Ὁ κ. Zermelo ἀρχίζει ἀπορρίπτοντας τὸν ὁρισμὸ τοῦ Cantor: σύνολο εἶναι ἡ συλλογὴ οἱωνδήποτε διακριτῶν ἀντικειμένων ποὺ νοοῦνται ὡς ὁλότητα. Δὲν δικαιοῦμαι λοιπὸν νὰ κάνω λόγο γιὰ ὅλα τὰ ἀντικείμενα ὅσα ἱκανοποιοῦν τὸν α ἢ τὸν β ὅρο. Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ δὲν ἀποτελοῦν σύνολο, *Menge*, ὁ ὁρισμὸς ὅμως ποὺ ἀπορρίπτεται πρέπει νὰ ἀντικατασταθεῖ μὲ κάτι ἄλλο. Ὁ κ. Zermelo περιορίζεται ἁπλῶς νὰ πεῖ: ἂς θεωρήσουμε ἕνα πεδίο (*Bereich*) οἱωνδήποτε ἀντικειμένων· δύο ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα αὐτά, ἔστω x καὶ y, ἐνδεχομένως συνδέονται μὲ μιὰ σχέση τῆς μορφῆς $x \in y$· θὰ λέγεται τότε ὅτι τὸ x εἶναι στοιχεῖο τοῦ y, καὶ ὅτι τὸ y εἶναι σύνολο, *Menge*.

Προφανῶς δὲν πρόκειται γιὰ ὁρισμό: ὅποιος ἀγνοεῖ τί εἶναι *Menge* δὲν μαθαίνει κάτι περισσότερο μαθαίνοντας ὅτι συμβολίζεται μὲ $\in$, ἀφοῦ ἀγνοεῖ τί εἶναι τὸ $\in$. Ἡ κίνηση τοῦ κ. Zermelo θὰ ἦταν ἀποδεκτή, ἂν τὸ σύμβολο $\in$ ὁριζόταν στὴ συνέχεια μέσω τῶν ἀξιωμάτων καθαυτῶν, θεωρουμένων ὡς αὐθαιρέτων θεσπισμάτων. Εἴδαμε ὅμως μόλις ὅτι ἡ ἄποψη αὐτὴ δὲν εὐσταθεῖ. Πρέπει ἄρα νὰ γνωρίζουμε ἐκ τῶν προτέρων τί εἶναι *Menge*, νὰ ἔχουμε τὴ σχετικὴ ἐποπτεία, κι αὐτὴ ἡ ἐποπτεία θὰ μᾶς ἐπιτρέψει νὰ κατανοήσουμε τί εἶναι τὸ $\in$ — χωρὶς τὴν ἐποπτεία αὐτὴ τὸ $\in$ θὰ ἦταν σύμβολο στερημένο νοήματος, καὶ δὲν θὰ μπορούσαμε νὰ τοῦ ἀποδώσουμε καμμία ἰδιότητα ἀφ᾽ ἑαυτῆς προφανή. Ποιά ὅμως θὰ μποροῦσε νὰ εἶναι ἡ οἰκεία ἐδῶ ἐποπτεία, ἂν ὄχι αὐτὴ ποὺ παρέχει ὁ ὁρισμὸς τοῦ Cantor, ποὺ μὲ τόση ἀκαταδεξία ἀπορρίψαμε;

Ἂς παρακάμψουμε πρὸς στιγμὴν τὴ δυσκολία αὐτὴ —ἀργότερα θὰ ἐπιδιώξουμε νὰ τὴν διευκρινίσουμε— καὶ ἂς ἀπαριθμήσουμε ὅσα ἀξιώματα δέχεται ὁ κ. Zermelo· εἶναι τὰ ἑξῆς ἑπτά:

1ο) Δύο *Mengen* ταυτίζονται ὅταν ἔχουν τὰ ἴδια στοιχεῖα.

2ο) Ὑπάρχει *Menge* ποὺ δὲν περιέχει κανένα στοιχεῖο: τὸ κενὸ σύνολο – *Nullmenge*· ἂν ὑπάρχει ἕνα ἀντικείμενο a, ὑπάρχει *Menge* $\{a\}$ μὲ μοναδικὸ στοιχεῖο τὸ ἀντικείμενο αὐτό· ἂν ὑπάρχουν δύο ἀντικείμενα a καὶ b, ὑπάρχει *Menge* $\{a, b\}$ μὲ μόνα στοιχεῖα αὐτὰ τὰ δύο ἀντικείμενα.

3ο) Τὸ σύνολο ὅλων τῶν στοιχείων μιᾶς *Menge* M ποὺ ἱκανοποιοῦν μιὰ συνθήκη x συνιστᾶ ὑποσύνολο —*Untermenge*— τῆς M.

4ο) Σὲ κάθε *Menge* T ἀντιστοιχεῖ μία ἄλλη *Menge* UT ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ σύνολο ὅλων τῶν *Untermengen* τῆς T.

5ο) Ἂς πάρουμε μία *Menge* T ποὺ τὰ ἴδια τὰ στοιχεῖα της εἶναι *Mengen*· ὑπάρχει *Menge* ST μὲ στοιχεῖα τὰ στοιχεῖα τῆς T. Ἂν, γιὰ παράδειγμα, ἡ T ἔχει τρία στοιχεῖα A, B, C, ποὺ εἶναι *Mengen*· ἂν ἡ A ἔχει δύο στοιχεῖα a καὶ a, ἡ B δύο στοιχεῖα b καὶ b, ἡ C δύο στοιχεῖα c καὶ c, ἡ ST θὰ ἔχει τρία στοιχεῖα a, b, c, a, b, c.

6ο) Ὅταν ἔχουμε μία *Menge* T μὲ στοιχεῖα ποὺ τὰ ἴδια εἶναι *Mengen*, μποροῦμε νὰ ἐπιλέξουμε σὲ κάθε μία ἀπὸ αὐτὲς τὶς στοιχειώδεις *Mengen* ἕνα στοιχεῖο, καὶ τὸ σύνολο τῶν στοιχείων ὅσων ἔχουν ἐπιλεγεῖ κατ᾽ αὐτὸ τὸν τρόπο συνιστᾶ μία *Untermenge* τῆς ST.

7ο) Ὑπάρχει τουλάχιστον μία ἀπειροπληθὴς *Menge*.

Πρὶν συζητήσω τὰ ἀξιώματα αὐτά, ὀφείλω νὰ ἀπαντήσω σὲ ἕνα ἐρώτημα: γιατί στὴ διατύπωσή τους διατήρησα τὸ γερμανικὸ ὄνομα *Menge* ἀντὶ νὰ τὸ μεταφράσω μὲ τὴ λέξη *σύνολο*; Ἐπειδὴ δὲν εἶμαι βέβαιος ὅτι ἡ λέξη *Menge* διατηρεῖ στὰ ἀξιώματα τὸ διαισθητικὸ νόημά της, ἀφοῦ διαφορετικὰ θὰ ἦταν δύσκολο νὰ ἀπορριφθεῖ ὁ ὁρισμὸς τοῦ Cantor. Ἡ λέξη *σύνολο* ὑποβάλλει καὶ ἐπιβάλλει μάλιστα αὐτὸ τὸ διαισθητικὸ νόημα, ἔτσι ὥστε ἡ λέξη νὰ μὴν μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ χωρὶς πρόβλημα ὅταν τὸ νόημά της ἔχει ἀλλάξει.

Δὲν θὰ ἐμμείνω στὸ 7ο ἀξίωμα· πρέπει ὅμως νὰ πῶ δυὸ λόγια καὶ νὰ ἐπισημάνω πόσο πρωτότυπα τὸ διατυπώνει ὁ κ. Zermelo. Πράγματι δὲν ἀρκεῖται στὴ δική μου διατύπωση· λέει: ὑπάρχει *Menge* M ποὺ δὲν μπορεῖ νὰ περιέχει τὸ στοιχεῖο a, χωρὶς νὰ περιέχει ὡς στοιχεῖο καὶ τὴ *Menge* $\{a\}$, ποὺ περιέχει ὡς μοναδικὸ στοιχεῖο της τὸ a. Καὶ ἄρα ἂν ἡ M περιέχει τὸ στοιχεῖο a, θὰ ἔχει καὶ μιὰ σειρὰ ἀπὸ ἄλλα, καὶ συγκεκριμένα τὴ *Menge* μὲ μοναδικὸ στοιχεῖο τὸ a, τὴ *Menge* μὲ μοναδικὸ στοιχεῖο τὴ *Menge* ποὺ ἔχει μοναδικὸ στοιχεῖο τὸ a, κ.ο.κ. Εἶναι εὐδιάκριτο ὅτι τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων αὐτῶν πρέπει νὰ εἶναι ἄπειρο. Ἐκ πρώτης ὄψεως, ἡ κίνηση αὐτὴ φαίνεται πολὺ παράδοξη καὶ τεχνητή — καὶ ὄντως εἶναι. Ὅμως ὁ κ. Zermelo ἤθελε νὰ ἀποφύγει νὰ ἐκστομήσει τὴ λέξη ἄπειρο, γιατὶ θεωρεῖ τὰ ἀξιώματα αὐτὰ πρότερα ὡς πρὸς τὴ διάκριση πεπερασμένο/ἄπειρο.

Ἂς δοῦμε τὰ πρῶτα ἔξι ἀξιώματα. Εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθοῦν προφανῆ, ἀρκεῖ νὰ ἀποδίδεται στὴ λέξη *Menge* τὸ διαισθητικὸ νόημά της, καὶ *νὰ γίνεται λόγος μόνο γιὰ ἀντικείμενα πεπερασμένα τὸ πλῆθος*. Ὡστόσο δὲν εἶναι πιὸ προφανῆ ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο ἀξίωμα ποὺ ὁ συγγραφέας μας ρητὰ ἀπορρίπτει:

8ο) *Οἱαδήποτε ἀντικείμενα σχηματίζουν Menge.*

Πρέπει ὅμως ἐδῶ νὰ θέσουμε τὸ ἐρώτημα: γιατὶ τὸ ἀξίωμα 8 παύει νὰ εἶναι προφανές, ὅταν πρόκειται γιὰ ἀπειροπληθεῖς συλλογὲς ἀντικειμένων, ἐνῶ τὰ ἔξι πρῶτα ἀξιώματα ἐξακολουθοῦν ἀκόμη καὶ τότε νὰ εἶναι προφανῆ;

Ἂν, γιὰ νὰ λύσουμε τὸν γρίφο, ξαναδοῦμε τὴ διατύπωση τῶν ἐν λόγῳ ἀξιωμάτων, θὰ δοκιμάσουμε μιὰ πρώτη ἔκπληξη· θὰ διαπιστώσουμε ὅτι ὅλα ἀνεξαιρέτως μᾶς μαθαίνουν ἕνα καὶ μόνο πράγμα: ὅτι ὁρισμένες συλλογές, σχηματισμένες σύμφωνα μὲ ὁρισμένους νόμους, συνιστοῦν *Mengen*. Ἔτσι ὅμως τὰ ἀξιώματα αὐτὰ παύουν νὰ μᾶς ἐμφανίζονται ὡς κανόνες προορισμένοι νὰ ἐπεκτείνουν τὸ νόημα τῆς λέξης *Menge*, ὡς ἀμιγεῖς ὁρισμοὶ λέξεων. Κι αὐτὸ ἰσχύει τόσο γιὰ τὸ ἀξίωμα 8 ποὺ ἀπορρίπτουμε ὅσο καὶ γιὰ τὰ ἑπτὰ πρῶτα ποὺ δεχόμαστε.

Γρήγορα ὅμως διακρίνουμε ὅτι αὐτὴ ἡ πρώτη ἐντύπωση εἶναι ἀπατηλή· παρόμοιοι ὁρισμοὶ λέξεων δὲν θὰ μᾶς ἐξέθεταν σὲ ἀντιφάσεις. Ὁ ἐνδοιασμὸς θὰ ἦταν δικαιολογημένος, ἂν εἴχαμε καὶ ἄλλα ἀξιώματα ποὺ νὰ βεβαιώνουν ὅτι ὁρισμένες συλλογὲς *δὲν εἶναι Mengen*. Ὅμως δὲν ἔχουμε. Ὡστόσο τὸ ἀξίωμα 8 τὸ ἀπορρίπτουμε γιὰ νὰ ἀποφύγουμε τὴν ἀντίφαση — ὁ κ. Zermelo τὸ λέει αὐτὸ ρητά.

Ἄρα στὴν πραγματικότητα πρέπει νὰ μὴ θεωροῦσε τὰ ἀξιώματά του ὡς ἁπλοὺς ὁρισμοὺς λέξεων, καὶ νὰ ἀπέδιδε στὴ λέξη *Menge* ἕνα διαισθητικὸ νόημα ποὺ προϋπῆρχε ὅλων τῶν ἀξιωμάτων, ἔστω καὶ ἂν τὸ νόημα αὐτὸ διέφερε κατά τι ἀπὸ τὸ σύνηθες. Μποροῦμε νὰ τὸ ἀντιληφθοῦμε αὐτὸ ἐρευνώντας πῶς χρησιμοποιεῖ ὁ συγγραφέας μας τὴ λέξη *Menge* στοὺς συλλογισμούς του. Μία *Menge* εἶναι κάτι ποὺ μπορεῖ νὰ γίνει ἀντικείμενο συλλογισμοῦ, κάτι ὡς ἕνα βαθμὸ καθορισμένο καὶ ἀμετάβλητο. Ὁ ὁρισμὸς ἑνὸς συνόλου, μιᾶς *Menge*, οἱασδήποτε συλλογῆς, εἶναι πάντοτε συγκρότηση μιᾶς ταξινομίας: χωρισμὸς ὅσων ἀντικειμένων ἀνήκουν στὸ ἑκάστοτε σύνολο ἀπὸ ὅσα δὲν ἀνήκουν σ' αὐτό. Θὰ λέμε λοιπὸν ὅτι ἕνα σύνολο δὲν εἶναι *Menge* ἂν ἡ ἀντίστοιχη ταξινομία δὲν εἶναι κατηγορηματική, καὶ ὅτι εἶναι *Menge* ἂν ἡ ταξινομία εἶναι κατηγορηματικὴ ἢ ἂν μποροῦμε νὰ συλλογιστοῦμε σὰν νὰ ἦταν κατηγορηματική.

Τὸ ἀξίωμα 8 τὸ ἀπορρίπτουμε ἐπειδὴ οἱαδήποτε ἀντικείμενα ἀναμφίβολα

σχηματίζουν συλλογή, ποὺ ὅμως δὲν θὰ εἶναι ποτὲ κλειστή, καὶ ποὺ ἡ τάξη της μπορεῖ ἀνὰ πάσα στιγμὴ νὰ διαταραχτεῖ μὲ τὴν προσθήκη νέων ἀπροσδόκητων στοιχείων. Πρόκειται γιὰ μὴ κατηγορηματικὴ συλλογή, ἐνῶ ἀντίθετα, ὅταν λέμε ὅτι σὲ κάθε *Menge* T ἀντιστοιχεῖ μιὰ ἄλλη *Menge* UT ἢ ST ὁριζόμενη κατὰ τὸν α ἢ β τρόπο, βεβαιώνουμε ὅτι ὁ οἰκεῖος ὁρισμὸς εἶναι κατηγορηματικὸς ἢ ὅτι ἔχουμε τὸ δικαίωμα στὴν πράξη νὰ τὸν ἐκλαμβάνουμε ὡς τέτοιον.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ πρέπει νὰ ἀναφερθεῖ μιὰ διάκριση ποὺ διαδραματίζει οὐσιῶδες μέρος στὴ θεωρία τοῦ κ. Zermelo: «Eine Frage oder Aussage E, über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür unterscheiden, heißt *definit*».[1] Ἡ λέξη *definit* ἐδῶ μοιάζει νὰ εἶναι κατ' οὐσίαν συνώνυμη μὲ τὴ λέξη *κατηγορηματική*. Ἡ χρήση της ὅμως ἀπὸ τὸν κ. Zermelo δείχνει ὅτι ἡ συνωνυμία δὲν εἶναι ἀπόλυτη.

Ἂς ὑποθέσουμε, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι τίθεται τὸ ἀκόλουθο ἐρώτημα E: τὸ τάδε στοιχεῖο τῆς *Menge* M ἔχει ἄραγε τὴ δεῖνα σχέση πρὸς *ὅλα τὰ ἄλλα* στοιχεῖα τῆς ἴδιας *Menge*, καὶ συμφωνοῦμε ὅτι ὅλα τὰ στοιχεῖα ποὺ γι' αὐτὰ πρέπει νὰ ἀπαντήσουμε *ναὶ* συνιστοῦν μία κλάση K; Κατ' ἐμέ, καὶ πιστεύω καὶ κατὰ τὸν κ. Russell, ἕνα τέτοιο ἐρώτημα δὲν εἶναι κατηγορηματικό, γιατὶ *τὰ ἄλλα* στοιχεῖα τῆς M εἶναι ἄπειρα τὸ πλῆθος, καὶ εἶναι πάντα δυνατὸν νὰ εἰσαχθοῦν σ' αὐτὴν νέα, καὶ ἀνάμεσα στὰ νεοεισαγόμενα στοιχεῖα ἐνδέχεται νὰ ὑπάρχουν τέτοια ὥστε στὸν ὁρισμό τους νὰ περιλαμβάνεται ἡ ἰδέα τῆς κλάσης K, δηλαδὴ ἡ ἰδέα τοῦ συνόλου τῶν στοιχείων μὲ τὴν ἰδιότητα E. Κατὰ τὸν κ. Zermelo, τὸ ἐρώτημα αὐτὸ θὰ ἦταν *definit*, ἀγνοῶ ὅμως ποῦ ἀκριβῶς ἔγκειται ἡ διάκριση ἀνάμεσα σὲ ὅσα ἐρωτήματα εἶναι *definit* καὶ σὲ ὅσα δὲν εἶναι. Κατὰ τὴ γνώμη του, γιὰ νὰ γνωρίσουμε ἂν ἕνα στοιχεῖο ἔχει τὴν ἰδιότητα E σὲ σχέση μὲ ὅλα τὰ ἄλλα στοιχεῖα τῆς M, ἀρκεῖ νὰ ἐπαληθεύσουμε ἂν ἔχει τὴν ἰδιότητα σὲ σχέση μὲ καθένα ἀπὸ αὐτά. Ἂν τὸ ἐρώτημα εἶναι *definit* σὲ σχέση μὲ καθένα ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῆς M, ipso facto θὰ εἶναι *definit* σὲ σχέση μὲ *ὅλα* τὰ στοιχεῖα της.

Ἀκριβῶς ἐδῶ ἀποκλίνουν οἱ ἀπόψεις μας. Ὁ κ. Zermelo ἀρνεῖται νὰ περιλάβει στὶς θεωρήσεις του τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἀντικειμένων ποὺ ἱκανοποιοῦν ὁρισμένη συνθήκη, γιατὶ κατὰ τὴ γνώμη του ἕνα τέτοιο σύνολο δὲν εἶναι ποτὲ κλειστό, μὲ τὴν ἔννοια ὅτι εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ εἰσαχθοῦν σ' αὐτὸ νέα στοιχεῖα. Ἀπὸ τὴν ἄλλη ὅμως, δὲν ἔχει κανέναν ἐνδοιασμὸ νὰ κάνει λόγο γιὰ τὸ σύνολο τῶν ἀντικειμένων ποὺ ἀνήκουν σὲ μία *Menge* M, καὶ ποὺ ἐπὶ

1. «Ἕνα ἐρώτημα ἢ μιὰ πρόταση E ὀνομάζεται *καθορισμένη*, ὅταν οἱ θεμελιώδεις σχέσεις τοῦ πεδίου ἐπιτρέπουν νὰ κριθεῖ χωρὶς αὐθαιρεσία τὸ ἂν ἰσχύει ἢ ὄχι, δυνάμει τῶν ἀξιωμάτων καὶ τῶν λογικῶν νόμων καθολικῆς ἰσχύος».

πλέον ἱκανοποιοῦν ὁρισμένη συνθήκη. Κατὰ τὴ γνώμη του, δὲν ἔχει σύνολο, ἂν δὲν ἔχει ταυτόχρονα ὅλα τὰ στοιχεῖα του. Ἀνάμεσα στὰ στοιχεῖα αὐτὰ θὰ ἐπιλέξει ὅσα ἱκανοποιοῦν ὁρισμένη συνθήκη, καὶ θὰ μπορεῖ νὰ προβεῖ στὴν ἐπιλογὴ αὐτὴ ἀπόλυτα ἥσυχος, χωρὶς νὰ φοβᾶται τὴν εἰσαγωγὴ νέων καὶ ἀπροσδόκητων στοιχείων, γιατὶ τὰ στοιχεῖα αὐτὰ τὰ ἔχει *ἤδη* ὅλα στὰ χέρια του. Θέτοντας προκαταβολικὰ τὴ *Menge* M, ἔχει ὑψώσει προστατευτικὸ περιτείχισμα ὅπου ἀναχαιτίζονται ἐνοχλητικοὶ παρείσακτοι. Δὲν διερωτᾶται ὅμως μήπως ὑπάρχουν ὀχληροὶ ἐντὸς τῶν τειχῶν ὅπου ἔχει ἐγκλείσει ἑαυτὸν καὶ ἐκείνους. Τί σημαίνει ὅτι ἡ *Menge* M ἔχει ἀπειροπληθῆ στοιχεῖα; Ὄχι ὅτι τὰ στοιχεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθοῦν ὅλα ὑπαρκτὰ ἐκ τῶν προτέρων, ἀλλὰ ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ δημιουργοῦνται διαρκῶς νέα. Ὅταν μιλῶ γιὰ ὅλους τοὺς ἀκεραίους, ἐννοῶ ὅλους ὅσοι ἔχουν ἐπινοηθεῖ καὶ θὰ ἐπινοηθοῦν κάποτε· ὅταν μιλῶ γιὰ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ χώρου, ἐννοῶ ὅλα ὅσα ἔχουν συντεταγμένες ἐκφράσιμες μὲ ρητοὺς ἢ μὲ ἀλγεβρικοὺς ἢ μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς, ἢ μὲ οἱονδήποτε ἄλλο τρόπο θὰ ἦταν δυνατὸν νὰ ἐπινοηθεῖ. Καὶ αὐτὸ τὸ *«θὰ ἦταν δυνατὸν νά»* εἶναι τὸ ἄπειρο. Θὰ ἦταν ὅμως δυνατὸν νὰ ἐπινοηθοῦν τρόποι ποὺ νὰ ἐπιδέχονται ποικίλους ὁρισμούς. Ἂς πάρουμε πάλι τὸ παράδειγμα μὲ τὸ ἐρώτημα E καὶ τὴν κλάση K: τὸ ἐρώτημα E θὰ τίθεται ἐκ νέου ὅποτε θὰ ὁρίζεται νέο στοιχεῖο τῆς M· στὰ πρὸς ὁρισμὸ στοιχεῖα θὰ συγκαταλέγονται καὶ κάποια ποὺ ὁ ὁρισμός τους θὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν κλάση K. Τελικὰ δηλαδὴ δὲν θὰ ἔχουμε ἀποφύγει ἔτσι τὸν φαῦλο κύκλο.

Ἰδοὺ λοιπὸν ὁ λόγος ποὺ δὲν μὲ ἱκανοποιοῦν τὰ ἀξιώματα τοῦ κ. Zermelo. Ὄχι μόνο δὲν μοῦ φαίνονται προφανῆ, ἀλλὰ καὶ ὅταν μὲ ρωτοῦν ἂν εἶναι ἀπαλλαγμένα ἀντιφάσεων, δὲν γνωρίζω τί νὰ ἀπαντήσω. Ὁ κ. Zermelo πίστεψε ὅτι ἀποφεύγει τὸ παράδοξο τοῦ μεγαλύτερου πληθάριθμου, ἀπαγορεύοντας κάθε ὑπόθεση ποὺ θὰ ὑπερέβαινε τὰ ὅρια μιᾶς κλειστῆς *Menge*· πίστεψε ὅτι ἀποφεύγει τὸ παράδοξο τοῦ Richard, διατυπώνοντας μόνο *definit* ἐρωτήματα, ἐρωτήματα δηλαδὴ πού, ὅπως νοηματοδοτεῖ τὸν ὅρο, ἀποκλείουν κάθε σκέψη σχετικὴ μὲ ἀντικείμενα ὁριζόμενα μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων. Μπορεῖ νὰ ἔκλεισε καλὰ τὸ μαντρί του, δὲν εἶμαι ὅμως βέβαιος ὅτι δὲν ἔκλεισε καὶ τὸν λύκο μέσα. Θὰ ἤμουν ἥσυχος μόνο ἂν ἀποδείκνυε ὅτι εἶναι προφυλαγμένος ἀπὸ ἀντιφάσεις· γνωρίζω ὅτι δὲν μποροῦσε νὰ τὸ πράξει, γιατὶ θὰ χρειαζόταν, ἐπὶ παραδείγματι, νὰ στηριχτεῖ στὴν ἀρχὴ τῆς ἐπαγωγῆς, ποὺ δὲν τὴν ἔθετε ὑπὸ ἀμφισβήτηση, ἀλλὰ εἶχε τὴν πρόθεση νὰ τὴν ἀποδείξει ἀργότερα. Ὄφειλε νὰ κάνει τὸ βῆμα· τὸ τίμημα θὰ ἦταν ἕνα λογικὸ σφάλμα, θὰ εἴμαστε ὅμως τότε βέβαιοι.

6. *Ἡ χρήση τοῦ ἀπείρου.*

Εἶναι ἄραγε δυνατὸν νὰ συλλογιστοῦμε πάνω σὲ ἀντικείμενα ποὺ δὲν ὁρίζονται μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων; Εἶναι ἄραγε δυνατὸν νὰ μιλήσουμε γι᾽ αὐτά, γνωρίζοντας γιὰ τί πράγμα μιλᾶμε, μὲ λέξεις ποὺ δὲν θὰ ἦταν κενές; Ἤ, ἀντίθετα, πρέπει νὰ θεωροῦμε ἀδιανόητα τέτοιου εἴδους ἀντικείμενα; Σὲ ὅ,τι μὲ ἀφορᾶ, δὲν διστάζω ἀπὸ τὴν πλευρά μου νὰ ἀπαντήσω ὅτι πρόκειται γιὰ καθαρὲς κενολογίες.

Πάντοτε ὅλα τὰ ἀντικείμενα ὅσα θὰ ἀφοροῦν οἱ σκέψεις μας ἢ θὰ ὁρίζονται μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων, ἢ θὰ εἶναι ἀτελῶς προσδιορισμένα καὶ δὲν θὰ διακρίνονται ἀπὸ ἕνα πλῆθος ἄλλων ἀντικειμένων· θὰ μποροῦμε νὰ συλλογιζόμαστε εὔστοχα γι᾽ αὐτά, μόνο ἐφ᾽ ὅσον θὰ τὰ ἔχουμε διακρίνει ἀπὸ τὰ ἄλλα ἀντικείμενα ποὺ μ᾽ αὐτὰ συμφύρονται, δηλαδὴ μόνο ὅταν θὰ κατορθώσουμε νὰ τὰ ὁρίσουμε μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων.

Ἔστω ὅτι θεωροῦμε ἕνα σύνολο, καὶ ὅτι θέλουμε νὰ ὁρίσουμε τὰ διάφορα στοιχεῖα του· ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς ἀναλύεται φυσικὰ σὲ δύο μέρη: τὸ πρῶτο μέρος τοῦ ὁρισμοῦ, κοινὸ γιὰ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου, διδάσκει πῶς νὰ τὰ διακρίνουμε ἀπὸ ὅσα στοιχεῖα εἶναι ξένα ὡς πρὸς τὸ θεωρούμενο σύνολο· αὐτὸς θὰ ἦταν ὁ ὁρισμὸς τοῦ συνόλου· τὸ δεύτερο μέρος διδάσκει πῶς νὰ διακρίνουμε τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο.

Καθένα ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ ὁρισμοῦ πρέπει νὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων. Ὅταν μιλᾶμε γιὰ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ ὑπὸ ὁρισμὸ συνόλου, κάνουμε λόγο γιὰ ὅλα τὰ ἀντικείμενα ὅσα ἱκανοποιοῦν τὸ πρῶτο μέρος τοῦ ὁρισμοῦ καὶ ὁρίζονται πλήρως μὲ τὴν α ἢ τὴ β φράση ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων. Αὐτὸ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὁρισμοῦ· εἶναι δυνατὸν μετὰ νὰ τὸν συμπληρώσουμε, ἐπιλέγοντας τὸ δεύτερο ἥμισυ κατὰ τὸ δοκοῦν· ὁ ὁρισμὸς πάντως χρειάζεται συμπλήρωση. Ἂν διατυπώσω βεβαιωτικὰ μιὰ πρόταση σχετικὴ μὲ τὰ ἀντικείμενα ἑνὸς συνόλου, θέλω νὰ πῶ, ἂν ἕνα ἀντικείμενο ἱκανοποιεῖ τὸ πρῶτο μέρος τοῦ ὁρισμοῦ, ἡ πρόταση θὰ παραμείνει ἀληθὴς γιὰ τὸ ἑκάστοτε ἀντικείμενο, ὅπως καὶ ἂν διατυπωθεῖ τὸ δεύτερο μέρος τοῦ ὁρισμοῦ· εἶναι δυνατὸν ἡ πρόταση νὰ διατυπωθεῖ κατὰ τὸ δοκοῦν, ὅμως πρέπει νὰ διατυπωθεῖ, εἰδάλλως τὸ ἀντικείμενο θὰ ἦταν ἀδιανόητο καὶ ἡ πρόταση δὲν θὰ εἶχε κανένα νόημα.

Εἶναι ἀσφαλῶς δυνατὸν νὰ διατυπωθοῦν, καὶ ἔχουν ὄντως διατυπωθεῖ, ἐνστάσεις κατὰ αὐτοῦ τοῦ τρόπου θεώρησης. Οἱ φράσεις μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων μποροῦν πάντα νὰ συσχετιστοῦν μὲ ἕναν ἀριθμό, ἀφοῦ, π.χ., μποροῦν νὰ ταξινομηθοῦν κατ᾽ ἀλφαβητικὴ σειρά. Ἐφ᾽ ὅσον ὅλα τὰ ἀντικείμενα ὅσα εἶναι δυνατὸν νὰ νοήσουμε πρέπει νὰ ὁρίζονται μὲ παρόμοιες φράσεις, θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ τοὺς δοθεῖ ἕνας ἀριθμός. Ἑπομένως, δὲν θὰ ὑπῆρχαν νοητὰ ἀντικείμενα περισσότερα ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς. Ἂν ἀπὸ τὴν ἄλλη σκεφτοῦμε, λ.χ., τὸν χῶρο καὶ ἂν ἐξαιρέσουμε ὅσα σημεῖα δὲν ὁρίζονται μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων καὶ ἡ ὕπαρξή τους εἶναι καθαρὴ κενολογία, δὲν μένουν παρὰ μόνο τόσα σημεῖα ὅσα καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ὅμως ὁ Cantor ἀπέδειξε τὸ ἀντίθετο.

Πρόκειται γιὰ ὀφθαλμαπάτη. Ἡ παράσταση τῶν σημείων τοῦ χώρου μὲ τὴ φράση ποὺ χρησιμεύει ὡς ὁρισμός τους· καὶ ἡ ταξινομία τῶν φράσεων αὐτῶν καὶ τῶν ἀντίστοιχων σημείων κατὰ τοὺς ἀλφαβητικοὺς χαρακτῆρες ποὺ σχηματίζουν τὶς φράσεις, λαμβανόμενες ὁμοῦ, εἶναι ἀκριβῶς κατασκευὴ μιᾶς μὴ κατηγορηματικῆς ταξινομίας. Αὐτὴ ἡ ταξινομία εἶναι πηγὴ ὅλων τῶν δυσκολιῶν, ὅλων τῶν παραλογισμῶν, ὅλων τῶν ἀντινομιῶν ποὺ γι' αὐτὲς ἔκανα λόγο στὴν ἀρχὴ τοῦ κειμένου μου. Τί ἐννοοῦσε ὁ Cantor, καὶ τί στὴν πραγματικότητα ἀπέδειξε; Εἶναι δυνατὸν νὰ βρεθεῖ, μέσα στοὺς ἀκεραίους καὶ σὲ ὅσα σημεῖα τοῦ χώρου ὁρίζονται μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων, ἕνας νόμος ἀντιστοιχίας ποὺ νὰ ἱκανοποιεῖ τοὺς ἀκόλουθους ὅρους: 1ο) Ὁ νόμος μπορεῖ νὰ διατυπωθεῖ μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων. 2ο) Γιὰ οἱονδήποτε ἀκέραιο, μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἀντίστοιχο σημεῖο τοῦ χώρου, καὶ τὸ σημεῖο αὐτὸ ὁρίζεται πλήρως καὶ χωρὶς ἀσάφεια· ὁ ὁρισμὸς τοῦ ἑκάστοτε σημείου ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, τὸν ὁρισμὸ τοῦ ἀκεραίου καὶ τὴ διατύπωση τοῦ νόμου τῆς ἀντιστοιχίας· ἡ διατύπωση τοῦ νόμου τῆς ἀντιστοιχίας περιλαμβάνει πεπερασμένο μόνο ἀριθμὸ λέξεων, ἀφοῦ καὶ ὁ ἀκέραιος ὁρίζεται καὶ ὁ νόμος διατυπώνεται μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων. 3ο) Ἔστω ἕνα σημεῖο Pd τοῦ χώρου: ὑποθέτω ὅτι τὸ Pd ὁρίζεται μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων (*χωρὶς νὰ ἀποκλείσω τὴν ἐμφάνιση μέσα στὸν ὁρισμὸ αὐτὸ ὑπαινιγμῶν σχετικῶν μὲ αὐτὸν τοῦτο τὸν νόμο τῆς ἀντιστοιχίας*, πράγμα ποὺ ἀποτελεῖ τὴν οὐσία τῆς ἀπόδειξης τοῦ Cantor)· θὰ ὑπάρχει τότε ἕνας ἀκέραιος ὁριζόμενος χωρὶς ἀσάφεια μέσω τῆς διατύπωσης τοῦ νόμου τῆς ἀντιστοιχίας καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ σημείου P. 4ο) Ὁ νόμος τῆς ἀντιστοιχίας πρέπει νὰ εἶναι κατηγορηματικός, δηλαδὴ πρέπει νὰ ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖο P σὲ ἕναν ἀκέραιο, καὶ δὲν πρέπει νὰ πάψει νὰ ἀντιστοιχεῖ τὸ ἴδιο σημεῖο σὲ ἕναν ἀκέραιο, ὅταν θὰ ἔχουν εἰσαχθεῖ καὶ ἄλλα σημεῖα τοῦ χώρου. Αὐτὸ ἔδειξε ὁ Cantor καὶ ὅ,τι ἀπέδειξε ἐξακολουθεῖ νὰ ἀληθεύει· βλέπουμε τὸ πολυσύνθετο νόημα ποὺ περικλείει ἡ σύντομη πρόταση: ὁ πληθάριθμος τῶν σημείων τοῦ χώρου εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ ἐκεῖνον τῶν ἀκεραίων.

Ἔχει ἐπίσης λεχθεῖ ὅτι ὅσο φλύαρος καὶ ἂν εἶναι κάποιος, ποτὲ δὲν θὰ μπορέσει νὰ προφέρει ὅσο ζεῖ περισσότερες ἀπὸ ἕνα δισεκατομμύριο λέξεις· θὰ ἔπρεπε ἄραγε νὰ ἀποκλειστοῦν ὡς ἐκ τούτου ἀπὸ τὸ πεδίο τῆς ἀνθρώπινης σκέψης ὅσα ἀντικείμενα εἶναι ἀδύνατον νὰ ὁριστοῦν μὲ φράσεις ποὺ περιέχουν περισσότερες ἀπὸ ἕνα δισεκατομμύριο λέξεις, μὲ τὸ αἰτιολογικὸ ὅτι κανεὶς ποτὲ δὲν θὰ ἔχει τὴν εὐκαιρία νὰ ἀσχοληθεῖ μὲ τέτοιου εἴδους ἀντικείμενα; Ἡ ἔνσταση αὐτὴ δὲν πρέπει νὰ μᾶς σταματήσει. Ὅσο φλύαρος καὶ ἂν εἶναι ἕνας ἄνθρωπος, ἡ ἀνθρωπότητα θὰ εἶναι ἀκόμη πιὸ φλύαρη, καὶ καθὼς δὲν γνωρίζουμε ἐπὶ πόσο χρόνο θὰ ὑπάρχουν ἄνθρωποι, δὲν μποροῦμε νὰ περιορίσουμε ἐκ τῶν προτέρων τὸ πεδίο τῶν ἐρευνῶν τους. Ἀκόμη καὶ ἂν μπορούσαμε νὰ προσδιορίσουμε πότε θὰ πάψει νὰ ὑπάρχει ἡ ἀνθρωπότητα, ὑπάρχουν ἄλλα ἄστρα ὅπου ἄλλα ὄντα θὰ μποροῦσαν νὰ πάρουν τὴ σκυτάλη καὶ νὰ συνεχίσουν τὸ ἔργο ποὺ θὰ ἔχει μείνει ἡμιτελὲς ἐπὶ τῆς γῆς. Ἐξ ἄλλου, γιὰ νὰ ἀνασκευαστεῖ ἡ ἔνσταση, ἀρκεῖ νὰ φανταστοῦμε ἕνα σκεπτόμενο ὄν, ὅμοιο μὲ τὸν ἄνθρωπο, ἀλλὰ πολὺ πιὸ φλύαρο· καὶ μποροῦμε κάλλιστα νὰ συλλάβουμε μὲ τὸν νοῦ ἕνα τέτοιο ὄν. Ὑπάρχει ὅμως κάτι ποὺ δὲν μποροῦμε νὰ συλλάβουμε οὔτε μποροῦμε νὰ μιλήσουμε γι' αὐτὸ χωρὶς νὰ προφέρουμε λέξεις κενὲς περιεχομένου, λέξεις χωρὶς νόημα, κι αὐτὸ εἶναι ἕνα ὂν ποὺ δὲν εἶχε τίποτε πιὰ κοινὸ μὲ τὸν ἄνθρωπο, ἕνα ὂν ἱκανὸ νὰ νοεῖ φράσεις μὲ ἄπειρο ἀριθμὸ λέξεων σὲ πεπερασμένο χρόνο.

Τί πρέπει νὰ συμπεράνουμε ἀπὸ ὅλα αὐτά; Κάθε μαθηματικὸ θεώρημα πρέπει νὰ εἶναι ἐπαληθεύσιμο. Ὅταν διατυπώνω τὸ α ἢ τὸ β θεώρημα, ἰσχυρίζομαι ὅτι ὅλες οἱ ἀπόπειρες γιὰ ἐπαλήθευσή του θὰ ἐπιτύχουν· ἀκόμη καὶ ἂν οἱαδήποτε ἐπαλήθευση ἀπαιτεῖ ἔργο ὑπεράνω τῶν δυνάμεων ἑνὸς ἀνθρώπου, ἰσχυρίζομαι ὅτι ἂν πολλὲς γενεές, ἐνδεχομένως ἑκατό, κρίνουν πρόσφορο νὰ ἀσχοληθοῦν μὲ τὴν ἐπαλήθευση τοῦ θεωρήματος, τὸ ἐγχείρημα θὰ τελεσφορήσει. Αὐτὸ μόνο τὸ νόημα μπορεῖ νὰ ἔχει τὸ θεώρημα, ἔστω καὶ ἂν στὴν ἐκφώνησή του γίνεται λόγος γιὰ ἄπειρους ἀριθμούς. Ὅμως οἱ ἐπαληθεύσεις μποροῦν νὰ ἀφοροῦν μόνο πεπερασμένους ἀριθμούς, καὶ ἐξ αὐτοῦ συνάγεται ὅτι κάθε θεώρημα σχετικὸ μὲ ἄπειρους ἀριθμούς, καὶ κατὰ μείζονα μάλιστα λόγο κάθε θεώρημα γιὰ τὰ λεγόμενα ἀπειροσύνολα, ἢ γιὰ τοὺς ὑπερπεπερασμένους ἀριθμούς, πληθάριθμους ἢ τακτικούς, κτλ., κτλ., δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ συνοπτικὴ διατύπωση προτάσεων σχετικῶν μὲ πεπερασμένους ἀριθμούς. Διαφορετικά, τὸ θεώρημα δὲν θὰ ἐπαληθεύεται, καὶ ἂν δὲν ἐπαληθεύεται, δὲν θὰ ἔχει νόημα.

Τὸ συμπέρασμα εἶναι πὼς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχει ἀξίωμα προφανὲς σχετικὸ μὲ ἄπειρους ἀριθμούς· κάθε ἰδιότητα τῶν ἄπειρων ἀριθμῶν εἶναι ἁπλῶς μετάφραση ἰδιότητας τῶν πεπερασμένων ἀριθμῶν. Προφανὴς μπορεῖ νὰ εἶναι μόνο ἡ ἰδιότητα τῶν πεπερασμένων ἀριθμῶν· γιὰ νὰ ἀποδειχτεῖ ἡ ἰδιότητα τῶν ἄπειρων ἀριθμῶν πρέπει νὰ συγκριθεῖ μὲ τὴν ἰδιότητα τῶν πεπερασμένων καὶ νὰ δειχτεῖ ὅτι ἡ μετάφραση εἶναι ἀκριβής.

7. *Σύνοψη.*

Οἱ ἀντινομίες, ποὺ σ᾽ αὐτὲς ὁδηγήθηκαν ὁρισμένοι λογικοθεωρητικοί, προκύπτουν ἐκ τοῦ ὅτι δὲν κατόρθωσαν νὰ ἀποφύγουν ὁρισμένους φαύλους κύκλους. Αὐτὸ συνέβη ὅταν θεωροῦσαν πεπερασμένες συλλογὲς ἀντικειμένων, πολὺ πιὸ συχνὰ ὅμως ὅταν τοὺς κέντρισε ἡ φιλοδοξία νὰ πραγματευτοῦν ἀπειροπληθεῖς συλλογές. Στὴν πρώτη περίπτωση, θὰ μποροῦσαν εὔκολα νὰ ἀποφύγουν τὴν παγίδα ὅπου εἶχαν πέσει· ἤ, γιὰ νὰ εἶμαι πιὸ ἀκριβής, οἱ ἴδιοι ἔστησαν τὴν παγίδα καὶ ἔπεσαν σ᾽ αὐτὴν χάριν παιδιᾶς, καὶ ἔπρεπε μάλιστα μὲ πολλὴ προσοχὴ νὰ μεριμνήσουν μὴν τυχὸν καὶ δὲν βρεθοῦν μέσα στὴν παγίδα ἀλλὰ στὸ πλάι· μὲ δυὸ λόγια, στὴν περίπτωση τῶν πεπερασμένων συλλογῶν, οἱ ἀντινομίες εἶναι ἁπλῶς διανοητικὰ ἀθύρματα. Πολὺ διαφορετικὲς εἶναι ὅσες ἀντινομίες δημιουργεῖ ἡ ἰδέα τοῦ ἀπείρου· συμβαίνει μάλιστα συχνὰ νὰ πέφτει κανεὶς στὴν παγίδα αὐτὴ χωρὶς νὰ ἔχει πρόθεση, καὶ δὲν μπορεῖ νὰ ἐφησυχάζει, ἔστω καὶ ἂν εἶναι εἰδοποιημένος.

Οἱ ἀπόπειρες γιὰ νὰ βρεθεῖ διέξοδος ἀπὸ αὐτὲς τὶς δυσκολίες εἶναι πολλαπλὰ ἐνδιαφέρουσες, δὲν εἶναι ὅμως τελείως ἱκανοποιητικές. Ὁ κ. Zermelo θέλησε νὰ κατασκευάσει ἕνα ἄψογο ἀξιωματικὸ σύστημα· τὰ ἀντίστοιχα ἀξιώματα ὅμως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθοῦν αὐθαίρετα θεσπίσματα, ἀφοῦ θὰ ἔπρεπε νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι δὲν εἶναι ἀντιφατικά· καθὼς ὅμως ἔχουν σαρωθεῖ τὰ πάντα δὲν ἔχει μείνει κανένα ἔρεισμα γιὰ μιὰ τέτοια ἀπόδειξη. Ἀναγκαστικὰ λοιπὸν τὰ ἐν λόγῳ ἀξιώματα πρέπει νὰ εἶναι προφανῆ ἀφ᾽ ἑαυτῶν. Μὲ ποιό μηχανισμὸ ὅμως κατασκευάστηκαν; Ἀφετηρία ἦταν ὅσα ἀξιώματα ἀληθεύουν γιὰ πεπερασμένες συλλογές· κι αὐτὰ δὲν ἐπεκτείνονται ὅλα στὶς ἀπειροπληθεῖς συλλογές. Ἡ ἐπέκταση ἔγινε μόνο γιὰ ὁρισμένα ἀπὸ αὐτά, καὶ ἡ ἐπιλογὴ ἦταν λίγο ὣς πολὺ αὐθαίρετη. Κατ᾽ ἐμέ, ἐξ ἄλλου, ὅπως ὑποστήριξα πρωτύτερα, καμμία πρόταση σχετικὴ μὲ ἀπειροπληθεῖς συλλογὲς δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι διαισθητικὰ προφανής.

Ὁ κ. Russell κατανόησε καλύτερα τὴ φύση τῆς δυσκολίας, ὡστόσο δὲν κατόρθωσε νὰ τὴν ὑπερβεῖ, γιατὶ ἡ ἱεραρχία τύπων ποὺ προτείνει προϋποθέτει ὡς τετελεσμένη τὴ θεωρία τῶν τακτικῶν ἀριθμῶν.

Ὅσο γιὰ μένα, θὰ πρότεινα νὰ τηροῦνται οἱ ἀκόλουθοι κανόνες:

1ο) Νὰ θεωροῦνται μόνο ὅσα ἀντικείμενα εἶναι δυνατὸν νὰ ὁριστοῦν μὲ πεπερασμένο ἀριθμὸ λέξεων·

2ο) Νὰ μὴν παραγνωρίζεται ποτὲ ὅτι κάθε πρόταση σχετικὴ μὲ τὸ ἄπειρο πρέπει νὰ εἶναι μετάφραση, συνοπτικὴ διατύπωση προτάσεων σχετικῶν μὲ τὸ πεπερασμένο·

3ο) Νὰ ἀποφεύγονται οἱ μὴ κατηγορηματικὲς ταξινομίες καὶ οἱ μὴ κατηγορηματικοὶ ὁρισμοί.

Ὅλες οἱ ἔρευνες ποὺ μνημονεύσαμε ἔχουν ἕνα κοινὸ χαρακτηριστικό. Προσφερόμαστε νὰ διδάξουμε τὰ μαθηματικὰ σὲ μαθητὲς ποὺ ἀκόμη δὲν γνωρίζουν τὴ διαφορὰ ἀνάμεσα στὸ ἄπειρο καὶ στὸ πεπερασμένο· δὲν δείχνουμε καμμιὰ σπουδὴ νὰ τοὺς διδάξουμε σὲ τί συνίσταται ἡ διαφορά· ἀρχίζουμε δείχνοντάς τους ὅλα ὅσα εἶναι γνωστὰ γιὰ τὸ ἄπειρο, χωρὶς νὰ μᾶς ἀπασχολεῖ ἡ διαφορά· καὶ μετά, σὲ μιὰ περιοχὴ μακρὰν τοῦ πεδίου ποὺ τοὺς ὑποχρεώσαμε νὰ διατρέξουν, τοὺς ἀποκαλύπτουμε μιὰ μικρὴ γωνιὰ ὅπου κρύβονται οἱ πεπερασμένοι ἀριθμοί.

Αὐτὸ μοῦ φαίνεται ψυχολογικῶς ἐσφαλμένο· δὲν εἶναι αὐτὴ ἡ φυσικὴ πορεία τῆς ἀνθρώπινης διάνοιας. Ἀκόμη καὶ ἂν κατορθώσουμε νὰ ἀποφύγουμε ὅσο γίνεται τὴν περιπέτεια τῶν ἀντινομιῶν, ἡ μέθοδος αὐτὴ δὲν παύει νὰ εἶναι ἀντίθετη πρὸς κάθε ὀρθὴ ψυχολογία.

Ἀναμφίβολα, ὁ κ. Russell θὰ μοῦ ἀντιτάξει ὅτι τὸ προκείμενο δὲν εἶναι ἡ ψυχολογία, ἀλλὰ ἡ λογικὴ καὶ ἡ ἐπιστημολογία· κι ἐγώ, ἀπὸ τὴν πλευρά μου, θὰ ὑποχρεωθῶ νὰ ἀνταπαντήσω ὅτι δὲν ὑπάρχει οὔτε λογικὴ οὔτε ἐπιστημολογία ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν ψυχολογία· καὶ μὲ αὐτὴ τὴν ὁμολογία πίστεως ἐκ μέρους μου θὰ κλείσει κατὰ πάσα πιθανότητα ἡ συζήτηση, γιατὶ θὰ ἔχει ἔτσι ἀποκαλυφθεῖ ὁλοφάνερη μιὰ ἀγεφύρωτη διαφορὰ ἀπόψεων.