3

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΒΑΣΕΙ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ

BERTRAND RUSSELL

1. Ο Bertrand Russell (1872-1970) έγραψε το βιβλίο *The Principles of Mathematics* (1903), το τρίτομο *Principia Mathematica* (1910-13) εν συνεργασία με τον Alfred North Whitehead (1861-1947) και το *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919). Η συμβολή του στη φιλοσοφία των μαθηματικών έγκειται κυρίως στη θεωρία των περιγραφών (1905), την οποία σκιαγραφεί στο κεφάλαιο VIII του παρόντος, και στη θεωρία των τύπων η οποία παραμένει ουσιαστικό συστατικό των περισσότερων θεωριών της Λογικής.

   Διαβάζοντας τον πρώτο τόμο των *Grundgesetze der Arithmetik* του Frege ο Russell ανακαλύπτει (Ιούνιος 1901) το παράδοξο που πήρε το όνομά του και διαφέρει από τα άλλα παράδοξα κατά το ότι ανήκει φανερά στη Λογική, ενώ αυτά φαίνονταν να είναι ουσιαστικά μαθηματικής υφής. Στα *Principles* του 1903 προσθέτει ένα παράρτημα Β, όπου προτείνει δοκιμαστικά τη θεωρία των τύπων· στο άρθρο του 1905, που αναφέρει στη σημείωση 29 του παρόντος άρθρου, προτείνει άλλες τρεις διαφορετικές θεωρίες για να λύσει την αντινομία και, τέλος, επιστρέφει στη θεωρία των τύπων με το άρθρο του 1908, του οποίου δημοσιεύουμε τη μετάφραση. Το άρθρο είναι η βάση των *Principia* και προσφέρει μια σύνοψη της μαθηματικής Λογικής.

2. Για να εξοβελίσει τα παράδοξα ο Russell προτείνει να δεχθούμε την ακόλουθη *αρχή του φαύλου κύκλου*:

   (Φ) Καμία ολότητα δεν μπορεί να περιλαμβάνει μέλη που ορίζονται βάσει του εαυτού της.

   Η *θεωρία των τύπων* συνοψίζεται στην αρχή:

   (Τ) Μία προτασιακή συνάρτηση γεννά προτάσεις μόνο για ορίσματα των οποίων ο τύπος είναι κατά μία μονάδα κατώτερος του τύπου της.

   Η αρχή (Τ) σημαίνει ότι οι γλωσσικές οντότητες είναι ιεραρχημένες και οι γλωσσικοί κανόνες καλού σχηματισμού των εκφράσεων αποκλείουν ορισμένους συνδυασμούς, λ.χ. το συνδυασμό $\alpha(\alpha)$ όπου το ίδιο το α παίζει το ρόλο συναρτησιακού συμβόλου και ορίσματος. Με άλλα λόγια, η έκφραση που προκύπτει όταν εφαρμόσουμε ένα κατηγόρημα στον εαυτό του είναι χωρίς νόημα – με την ορολογία του Russell, η προτασιακή συνάρτηση «. . . είναι ένα φ» δεν γεννά καμία πρόταση, αν στην κενή θέση του ορίσματος βάλουμε τον εαυτό της. Έτσι, αποφεύγονται τα παράδοξα της αυτοαναφοράς και, γενικότερα, τα «λογικά» παράδοξα (2), (3), (7). Αυτό το τμήμα της θεωρίας των τύπων, που ο F. Ramsey [1931: 1-61] ονόμασε *απλή* θεωρία των τύπων, χαρακτηρίζεται από την αρχή:

(T_a) όλες οι προτάσεις είναι του ίδιου βαθμού και οι τύποι των κατηγορημάτων εξαρτώνται αποκλειστικά από τους τύπους των ορισμάτων με τα οποία μπορούν να συμπληρωθούν ώστε να παραγάγουν προτάσεις.

Με άλλα λόγια, αν φ είναι ένα κατηγόρημα ενός ορίσματος (ο Russell γράφει μία προτασιακή συνάρτηση μιας μεταβλητής) και οι $\varphi(\alpha)$ και $\varphi(\beta)$ είναι προτάσεις, τότε τα α και β είναι του ίδιου τύπου. Αν η φ ειναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, και οι $\varphi(\alpha,\beta)$ και $\varphi(\gamma,\delta)$ είναι προτάσεις, τότε τα ζεύγη $<\alpha,\beta>$ και $<\gamma,\delta>$ είναι του ίδιου τύπου (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι τα α και β είναι του ίδιου τύπου). Ο ακόλουθος επαγωγικός ορισμός των τύπων, που οφείλουμε στον Carnap (1937:§27), επιτρέπει να διακρίνουμε καθαρά την υφή και το βαθμό ενός τύπου:

(i) Όλα τα άτομα της θεωρίας μας έχουν τύπο *0*.
(ii) Αν οι τύποι των όρων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι αντίστοιχα $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$, τότε ο τύπος της διατεταγμένης νυάδας $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι η διατεταγμένη νυάδα $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$.
(iii) Αν η $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ είναι πρόταση, τότε το κατηγόρημα φ έχει τύπο $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu)$.
(iv) Αν η $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) = \alpha_{\nu+1}, \alpha_{\nu+2}, \ldots, \alpha_{\nu+\mu}$ είναι πρόταση, τότε η συνάρτηση f έχει τύπο $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu: \tau_{\nu+1}, \ldots, \tau_{\nu+\mu})$.

Παράδειγμα κατηγορήματος μια θέσης είναι το «. . . είναι ζυγός αριθμός» (γράφω Z), δύο θέσεων είναι το «. . . είναι μεγαλύτερο του . . .» (γράφω M), συνάρτησης είναι το «. . . είναι το άθροισμα των . . . και . . .» (γράφω A). Αν πάρουμε ως άτομα τους φυσικούς αριθμούς, τότε η Z(16) είναι αληθής πρόταση και, δεδομένου ότι ο τύπος του 16 είναι 0, ο τύπος της Z είναι (0). Πρόταση, αλλά ψευδής είναι η M(7,12), δηλ. «ο 7 είναι μεγαλύτερος του 12»· επειδή οι τύποι των αριθμητικών είναι 0, ο τύπος του ορίσματος 7,12 είναι 0,0 και ο τύπος του M είναι (0,0). Τέλος, ο τύπος της A είναι (0,0:0). Ο *βαθμός* των κατηγορημάτων Z και M, καθώς και της συνάρτησης A, είναι 1 και μπορεί να υπολογισθεί βάσει του κανόνα: «ο βαθμός μιας προτασιακής συνάρτησης είναι ίσος με τον μέγιστο αριθμό ζευγών παρενθέσεων οι οποίες περικλείουν ένα μηδέν στο όνομα του τύπου». Ο πρακτικός κανόνας απορρέει από τον αναδρομικό ορισμό του βαθμού (level):

(i) όλα τα άτομα έχουν βαθμό *0*.
(ii) ο βαθμός της νυάδας ορισμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι ίσος με τον μέγιστο βαθμό των $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$.
(iii) ο βαθμός ενός κατηγορήματος είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από το βαθμό του ορίσματός του.
(iv) ο βαθμός μιας συνάρτησης είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από τον μέγιστο των βαθμών των ορισμάτων και των τιμών της.

Παραδείγματα δευτέρου βαθμού αποτελούν τα κατηγορήματα «. . . είναι ιδιότητα ατόμων», «. . . είναι ιδιότητα ζευγών από άτομα», «. . . είναι το αντικείμενο αναφοράς του ονόματος. . .»· το πρώτο έχει τύπο ((0)), το δεύτερο ((0,0)) και το τρίτο (0,(0)). Ένας τρόπος για να δείχνουμε τον τύπο ενός κατηγορηματικού ή συναρτησιακού συμβόλου είναι να τον σημειώνουμε σαν εκθέτη του συμβόλου· έχουμε τότε:

$\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots$ συμβολίζουν άτομα
$\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \ldots$ συμβολίζουν ιδιότητες των ατόμων
$\varphi_1^{((0))}, \varphi_2^{((0))}, \ldots$ συμβολίζουν ιδιότητες ιδιοτήτων των ατόμων
$\varphi_1^{(0,0)}, \varphi_2^{(0,0)}, \ldots$ συμβολίζουν δυαδικές σχέσεις των ατόμων
$\varphi_1^{((0,0))}, \varphi_2^{((0,0))}, \ldots$ συμβολίζουν ιδιότητες δυαδικών σχέσεων των ατόμων κτλ.

Οι αντίστοιχες προτάσεις είναι: $\varphi^{(0)}(\alpha)$, $(\forall x^0)\varphi^{(0)}(x^0)$, $\varphi^{((0))}(\theta^{(0)})$, $(\forall y^{(0)})\varphi^{((0))}(y^{(0)})$ κτλ., όπου το $\forall x$ είναι ο ποσοδείκτης «για κάθε x» και $\exists x$ είναι ο ποσοδείκτης «υπάρχει x».

Η τάξη μιας γλώσσας καθορίζεται από τα σύμβολα μεγίστου τύπου που επιτρέπεται να εμφανίζονται σ' αυτήν, και ο βαθμός της από τον μέγιστο βαθμό των μεταβλητών στις οποίες επιτρέπεται η εφαρμογή των ποσοδεικτών. Λόγου χάρη, για να ορίσει ένα φυσικό αριθμό ο Russell χρειάζεται να χρησιμοποιήσει μια δευτεροβάθμια γλώσσα, αφού ο αριθμός, ας πούμε 2, είναι ιδιότητα μιας ιδιότητας.

3. Η απλή θεωρία των τύπων, πρώτον, δεν λύνει τα παράδοξα (1), (4), (5) και (6), που ο Ramsey ονόμασε σημασιολογικά ή γλωσσικά και, δεύτερον, δεν απορρέει από την αρχή του φαύλου κύκλου, γιατί δεν μας απαγορεύει να αναμείξουμε τύπους για να ορίσουμε έννοιες (Gödel, 1944:465). Η *κλαδωτή θεωρία* των τύπων αποβλέπει στη λύση των σημασιολογικών παραδόξων και προκύπτει από τους περιορισμούς που επιβάλλει η αρχή του φαύλου κύκλου στους ορισμούς των εννοιών. Ο προσανατολισμός της κλαδωτής θεωρίας είναι σαφώς νομιναλιστικός, όπως τονίζει ο Gödel, και δείχνει η ακόλουθη αρχή της:

(T_x) ο τύπος ενός κατηγορήματος εξαρτάται από τους τύπους των ορισμάτων του και από τη μορφή του ορισμού του.
Το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις.

Η αρχή της κλαδωτής θεωρίας απορρέει από την αρχή του φαύλου κύκλου, η οποία ερμηνεύεται ως απαγόρευση να ορίζουμε ένα συγκεκριμένο στοιχείο ενός συνόλου επικαλούμενοι (φανερά ή κρυφά) το ίδιο το σύνολο στο οποίο ανήκει. Αυτή η απαγόρευση της «μη κατηγορηματικότητας» οδηγεί σε κατασκευαστικές αντιλήψεις για την ύπαρξη αντικειμένων. Ας δούμε πώς εφαρμόζεται στην περίπτωση του Επιμενίδη. Η δήλωση του ότι «όλες οι δηλώσεις όλων των κρητικών είναι ψευδείς» μπορεί να αποδοθεί ως «$(\forall x)(\forall y)(\delta(y,x)\rightarrow\neg y)$», όπου $\delta(y,x)$ είναι το κατηγόρημα «η y είναι δήλωση του x». Η δήλωση του Επιμενίδη κατασκευάστηκε με τη βοήθεια της συνάρτησης «$(\forall y)(\delta(y,x)\rightarrow\neg y)$» του x, που διαβάζεται ως «αν κάτι y είναι δήλωση του x, τότε είναι ψευδής». Αυτή η συνάρτηση: (α) έχει ορίσματα τα άτομα x, είναι δηλαδή της μορφής $\psi(x)$· και (β) περιέχει έναν ποσοδείκτη ο οποίος εφαρμόζεται σε δηλώσεις y, όχι σε άτομα. Σύμφωνα με την αρχή του φαύλου κύκλου, η δήλωση του Επιμενίδη, που ορίζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης ψ, δεν μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της ψ, δηλ. δεν μπορεί να περιέχεται στις δηλώσεις των κρητικών, που «προηγούνται» της δήλωσης του Επιμενίδη. Αυτό εξασφαλίζεται με το να πούμε ότι η δήλωση του Επιμενίδη έχει βαθμό $\nu+1$, αν οι δηλώσεις των κρητικών (στους οποίους εφαρμόζεται ο ποσοδείκτης της συνάρτησης ψ) έχουν βαθμό ν. Επομένως, στην κλαδωτή ιεραρχία οι προτάσεις έχουν βαθμό ο οποίος εξαρτάται από τον τρόπο της κατασκευής τους και, τελικά, από τη συγκεκριμένη γλώσσα που θα χρησιμοποιήσουμε. Εδώ, όμως, οι βαθμοί παρουσιάζονται στο εσωτερικό κάθε τύπου. Είδαμε ότι οι προτάσεις έχουν διάφορους βαθμούς. Ένα δεύτερο παράδειγμα αποτελούν οι ιδιότητες των ατόμων. Στο εσωτερικό του πρώτου τύπου μπορούμε να διακρίνουμε ιδιότητες ατόμων που ορίζονται χωρίς αναφορά σε καμία ολότητα – αυτές έχουν τάξη *0*· ιδιότητες που ορίζονται με τη βοήθεια της ολότητας των ιδιοτήτων τάξης *0* – αυτές είναι οι ιδιότητες τάξης *1*· γενικά, οι ιδιότητες που ορίζονται με τη βοήθεια της ολότητας των ιδιοτήτων τάξης ν, θα είναι ιδιότητες τάξης $\nu+1$. Έτσι, χωρίζουμε τις ιδιότητες τύπου *0* σε διάφορες τάξεις ή «κλάδους». Τα παράδοξα αποφεύγονται, αλλά το κόστος της νομιναλιστικής απαίτησης είναι δυσβάστακτο: τα μαθηματικά είναι αδύνατα, όπως δείχνει το παράδειγμα του ορισμού της έννοιας «φυσικός αριθμός», που δίνει ο ίδιος ο Russell (κεφ. V). Για να απαλλαγεί από τους περιορισμούς της κλαδωτής θεωρίας ο Russell δέχεται το αξίωμα της αναγωγιμότητας: κάθε συνάρτηση φ είναι κατηγορηματική (τύπος 13, κεφ. VI) και ορίζει ένα σύνολο, το «πλασματικό αντικείμενο» $\hat{z}\varphi z$ (κεφ. VII) – με άλλα λόγια, δέχεται την ύπαρξη των συνόλων, και μόνο το επίθετο «πλασματικός» θυμίζει την αρχική νομιναλιστική απαγόρευση.

4. Η αρχική μορφή της κλαδωτής θεωρίας εγκαταλείφθηκε από τους περισσότερους συγγραφείς οι οποίοι, για τη λύση των σημασιολογικών αντινομιών, στράφηκαν στη θεωρία του Tarski. Ο Quine (1967:150-53) θεωρεί «γριφώδη» τη ρασελιανή λύση των σημασιολογικών παραδόξων, επειδή ο συγγραφέας δεν ξεχώρισε σαφώς την καθαρά σημασιολογική από την οντολογική διάσταση: υπάρχει σύγχυση ανάμεσα στις αποφάνσεις και τις αντίστοιχες προτάσεις, τις αποφάνσεις με ελεύθερες μεταβλητές και τις αντίστοιχες ιδιότητες ή σχέσεις. Εξαιτίας της ο Russell απονέμει τύπους όχι μόνο στα αντικείμενα της θεωρίας (άτομα, ιδιότητες κτλ.) αλλά και στις προτάσεις της. Εδώ πρέπει να επισημάνουμε τρία πράγματα: πρώτον, ότι η απλή θεωρία των τύπων έγινε πιο φιλελεύθερη· δεχόμαστε υπερπερασμένους τύπους (λ.χ. τον ω) και έτσι διαθέτουμε γλώσσες ικανές να εκφράσουν μεγάλα τμήματα της αριθμητικής και της συνολοθεωρίας. Αυτές είναι οι *σωρευτικές* θεωρίες των τύπων. Δεύτερον, ότι ο ίδιος ο Quine (1963) πρότεινε μία σωρευτική παραλλαγή της θεωρίας των τύπων –τη θεωρία της *διαστρωμάτωσης* (stratification)– η οποία δεν διαφέρει ουσιαστικά από τη θεωρία των συνόλων του Zermelo (Βλ. και Wang, 1974: 103-130). Τρίτον, ότι έχουν αναπτυχθεί παραλλαγές της κλαδωτής ιεραρχίας ικανοποιητικές, λ.χ. για την πλατωνιστική θεωρία των φυσικών αριθμών (από τον Wang και τον Lorentzen).
5. Ο συμβολισμός του Russell διαφέρει από τον σημερινό συμβολισμό. Τα κυριότερα σύμβολά του είναι:

$\varphi\hat{z}$	συμβολίζει τη συνάρτηση φ μιας μεταβλητής
$\varphi!\hat{z}$	συμβολίζει την κατηγορηματική συνάρτηση φ μιας μεταβλητής
φa	συμβολίζει την τιμή της συνάρτησης φ για το όρισμα a, και διαβάζεται «το a είναι ένα φ»
$(z)\varphi z$	συμβολίζει τη γενικευμένη απόφανση «όλα τα z είναι φ», που τώρα συμβολίζεται με το $(\forall z)\varphi z$
$\hat{z}\varphi z$	*συμβολίζει το σύνολο των z που έχουν την ιδιότητα* φ
$(\iota x)\varphi z$	συμβολίζει την έκφραση «το μοναδικό αντικείμενο που έχει την ιδιότητα φ».

Ο Quine (1967) παρατηρεί ότι μερικά σύμβολα, όπως τα $\overrightarrow{R}$'x, $\overleftarrow{R}$'x, D'R, G'R, είναι περιττά και μπορούν να αντικατασταθούν αντιστοίχως από τα R''ιx, $\breve{R}\iota$'x, R''V και $\breve{R}$''V. Το γεγονός αυτό υποχρεώνει τους συγγραφείς των *Principia* να αποδεικνύουν θεωρήματα που αφορούν μόνο το συμβολισμό· τέλος, ο Bernays (1926) έδειξε ότι το πέμπτο αξίωμα δεν είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα, επομένως μπορεί να παραλειφθεί.

BERNAYS, P., Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der 'Principia mathematica', *Mathematische Zeitschrift 25* (1926) 305-320.

CARNAP Rudolf, *The Logical Syntax of Language*. London: Routlege and Kegan Paul, 1937, [7] 1967.

GÖDEL Kurt, 'Russell's Mathematical Logic' στη συλλογή *Philosophy of Mathematics-Selected Readings* των P. Benacerraf και H. Putnam. Cambridge University Press, 2η έκδοση 1983, σσ. 447-469. Πρώτη δημοσίευση το 1944 στο *The Philosophy of Bertrand Russell*, ed. P. A. Schilpp (Evanston and Chicago, Northwestern University 1944), σσ. 125-153.

QUINE W.V., *Set Theory and its Logic*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1963.

QUINE, W.V., Εισαγωγικό σχόλιο στο άρθρο του Russell, 'Mathematical Logic as Based on the Theory of Types' στη συλλογή του Jan van Heijenoort, *From Frege to Gödel A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*. Cambridge Massachusetts: Harvard University Press, 1967, pp. 150-153.

RAMSEY, F.P., *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, edited by R. B. Braithwaite. London: Paul, Trench, Trubner, 1931.

WANG Hao 'Russell's Logic and Some General Issues' *From Mathematics to Philosophy* London: Routledge and Kegan Paul, 1974, pp. 103-130.

Π.Χ.

Νομίζω πως αξίζει να παρουσιάσω την ακόλουθη θεωρία συμβολικής λογικής, κυρίως γιατί μπορεί να λύσει ορισμένες αντιφάσεις από τις οποίες η πιο γνωστή στους μαθηματικούς είναι η αντινονομία του Bulari-Forti σχετικά με τον μέγιστο διατακτικό αριθμό[1]. Αλλά η θεωρία αυτή φαίνεται να μην εξαρτάται αποκλειστικά από την έμμεση αυτή σύσταση. Αν δεν κάνω λάθος, έχει και μία ορισμένη ανταπόκριση στον κοινό νου, και αυτό της προσδίδει μία εγγενή αξιοπιστία. Ωστόσο, δεν πρέπει να τονίζει κανείς υπερβολικά αυτό το προσόν, γιατί ο κοινός νους είναι πολύ λιγότερο αλάνθαστος απ' ό,τι θέλει να πιστεύει. Θα αρχίσω λοιπόν εκθέτοντας μερικές από τις αντιφάσεις που πρέπει να λυθούν, και μετά θα δείξω πώς τις λύνει η θεωρία των λογικών τύπων.

1. *Οι αντιφάσεις*

(1) Η αρχαιότερη αντίφαση του είδους που μας ενδιαφέρει είναι ο *Επιμενίδης*. Ο κρητικός Επιμενίδης είπε ότι όλοι οι κρητικοί είναι ψεύτες, και ότι κάθε άλλη δήλωση που κάνουν οι κρητικοί είναι ασφαλώς ψευδής. Ήταν αυτό είναι ψεύδος; Η περίπτωση του ανθρώπου που λέει «ψεύδομαι» αποτελεί την απλούστερη μορφή αυτής της αντίφασης: αν ψεύδεται, τότε λέει την αλήθεια· και αντίστροφα.

(2) Ας υποθέσουμε ότι *w* είναι το σύνολο (class) όλων των συνόλων που δεν είναι μέλη του εαυτού τους. Τότε, όποιο σύνολο κι αν είναι το *x*, η [πρόταση] «το *x* είναι ένα *w*» ισοδυναμεί[2] με την «το *x* δεν είναι ένα *x*». Επομένως, αν στο *x* δώσουμε την τιμή *w*, η πρόταση «το *w* είναι ένα *w*» ισοδυναμεί με την «το *w* δεν είναι ένα *w*».

(3) Έστω *T* η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις δύο σχέσεις *R* και *S*, όταν η *R* δεν έχει τη σχέση *R* με την *S*. Τότε, όποιες και αν είναι οι σχέσεις *R* και *S*, η «η *R* έχει τη σχέση *T* προς την *S*» ισοδυναμεί με την «η *R* δεν έχει τη σχέση *R* προς την *S*». Αν τώρα στα *R* και *S* δώσουμε την τιμή T, η «η *T* έχει τη σχέση *T* προς την *T*» ισοδυναμεί με την «η *T* δεν έχει τη σχέση *T* προς την *T*».

(4) Ο αριθμός των συλλαβών στα ελληνικά[3] ονόματα των πεπερασμένων ακέραιων αριθμών τείνει να αυξηθεί όσο μεγαλώνει ο ακέραιος και πρέπει βαθμιαία να αυξάνεται απεριόριστα, αφού με έναν δεδομένο πεπερασμένο αριθμό συλλαβών μπορούμε να σχηματίσουμε μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό ονομάτων. Επομένως, τα ονόματα ορισμένων ακεραίων πρέπει να αποτελούνται από τριάντα τουλάχιστον συλλαβές και ανάμεσά τους πρέπει να υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός. Άρα η έκφραση «ο ελάχιστος ακέραιος που δεν λέγεται με λιγότερες από τριάντα συλλαβές» πρέπει να αναφέρεται σε έναν καθορισμένο ακέραιο· πραγματικά, αναφέρεται στον 1.344.424. Αλλά η ίδια η έκφραση «ο ελάχιστος ακέραιος που δεν λέγεται με λιγότερες από τριάντα συλλαβές» είναι ένα όνομα που αποτελείται από είκοσι επτά συλλαβές· επομένως, ο ελάχιστος ακέραιος που δεν λέγεται με λιγότερες από τριάντα συλλαβές μπορεί να κατονομαστεί με είκοσι επτά συλλαβές· και αυτό είναι μία αντίφαση[4].

(5) Από τους υπερπερασμένους διατακτικούς αριθμούς μερικοί μπορούν να ορισθούν, ενώ άλλοι δεν μπορούν, γιατί ο ολικός αριθμός των δυνατών ορισμών είναι $\aleph_0$, ενώ ο αριθμός των υπερπεπερασμένων διατακτικών αριθμών υπερβαίνει τον $\aleph_0$. Επομένως, πρέπει να υπάρχουν μη οριστοί διατακτικοί αριθμοί και μεταξύ τους πρέπει να υπάρχει ένας ελάχιστος. Αλλά αυτός ορίζεται ως «ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός που δεν ορίζεται», και αυτό είναι μία αντίφαση[5].

(6) Το παράδοξο του Richard[6] συγγενεύει με τον ελάχιστο διατακτικό αριθμό που δεν μπορεί να ορισθεί. Είναι το ακόλουθο: θεωρούμε όλους τους δεκαδικούς που μπορούν να ορισθούν με τη βοήθεια ενός πεπερασμένου αριθμού λέξεων· έστω *E* το σύνολο αυτών των δεκαδικών. Τότε το *E* έχει $\aleph_0$ όρους· επομένως οι όροι του μπορούν να διαταχθούν ως 1ος, 2ος, 3ος, ... Ορίζουμε τον αριθμό *N* με τον ακόλουθο τρόπο: αν το νυοστό δεκαδικό ψηφίο του νυοστού αριθμού είναι *p*, το νυοστό του *N* θα είναι $p + 1$ (ή 0, αν $p = 9$). Ο *N* διαφέρει από όλους τους αριθμούς του *E*, αφού, για κάθε πεπερασμένη τιμή του *ν*, το νυοστό ψηφίο του *N* διαφέρει από το νυοστό ψηφίο του νυοστού από τους αριθμούς που αποτελούν το *E*, και επομένως ο *N* διαφέρει από τον νυοστό δεκαδικό αριθμό. Ωστόσο, ορίσαμε τον *N* με έναν πεπερασμένο αριθμό λέξεων, και γι' αυτό ο *N* θα έπρεπε να είναι μέλος του *E*. Ώστε ο *N* είναι μέλος του *E* και, μαζί, δεν είναι μέλος του *E*.

(7) Η αντίφαση του Bulari-Forti[7] μπορεί να διατυπωθεί με τον ακόλουθο τρόπο: Μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε σειρά με καλή διάταξη έχει ένα διατακτικό αριθμό, ότι η σειρά των διατακτικών αριθμών που εκτείνεται έως ένα δεδομένο διατακτικό αριθμό και τον περιλαμβάνει υπερβαίνει τον διατακτικό αριθμό κατά μία μονάδα, και (με ορισμένες πολύ φυσικές παραδοχές) ότι η σειρά όλων των διατακτικών αριθμών (σύμφωνα με την τάξη του μεγέθους τους) έχει καλή διάταξη. Από αυτά απορρέει το ότι η

σειρά όλων των διατακτικών αριθμών μέχρι και τον Ω έχει ως διατακτικό αριθμό της τον $\Omega + 1$, που πρέπει να είναι μεγαλύτερος του Ω. Επομένως, ο Ω δεν είναι ο διατακτικός αριθμός όλων των διατακτικών αριθμών.

Όλες αυτές οι αντιφάσεις (που είναι μία επιλογή από έναν απροσδιόριστο αριθμό αντιφάσεων) έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό το οποίο μπορούμε να περιγράψουμε ως αυτοαναφορά ή ανακλαστικότητα. Η παρατήρηση του Επιμενίδη πρέπει να εμπίπτει στο ίδιο της το βεληνεκές (scope). Αν *όλα* τα σύνολα είναι μέλη του *w*, με τον όρο ότι δεν είναι μέλη του εαυτού τους, αυτό πρέπει να ισχύει και για το ίδιο το *w*· όμοια είναι η περίπτωση της ανάλογης αντίφασης με τις σχέσεις. Στην περίπτωση των ονομάτων και των ορισμών τα παράδοξα προκύπτουν από το ότι θεωρούμε το μη κατονομάσιμο και το μη ορίσιμο ως στοιχεία σε ονόματα και σε ορισμούς. Στην περίπτωση του παραδόξου του Burali-Forti, η σειρά της οποίας ο διατακτικός αριθμός προκαλεί τη δυσκολία, είναι η σειρά όλων των διατακτικών αριθμών. Σε κάθε αντίφαση λέμε κάτι για *όλες* τις περιπτώσεις κάποιου είδους και από αυτό που λέμε φαίνεται να γεννιέται μία νέα περίπτωση που ανήκει και, μαζί, δεν ανήκει στο ίδιο είδος στο οποίο ανήκουν όλες οι περιπτώσεις τις οποίες αφορά αυτό που λέχθηκε. Ας εξετάσουμε τις αντιφάσεις χωριστά για να δούμε πώς συμβαίνει κάτι τέτοιο.

(1) Όταν κάποιος πει «Ψεύδομαι», μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη δήλωσή του ως: «Υπάρχει μία πρόταση που καταφάσκω και είναι ψευδής». Όλες οι δηλώσεις ότι 'υπάρχει' το άλφα-που-είναι-έτσι μπορούν να θεωρηθούν ως αρνήσεις ότι το αντίθετο είναι πάντοτε αληθές· έτσι η «Ψεύδομαι» γίνεται: «Δεν αληθεύει για όλες τις προτάσεις ή ότι δεν τις καταφάσκω ή ότι είναι αληθείς». Με άλλα λόγια, «Δεν αληθεύει για όλες τις προτάσεις *p* ότι αν καταφάσκω την *p*, τότε η *p* είναι αληθής». Το παράδοξο προκύπτει, όταν θεωρήσουμε αυτή τη δήλωση (statement) ως κατάφαση μιας πρότασης η οποία πρέπει επομένως να εμπίπτει στο βεληνεκές της δήλωσης. Αυτό, όμως, φανερώνει ότι η έννοια «όλες οι προτάσεις» είναι αθέμιτη· γιατί, αλλιώς, πρέπει να υπάρχουν προτάσεις (όπως οι πιο πάνω) που, ενώ αφορούν όλες τις προτάσεις, δεν μπορούν να συγκαταλέγονται ανάμεσα στις προτάσεις για τις οποίες μιλούν, χωρίς να υπάρξει αντίφαση. Όπως και αν δούμε την ολότητα των προτάσεων, οι δηλώσεις που την έχουν ως αντικείμενο γεννούν νέες προτάσεις οι οποίες πρέπει να βρίσκονται έξω από αυτή την ολότητα – το τίμημα για το αντίθετο είναι η αντίφαση. Δεν χρησιμεύει σε τίποτε η διεύρυνση της ολότητας, γιατί αυτό διευρύνει και το πεδίο των δηλώσεων που αφορούν την ολότητα. Επομένως, δεν πρέπει να υπάρχει ολότητα προτάσεων και η φράση «όλες οι προτάσεις» πρέπει να στερείται νοήματος.

(2) Σε αυτή την περίπτωση, το σύνολο *w* ορίζεται με αναφορά σε «όλα τα στοιχεία» και κατόπιν αποκαλύπτεται ότι και αυτό είναι ένα από τα σύνολα. Αν για να διευκολυνθούμε, αποφασίσουμε ότι κανένα σύνολο δεν είναι μέλος του εαυτού του, τότε το *w* γίνεται το σύνολο όλων των συνόλων, και πρέπει να αποφασίσουμε ότι αυτό δεν είναι μέλος του εαυτού του, δηλ. δεν είναι σύνολο. Αυτό είναι δυνατόν μόνο αν δεν υπάρχει κάτι που να είναι το σύνολο όλων των συνόλων, με την έννοια που απαιτεί το παράδοξο. Το ότι δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο προκύπτει από το γεγονός ότι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει, τότε η υπόθεση γεννάει (όπως στην προηγούμενη αντίφαση) νέα σύνολα που βρίσκονται έξω από την υποτιθέμενη ολότητα όλων των συνόλων.

(3) Αυτή η περίπτωση είναι ακριβώς ανάλογη με την (2) και δείχνει ότι δεν είναι θεμιτό να μιλάμε για «όλες τις σχέσεις».

(4) Η έκφραση «ο ελάχιστος ακέραιος που δεν λέγεται με λιγότερες από τριάντα συλλαβές» εμπεριέχει την ολότητα των ονομάτων, γιατί είναι «ο ελάχιστος ακέραιος στον οποίο όλα τα ονόματα ή δεν ταιριάζουν ή έχουν περισσότερες από τριάντα συλλαβές». Εδώ έχουμε αντίφαση, όταν δεχθούμε ότι μία φράση που περιέχει «όλα τα ονόματα», αποτελεί όνομα η ίδια, μολονότι η αντίφαση φαίνεται να δείχνει ότι δεν μπορεί να είναι ένα από τα ονόματα που υποτέθηκε πως εξαντλούν όλα τα υπάρχοντα ονόματα. Γι' αυτό η έννοια «όλα τα ονόματα» είναι αθέμιτη.

(5) Αυτή η περίπτωση δείχνει, παρόμοια, ότι η «όλοι οι ορισμοί» είναι μία αθέμιτη έννοια.

(6) Αυτή λύνεται, όπως η (5), όταν παρατηρήσουμε ότι η έννοια «όλοι οι ορισμοί» είναι αθέμιτη. Έτσι, ο αριθμός *E δεν* ορίζεται με πεπερασμένο αριθμό λέξεων· στην πραγματικότητα δεν ορίζεται καθόλου[8].

(7) Η αντίφαση του Burali-Forti δείχνει ότι η έννοια «όλοι οι διατακτικοί αριθμοί» είναι αθέμιτη· γιατί αλλιώς, όλοι οι διατακτικοί αριθμοί διατεταγμένοι κατά την τάξη του μεγέθους αποτελούν μία σειρά με καλή διάταξη, και αυτής ο διατακτικός αριθμός πρέπει να είναι μεγαλύτερος από όλους τους διατακτικούς αριθμούς.

Ώστε όλες οι αντιφάσεις μας έχουν κοινή την προϋπόθεση μιας ολότητας η οποία, αν ήταν θεμιτή, θα διευρυνόταν αμέσως με νέα μέλη που ορίζονται με τη βοήθειά της.

Αυτό μας οδηγεί στον κανόνα: «Οτιδήποτε εμπεριέχει το *όλον* ενός συμπλέγματος (collection) δεν πρέπει να ανήκει σ' αυτό»· ή, αντίστροφα: «Αν, με την παραδοχή ότι ένα ορισμένο σύλλεγμα είχε άθροισμα (total), αυτό θα είχε μέλη οριστά μόνο με τη βοήθεια αυτού του αθροίσματος, τότε αυτό το σύλλεγμα δεν έχει άθροισμα»[9].

Ωστόσο, η αρχή αυτή έχει καθαρά αρνητική ισχύ. Επαρκεί για να αποδείξει ότι πολλές θεωρίες είναι λαθεμένες, αλλά δεν μας δείχνει πώς να εξαλείψουμε τα σφάλματα. Δεν μπορούμε να πούμε: «Όταν μιλώ για *όλες* τις προτάσεις, εννοώ μόνο τις προτάσεις στις οποίες γίνεται μνεία του 'όλες οι προτάσεις'»· γιατί σ' αυτή την εξήγηση αναφέραμε τις προτάσεις στις οποίες γίνεται μνεία όλων των προτάσεων, και αυτή η μνεία στερείται το νόημα. Είναι δυνατόν να αποφύγουμε τη μνεία ενός πράγματος με το να μνημονεύσουμε ότι δεν θα το μνημονεύσουμε. Θα ήταν σαν να λέγαμε σε κάποιον με μεγάλη μύτη: «Όταν μιλώ για μύτες εξαιρώ αυτές που είναι υπερβολικά μεγάλες»· δεν θα ήταν και πολύ εύστοχος τρόπος για να αποφύγω ένα δυσάρεστο θέμα. Ώστε είναι απαραίτητο, αν δεν θέλουμε να παραβούμε την αρνητική αρχή που μόλις διατυπώθηκε, να κατασκευάσουμε τη λογική μας χωρίς να μνημονεύουμε πράγματα, όπως «όλες οι πράξεις» ή «όλες οι ιδιότητες», αλλά και χωρίς να πρέπει να πούμε ότι αποκλείουμε τέτοια πράγματα. Ο αποκλεισμός πρέπει να προκύπτει με φυσικό και αναπόφευκτο τρόπο από τις θετικές θεωρίες μας, οι οποίες πρέπει να λένε καθαρά ότι φράσεις όπως η «όλες οι προτάσεις» και η «όλες οι ιδιότητες» δεν έχουν νόημα.

Η πρώτη δυσκολία που αντιμετωπίζουμε σχετίζεται με τις θεμελιακές αρχές της λογικής, οι οποίες είναι γνωστές με το αλλόκοτο όνομα «οι νόμοι του σκέπτεσθαι». Για παράδειγμα η «Όλες οι προτάσεις είναι ή αληθείς ή ψευδείς» παύει να έχει νόημα. Αν είχε νόημα, θα ήταν πρόταση, και η ίδια θα υπαγόταν στο πεδίο της. Ωστόσο, όμως, πρέπει να βρεθεί κάποιο υποκατάστατο, γιατί αλλιώς είναι αδύνατη οποιαδήποτε μελέτη της λογικής παραγωγής.

Μία άλλη, ειδικότερη δυσκολία, παρουσιάζει η περίπτωση της μαθηματικής επαγωγής. Θέλουμε να μπορούμε να λέμε: «Αν ο *n* είναι πεπερασμένος ακέραιος, ο *n* έχει όλες τις ιδιότητες που έχουν ο *0* και όλοι οι διάδοχοι αριθμών που τις έχουν». Εδώ όμως η φράση «όλες οι ιδιότητες» πρέπει να αντικατασταθεί από άλλη, που δεν υπόκειται στις ίδιες αντιρρήσεις. Ίσως σκεφθεί κανείς ότι η «όλες οι ιδιότητες που έχει ο *0* και όλοι οι διάδοχοι αριθμών που τις έχουν, αντίθετα με την «όλες οι ιδιότητες», να μην είναι αθέμιτη. Αλλά αυτό δεν συμβαίνει. Θα ανακαλύψουμε ότι στις φράσεις της μορφής «όλες οι ιδιότητες που κτλ.» υπεισέρχονται *όλες* οι ιδιότητες στις οποίες έχει νόημα να αποδοθεί το «κτλ.» με κατάφαση ή με άρνηση, και όχι μονάχα εκείνες που πραγματικά έχουν το χαρακτηριστικό για το οποίο γίνεται λόγος· διότι, εφόσον λείπει ένας κατάλογος των ιδιοτήτων που έχουν αυτό το χαρακτηριστικό, μία δήλωση σχετική με όλες όσες έχουν αυτό το χαρακτηριστικό, πρέπει να είναι υποθετική, δηλ. της μορφής: «Είναι πάντα αληθές ότι, αν μία ιδιότητα έχει το χαρακτηριστικό που αναφέρθηκε, τότε κτλ.» Έτσι, λοιπόν, αν η φράση «όλες οι ιδιότητες» στερείται νοήματος, είναι εκ πρώτης όψεως αδύνατον να έχει νόημα η εκφώνηση της μαθηματικής επαγωγής. Όπως θα δείξουμε αργότερα, μπορούμε να αποφύγουμε αυτή τη δυσκολία· για την ώρα πρέπει να εξετάσουμε τους νόμους της λογικής, γιατί αυτοί είναι οι πιο θεμελιακοί.

II. *Όλα και οποιοδήποτε*

Όταν δοθεί μία δήλωση που περιέχει μία μεταβλητή *x*, ας πούμε η '$x = x$', μπορούμε να δεχθούμε ότι αυτή ισχύει σε όλες τις συγκεκριμένες περιπτώσεις, ή μπορούμε να δεχθούμε οποιαδήποτε από τις συγκεκριμένες περιπτώσεις, χωρίς να αποφασίσουμε σχετικά με το ποια περίπτωση δεχόμαστε. Η διάκριση μοιάζει περίπου με τη διάκριση ανάμεσα σε γενική και σε επιμέρους πρόταση της ευκλείδειας γεωμετρίας. Η γενική πρόταση μας λέει κάτι για όλα (λ.χ.) τα τρίγωνα, ενώ η μερική πρόταση παίρνει ένα τρίγωνο και βεβαιώνει το ίδιο πράγμα, αλλά γι' αυτό το τρίγωνο. Αλλά το τρίγωνο που πήραμε είναι ένα *οποιοδήποτε* τρίγωνο, όχι ένα ειδικό τρίγωνο· και έτσι, ενώ σ' όλη την απόδειξη ασχολείται κανείς με ένα μόνο τρίγωνο, η απόδειξη δεν χάνει τη γενικότητά της. Αν πούμε: «Αν το *ΑΒΓ* είναι ένα τρίγωνο, τότε το άθροισμα των πλευρών *ΑΒ* και *ΑΓ* είναι μεγαλύτερο από την πλευρά *ΒΓ*», λέμε κάτι για *ένα* τρίγωνο, όχι για *όλα* τα τρίγωνα· αλλά το τρίγωνο για το οποίο μιλάμε είναι εντελώς απροσδιόριστο και, επομένως, και η δήλωσή μας είναι εντελώς αμφίσημη. Δεν καταφάσκουμε καμία καθορισμένη πρόταση, αλλά μία ακαθόριστη πρόταση ανάμεσα σε όλες τις προτάσεις που προκύπτουν από την υπόθεση ότι το *ΑΒΓ* είναι αυτό ή εκείνο το τρίγωνο. Η έννοια της αμφίσημης βεβαίωσης είναι πολύ σημαντική, και έχει ζωτική σημασία το να μη συγχέουμε μία αμφίσημη βεβαίωση με την ορισμένη βεβαίωση ότι το ίδιο πράγμα ισχύει σε *όλες* τις περιπτώσεις.

Η διάκριση ανάμεσα (1) στο να βεβαιώνουμε οποιαδήποτε τιμή μιας προτασιακής συνάρτησης και (2) στο να βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι πάντα αληθής, είναι πανταχού παρούσα στα μαθηματικά, όπως είναι παρούσα και στην διάκριση του Ευκλείδη ανάμεσα σε γενικές και σε μερικές προτάσεις. Σε οποιαδήποτε μαθηματική αλυσίδα διαλογισμών τα αντικείμενα των οποίων ερευνούμε τις ιδιότητες είναι τα ορίσματα για *οποιαδήποτε* τιμή κάποιας προτασιακής συνάρτησης. Ως παράδειγμα, ας πάρουμε τον ακόλουθο ορισμό:

«Λέμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής για $x = a$, αν, για κάθε θετικό αριθμό σ που διαφέρει από το 0, υπάρχει ένας θετικός αριθμός ε που διαφέρει από το 0 και είναι τέτοιος ώστε, για όλες τις τιμές δ που είναι αριθμητικά μικρότερες από το ε, η διαφορά $f(a + \delta) - f(a)$ είναι αριθμητικά μικρότερη από τον σ».

Εδώ η συνάρτηση f είναι *οποιαδήποτε* συνάρτηση για την οποία η παραπάνω δήλωση έχει νόημα· η δήλωση *αφορά* την f, και αλλάζει αν αλλάξει η f. Η δήλωση όμως δεν *αφορά* τους σ, ε ή δ, γιατί αφορά *όλες* τις δυνατές τιμές τους, όχι μία ακαθόριστη τιμή. (Σχετικά με το ε, η δήλωση ότι «υπάρχει ένας θετικός αριθμός ε τέτοιος ώστε κτλ.» είναι η άρνηση του ότι η άρνηση του «κτλ.» είναι αληθής για *όλους* τους θετικούς αριθμούς.) Γι' αυτόν το λόγο, όταν βεβαιώνουμε μία *οποιαδήποτε* τιμή της προτασιακής μεταβλητής, το όρισμα (λ.χ. πιο πάνω το f) λέγεται *πραγματική* μεταβλητή. Ενώ, όταν για μια [προτασιακή] συνάρτηση λέμε ότι είναι *πάντα* αληθής ή πάντα ψευδής, το όρισμα λέγεται *φαινομενική* (apparent) μεταβλητή[10]. Έτσι, στον ορισμό που δόθηκε πιο πάνω, το f είναι πραγματική μεταβλητή και τα σ, ε, δ είναι φαινομενικές μεταβλητές.

Όταν βεβαιώνουμε μία *οποιαδήποτε* τιμή μιας προτασιακής συνάρτησης, θα λέμε απλώς ότι βεβαιώνουμε την *προτασιακή συνάρτηση*. Έτσι, αν διατυπώνουμε το νόμο της ταυτότητας με τη μορφή '$x = x$', βεβαιώνουμε τη συνάρτηση '$x = x$', δηλ. βεβαιώνουμε οποιαδήποτε τιμή αυτής της συνάρτησης. Ομοίως μπορούμε να πούμε ότι αρνούμαστε οποιαδήποτε τιμή της. Μπορούμε να βεβαιώσουμε ότι μία προτασιακή συνάρτηση είναι αληθής μόνο αν η τιμή της είναι αληθής, όποια τιμή κι αν διαλέξουμε· παρόμοια μπορούμε να αρνηθούμε ότι μία προτασιακή συνάρτηση είναι αληθής, αν η τιμή της είναι ψευδής, όποια τιμή της κι αν διαλέξουμε. Επομένως, στη γενική περίπτωση στην οποία μερικές τιμές είναι αληθείς και μερικές είναι ψευδείς, δεν μπορούμε ούτε να βεβαιώσουμε ούτε να αρνηθούμε μία προτασιακή συνάρτηση[11].

Αν φx είναι μία προτασιακή συνάρτηση, με το «$(x) \cdot \varphi x$» θα συμβολίζουμε την πρόταση «η φx είναι πάντα αληθής». Ομοίως το «$(x,y) \cdot \varphi(x,y)$» θα σημαίνει «η $\varphi(x,y)$ είναι πάντα αληθής» κ.ο.κ.ε. Η διάκριση ανάμεσα στο να βεβαιώσουμε όλες τις τιμές και στο να βεβαιώσουμε μία οποιαδήποτε τιμή συμπίπτει με τη διάκριση ανάμεσα στο (1) να βεβαιώσουμε ότι $(x) \cdot \varphi x$ και στο (2) να βεβαιώσουμε ότι φx, όπου ο x είναι ακαθόριστος. Το δεύτερο διαφέρει από το πρώτο κατά το ότι δεν μπορεί να θεωρηθεί καθορισμένη πρόταση.

Νομίζω πως ο Frege[12] είναι ο πρώτος που τόνισε τη διάκριση ανάμεσα στο να βεβαιώνουμε την φx και το να βεβαιώνουμε την $(x) \cdot \varphi x$. Ο λόγος για τον οποίο εισήγαγε τη διάκριση με ρητό τρόπο είναι ο ίδιος για τον οποίο τη βρίσκουμε στη μαθηματική πρακτική: θέλω να πω ότι η λογική παραγωγή μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο με *πραγματικές* μεταβλητές, όχι με φαινομενικές μεταβλητές. Αυτό είναι προφανές προκειμένου για τις αποδείξεις του Ευκλείδη: χρειαζόμαστε (ας πούμε) ένα τρίγωνο *ΑΒΓ* για τη συλλογιστική μας, αν και δεν έχει σημασία ποιο είναι αυτό το τρίγωνο. Το τρίγωνο *ΑΒΓ* είναι μία *πραγματική* μεταβλητή και, μολονότι είναι ένα *οποιοδήποτε* τρίγωνο, ωστόσο παραμένει το *ίδιο* τρίγωνο σε όλη την επιχειρηματολογία. Αλλά στη γενική εκφώνηση το τρίγωνο είναι μία φαινομενική μεταβλητή. Αν μείνουμε στις φαινομενικές μεταβλητές, δεν μπορούμε να επιτελέσουμε καμία λογική παραγωγή, και γι' αυτό σε όλες τις αποδείξεις πρέπει να χρησιμοποιούνται πραγματικές μεταβλητές. Ας υποθέσουμε, για να πάρουμε την πιο απλή περίπτωση, ότι γνωρίζουμε ότι «η φx είναι πάντα αληθής», δηλαδή «$(x) \cdot \varphi x$», και ότι γνωρίζουμε ότι «η φx πάντα συνεπάγεται την ψx», δηλαδή ότι «$(x) \cdot \{\varphi x$ συνεπάγεται $\psi x\}$». Πώς θα συμπεράνουμε ότι «η ψx είναι πάντα αληθής», δηλαδή ότι «$(x) \cdot \psi x$»; Γνωρίζουμε ότι πάντα αληθεύει πως αν η φx είναι αληθής, και αν η φx συνεπάγεται την ψx, τότε η ψx είναι πάντα αληθής. Αλλά δεν έχουμε προκείμενες[13] βάσει των οποίων η φx είναι αληθής και η φx συνεπάγεται την ψx· εκείνο που έχουμε είναι: η φx είναι *πάντα* αληθής και η φx *πάντα* συνεπάγεται την ψx. Για να βγάλουμε το συμπέρασμά μας πρέπει να μεταβούμε από την «η φx είναι πάντα αληθής» στην φx, και από την «η φx πάντα συνεπάγεται την ψx» στην «η φx συνεπάγεται την ψx», όπου το x, μολονότι δεν παύει να είναι οποιοδήποτε όρισμα, πρέπει είναι το ίδιο όρισμα και στις δύο. Κατόπιν, από τις «φx» και «φx συνεπάγεται ψx», συνάγουμε ότι «ψx»· από τις «$(x) \cdot \varphi x$» και «$(x) \cdot \{\varphi x$ συνεπάγεται $\psi x\}$», πρέπει να περάσουμε από τη φαινομενική στην πραγματική μεταβλητή και κατόπιν πάλι στη φαινομενική μεταβλητή. Η διαδικασία αυτή απαιτείται σε κάθε μαθηματικό διαλογισμό ο οποίος προχωρεί από την κατάφαση όλων των τιμών μιας ή περισσότερων προτασιακών συναρτήσεων στην κατάφαση όλων των τιμών μιας άλλης προτασιακής συνάρτησης, όπως, λ.χ., από την «σε όλα τα ισοσκελή τρίγωνα οι γωνίες της βάσης είναι ίσες» στην «όλα τα τρίγωνα που έχουν ίσες τις γωνίες της βάσης είναι ισοσκελή». Ειδικά, η διαδικασία αυτή απαιτείται για την απόδειξη του [συλλογιστικού] σχήματος «Γράμματα» και των άλλων τρόπων του συλλογισμού. Κοντολογίς, *όλη η λογική παραγωγή συντελείται με πραγματικές μεταβλητές* (ή με σταθερές).

Θα μπορούσε ίσως κανείς να υποθέσει ότι θα ήταν δυνατόν να απαλλαγούμε από τις φαινομενικές μεταβλητές και να κάνουμε τη δουλειά μας με το *οποιοδήποτε* ως υποκατάστατο του *όλα*. Αυτό όμως δεν γίνεται. Ας πάρουμε, λ.χ., τον ορισμό που δώσαμε πιο πάνω για τη συνεχή συνάρτηση: σ' αυτόν τον ορισμό τα σ, ε και δ πρέπει να είναι φαινομενικές μεταβλητές. Στους ορισμούς διαρκώς χρειαζόμαστε φαινομενικές μεταβλητές. Ας πάρουμε, λ.χ., τον ακόλουθο: «Ένας ακέραιος λέγεται *πρώτος*, αν δεν έχει ακέραιους παράγοντες εκτός από τον εαυτό του και τον *1*». Σ' αυτόν τον ορισμό υπεισέρχεται αναπόφευκτα μία φαινομενική μεταβλητή της μορφής: «Αν ο v είναι ένας ακέραιος που διαφέρει από τον *1* και τον ακέραιο που δόθηκε, ο v δεν είναι παράγοντας του δεδομένου ακεραίου για όλες τις δυνατές τιμές του v».

Ώστε η διάκριση ανάμεσα στο *όλα* και στο *οποιοδήποτε* είναι αναγκαία για τον παραγωγικό διαλογισμό και παρουσιάζεται παντού στα μαθηματικά· ωστόσο, απ' ό,τι ξέρω, η σημασία της πέρασε απαρατήρητη ώς τη στιγμή που την επισήμανε ο Frege.

Για τους σκοπούς μας, η διάκριση αυτή έχει διαφορετική, και πολύ μεγάλη, χρησιμότητα. Στην περίπτωση μεταβλητών, όπως είναι οι προτάσεις ή οι ιδιότητες, η έκφραση «οποιαδήποτε τιμή» είναι νόμιμη, ενώ η «όλες οι τιμές» δεν είναι νόημη. Λόγου χάρη, μπορούμε να πούμε: «η p είναι ή αληθής ή ψευδής, όπου p είναι οποιαδήποτε πρόταση», αλλά δεν μπορούμε να πούμε «όλες οι προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς». Ο λόγος είναι ότι στην πρώτη καταφάσκουμε μόνο μία ακαθόριστη πρόταση από τις προτάσεις της μορφής «η p είναι αληθής ή ψευδής», ενώ στη δεύτερη καταφάσκουμε (αν κάνουμε κάτι) μία νέα πρόταση, που διαφέρει από όλες τις προτάσεις της μορφής «η p είναι αληθής ή ψευδής». Μπορούμε λοιπόν να δεχθούμε το «οποιαδήποτε τιμή» μιας μεταβλητής στις περιπτώσεις όπου το «όλες οι τιμές» θα οδηγούσε σε πλάνες αυτοαναφοράς· διότι η αποδοχή του «οποιαδήποτε τιμή» δεν δημιουργεί νέες τιμές με τον ίδιο τρόπο. Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε τους θεμελιακούς νόμους της λογικής με αναφορά σε *οποιαδήποτε* πρόταση, ενώ δεν έχει νόημα να πούμε ότι ισχύουν για *όλες* τις προτάσεις. Αυτοί οι νόμοι, σαν να λέγαμε, επιδέχονται μερική διατύπωση, αλλά όχι και γενική διατύπωση. Δεν υπάρχει μία μόνη πρόταση που να *είναι* ο νόμος (ας πούμε) της αντίφασης· υπάρχουν μόνο οι διάφορες συγκεκριμένες περιπτώσεις του. Για οποιαδήποτε πρόταση p μπορούμε να πούμε: «δεν μπορούν να είναι αληθείς και η p και η όχι-p»· αλλά δεν υπάρχει πρόταση όπως η: «Κάθε πρόταση p είναι τέτοια ώστε: δεν μπορούν να αληθεύουν και η p και η όχι-p».

Μία ανάλογη εξήγηση ισχύει για τις ιδιότητες. Μπορούμε να μιλήσουμε για *οποιαδήποτε* ιδιότητα του x, αλλά όχι για *όλες* τις ιδιότητες, γιατί μ' αυτό θα γεννιόταν νέες ιδιότητες. Έτσι μπορούμε να πούμε: «Αν ο ν είναι πεπερασμένος ακέραιος και ο 0 έχει την ιδιότητα φ και ο $\mu + 1$ έχει την ιδιότητα φ κάθε φορά που την έχει ο μ, τότε ο ν έχει την ιδιότητα φ». Εδώ δεν χρειάζεται να πούμε ποια ακριβώς είναι η ιδιότητα φ· το «φ» συμβολίζει το «οποιαδήποτε ιδιότητα». Δεν μπορούμε όμως να πούμε: «Ως πεπερασμένο ακέραιο ορίζουμε τον ακέραιο που έχει *κάθε* ιδιότητα φ, αν την έχει ο 0 και οι διάδοχοι αυτών που την έχουν», γιατί εδώ είναι ουσιαστικό το να θεωρήσουμε *κάθε* ιδιότητα[14], όχι οποιαδήποτε ιδιότητα· και όταν χρησιμοποιούμε έναν τέτοιο ορισμό, δεχόμαστε ότι ενσαρκώνει μία *ιδιότητα* που χαρακτηρίζει τους πεπερασμένους ακεραίους, δηλ. κάνουμε μία παραδοχή του είδους από το οποίο, όπως είδαμε, πηγάζουν οι αντιφάσεις της αυτοαναφοράς.

Στην παραπάνω περίπτωση είναι απαραίτητο να αποφύγουμε την υπόδειξη της κοινής γλώσσας η οποία δεν είναι κατάλληλη για να εκφράσει τη ζητούμενη διάκριση. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί ως εξής: Αν για τον ορισμό των πεπερασμένων ακεραίων πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την επαγωγή, η επαγωγή πρέπει να δηλώνει μία καθορισμένη ιδιότητα των πεπερασμένων ακεραίων, όχι μία αμφίσημη ιδιότητα. Αλλά αν η φ είναι μία πραγματική μεταβλητή, η δήλωση «ο ν έχει την ιδιότητα φ, εφόσον την έχουν ο 0 και οι διάδοχοι αυτών που την έχουν» αποδίδει στον ν μία ιδιότητα που μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλεται η φ, και μία τέτοια ιδιότητα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό του συνόλου των πεπερασμένων ακεραίων. Θέλουμε να πούμε: «η 'ο ν είναι πεπερασμένος ακέραιος' σημαίνει: 'οποιαδήποτε ιδιότητα κι αν είναι η φ, ο ν έχει την ιδιότητα φ, εφόσον την έχουν ο 0 και οι διάδοχοι όσων την έχουν'». Αλλά εδώ το φ έγινε *φαινομενική* μεταβλητή. Για να μείνει πραγματική μεταβλητή θα έπρεπε να λέγαμε: «Όποια κι αν είναι η ιδιότητα φ, η 'ο ν είναι πεπερασμένος ακέραιος' σημαίνει: 'ο ν έχει την ιδιότητα φ, εφόσον την έχουν ο 0 και οι διάδοχοι όσων την έχουν'». Αλλά εδώ το νόημα της «ο ν είναι πεπερασμένος ακέραιος» μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλεται η φ, και επομένως ένας τέτοιος ορισμός είναι αδύνατος. Αυτή η περίπτωση παρουσιάζει ανάγλυφα το ακόλουθο σημαντικό σημείο: 'Η εμβέλεια[15] μιας πραγματικής μεταβλητής δεν μπορεί ποτέ να είναι μικρότερη από ολόκληρη την προτασιακή συνάρτηση στης οποίας την κατάφαση παρουσιάζεται αυτή η μεταβλητή». Με άλλα λόγια, αν η προτασιακή μας συνάρτηση είναι (ας πούμε) «η φx συνεπάγεται την p», η κατάφαση αυτής της συνάρτησης θα σημαίνει 'οποιαδήποτε τιμή της «η φx συνεπάγεται την p» είναι αληθής', όχι «η 'οποιαδήποτε τιμή της φx είναι αληθής' συνεπάγεται την p». Η δεύτερη, στην πραγματικότητα λέει ότι «*όλες* οι τιμές της φx είναι αληθείς» και το x είναι *φαινομενική* μεταβλητή.

III. *Το νόημα και το πεδίο [σημασίας] των γενικευμένων προτάσεων*

Σε τούτο το κεφάλαιο πρέπει να εξετάσουμε πρώτα το νόημα των προτάσεων στις οποίες υπάρχει η λέξη *όλα* και, έπειτα, το είδος τον συλλεγμάτων που επιτρέπουν [να βεβαιώσουμε] προτάσεις οι οποίες αφορούν όλα τα μέλη τους.

Είναι πρόσφορο να ονομάζουμε *γενικευμένες προτάσεις* όχι μόνο αυτές που περιέχουν το *όλα*, αλλά και αυτές που περιέχουν το *μερικά* (ακαθόριστο). Η πρόταση «η φx είναι μερικές φορές αληθής» ισοδυναμεί με την άρνηση της «η όχι-φx είναι πάντα αληθής»· η «μερικά Α δεν είναι Β», ισοδυναμεί με την άρνηση της «όλα τα Α δεν είναι Β», δηλαδή της «κανένα Α δεν είναι Β». Δεν είναι απαραίτητο να εξετάσουμε αν είναι δυνατόν να βρούμε ερμηνείες που να διαφοροποιούν την «η φx είναι καμιά φορά αληθής» από την άρνηση της «η όχι-φx είναι πάντα αληθής». Για τους σκοπούς μας μπορούμε να *ορίσουμε* την «η φx είναι καμία φορά αληθής» ως άρνηση της «η όχι-φx είναι πάντα αληθής». Πάντως, και τα δύο είδη πρότασης απαιτούν τον ίδιο τύπο ερμηνείας και υπόκεινται στους ίδιους περιορισμούς. Και στα δύο υπάρχει μία φαινομενική μεταβλητή· και η παρουσία μιας φαινομενικής μεταβλητής συνιστά αυτό που εννοώ με την έκφραση «γενικευμένη πρόταση». (Ας σημειωθεί ότι η *πραγματική* μεταβλητή δεν μπορεί να υπάρχει σε προτάσεις, γιατί αυτό που μπορεί να περιέχει πραγματικές μεταβλητές είναι η προτασιακή συνάρτηση, όχι η πρόταση.)

Το πρώτο ερώτημα που πρέπει να θέσουμε εδώ είναι: Πώς πρέπει να ερμηνεύσουμε τη λέξη *όλα* σε προτάσεις όπως η «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί»; Εκ πρώτης όψεως μπορεί κανείς να νομίσει ότι δεν θα ήταν δυνατόν να υπάρξει δυσκολία, ότι η ιδέα «όλοι οι άνθρωποι» είναι εντελώς σαφής και ότι για όλους τους ανθρώπους λέμε ότι είναι θνητοί. Αλλά η άποψη αυτή γεννά πολλές αντιρρήσεις.

(1) Αν η άποψη αυτή ήταν σωστή, η «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» δεν θα μπορούσε να είναι αληθής, αν δεν υπήρχαν άνθρωποι. Ωστόσο, όπως υποστήριξε ο κ. Bradley[16], μπορεί να είναι απόλυτα αληθές ότι «οι παραβάτες θα διωχθούν ποινικά», ακόμα κι αν κανείς δεν κάνει παράβαση· και, επομένως, συνεχίζει το επιχείρημά του, οδηγούμαστε στην ερμηνεία παρόμοιων προτάσεων ως υποθετικών προτάσεων που σημαίνουν «αν κάποιος κάνει παράβαση, θα διωχθεί νομικά»· δηλ. ως «αν ο *x* κάνει παράβαση, ο *x* θα διωχθεί», όπου το πεδίο των τιμών τις οποίες μπορεί να πάρει ο *x*, όποιο κι αν είναι, ασφαλώς δεν περιορίζεται σε όσους είναι πραγματικοί παραβάτες. Ομοίως, η «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» θα σημαίνει «αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός, όπου το *x* μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα ορισμένο πεδίο». Ποιο είναι αυτό το πεδίο, δεν έχει ακόμα καθοριστεί· οπωσδήποτε όμως είναι ευρύτερο από «άνθρωποι», γιατί ασφαλώς η υποθετική πρόταση είναι συχνά αληθής, όταν η *x* δεν είναι άνθρωπος.

(2) Η φράση «όλοι οι άνθρωποι» είναι αναφορική φράση και, όπως φαίνεται για λόγους που εξέθεσα αλλού[17], οι αναφορικές φράσεις ποτέ δεν έχουν νόημα όταν είναι απομονωμένες, αλλά μόνο εμφανίζονται ως συνθετικά στοιχεία στη ρηματική διατύπωση προτάσεων οι οποίες δεν περιέχουν συνθετικό στοιχείο που να αντιστοιχεί στις εν λόγω αναφορικές φράσεις. Αυτό σημαίνει ότι εκείνο που ορίζει την αναφορική φράση είναι οι προτάσεις που την περιέχουν στη ρηματική τους έκφραση. Επομένως, είναι αδύνατον οι προτάσεις αυτές να αποκτούν το νόημά τους χάρη στις αναφορικές φράσεις· πρέπει να βρούμε μια ανεξάρτητη ερμηνεία για τις προτάσεις που περιέχουν τέτοιες φράσεις για να εξηγήσουμε τι σημαίνουν τέτοιες προτάσεις. Επομένως, δεν μπορούμε να θεωρούμε την «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» ως δήλωση που αφορά το «όλοι οι άνθρωποι».

(3) Ακόμη κι αν υπήρχε ένα αντικείμενο όπως το «όλοι οι άνθρωποι», είναι φανερό πως δεν αποδίδουμε τη θνητότητα σε αυτό το αντικείμενο, όταν λέμε ότι «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί». Αν αποδίδαμε τη θνητότητα σε αυτό το αντικείμενο, θα έπρεπε να λέγαμε «*όλοι οι άνθρωποι* είναι θνητός». Ώστε το να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο, όπως το «όλοι οι άνθρωποι», δεν μας βοηθά να ερμηνεύσουμε την «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί».

(4) Είναι προφανές ότι αν συναντήσουμε κάτι που μπορεί να είναι άνθρωπος ή και άγγελος μεταμφιεσμένος, το να βεβαιώσουμε ότι «αν αυτό είναι άνθρωπος, τότε είναι θνητός», είναι κάτι που εμπίπτει στο βεληνεκές της «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί». Πάλι, λοιπόν, όπως και στην περίπτωση του παραβάτη, φαίνεται σαφές ότι στην πραγματικότητα λέμε ότι «αν κάτι είναι άνθρωπος, τότε είναι θνητό», και ότι το ερώτημα αν τούτο ή εκείνο είναι άνθρωπος δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο εφαρμογής της βεβαίωσής μας, όπως θα συνέβαινε αν το *όλοι* πραγματικά αναφερόταν στο «όλοι οι άνθρωποι».

(5) Έτσι καταλήγουμε στην άποψη ότι εκείνο που εννοούμε με την «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» μπορεί να διατυπωθεί πιο καθαρά με μια μορφή περίπου όπως «είναι πάντα αληθές ότι αν ο *x* είναι άνθρωπος, τότε ο *x* είναι θνητός». Εδώ πρέπει να εξετάσουμε το πεδίο εφαρμογής της λέξης *πάντα*.

(6) Είναι προφανές ότι το *πάντα* περιλαμβάνει μερικές περιπτώσεις στις οποίες το *x* δεν είναι άνθρωπος, όπως είδαμε στην περίπτωση του μεταμφιεσμένου αγγέλου. Αν το *x* περιοριζόταν στην περίπτωση όπου το *x* είναι άνθρωπος, θα μπορούσαμε να συναγάγουμε ότι το *x* είναι θνητό, αφού αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός. Επομένως, με το ίδιο νόημα του *πάντα* θα βρίσκαμε ότι, αν δεν αλλάξουμε το νόημα του *πάντα*, θα βρίσκαμε ότι «είναι πάντα αληθές ότι ο *x* είναι θνητός». Αλλά είναι ξεκάθαρο ότι, αν δεν αλλάξουμε το νόημα του *πάντα*, η νέα αυτή πρόταση είναι ψευδής, ενώ η άλλη ήταν αληθής.

(7) Θα μπορούσε κανείς να ελπίσει ότι το «πάντα» θα σήμαινε «για όλες τις τιμές του *x*». Αλλά αν το «για όλες τις τιμές του *x*» ήταν θεμιτό, θα είχε ως μέρη του τα «όλες τις προτάσεις» και «όλες οι συναρτήσεις» και παρόμοιες αθέμιτες ολότητες. Επομένως, οι τιμές του *x* πρέπει να περιοριστούν με κάποιο τρόπο μέσα σε μία θεμιτή ολότητα. Αυτό φαίνεται να μας οδηγεί στην παραδοσιακή άποψη ενός «σύμπαντος του λόγου» (universe of discourse) στο οποίο πρέπει να υποτεθεί ότι ανήκει το *x*.

(8) Ωστόσο είναι ουσιαστικό να διαθέτουμε ένα νόημα του *πάντα* που δεν είναι ανάγκη να εκφράζεται με μία περιοριστική υπόθεση για το *x*. Διότι, ας υποθέσουμε ότι «πάντα» σημαίνει «όταν το *x* ανήκει στο σύνολο *i*». Τότε η «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» γίνεται: «όταν ο *x* ανήκει στο σύνολο *i*, αν ο *x* είναι άνθρωπος, τότε ο *x* είναι θνητός», δηλαδή «είναι πάντα αληθές ότι, αν ο *x* ανήκει στο σύνολο *i*, τότε αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός». Αλλά τι θα σημαίνει το νέο *πάντα*; Δεν φαίνεται να είναι περισσότερο αιτιολογημένος ο περιορισμός του *x* αυτής της νέας πρότασης στο σύνολο *i*, από ό,τι ο περιορισμός του *x* στο σύνολο *άνθρωπος*. Έτσι οδηγούμαστε σε ένα νέο πλατύτερο σύμπαν, και πάει λέγοντας *επ᾽ άπειρον*, εκτός αν μπορούμε να ανακαλύψουμε κάποιο φυσικό περιορισμό των δυνατών τιμών της συνάρτησης «αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός»

(δηλ. κάποιο περιορισμό που να δίνεται μαζί με τη συνάρτηση) και ο οποίος να μη χρειάζεται να επιβληθεί απέξω.

(9) Είναι προφανές ότι, αφού όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί, δεν μπορεί να υπάρχει *ψευδής* πρόταση που να είναι τιμή της συνάρτησης «αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός». Διότι, αν αυτή είναι πρόταση, η υπόθεση «ο *x* είναι άνθρωπος» πρέπει να είναι πρόταση, και το ίδιο πρέπει να είναι και το συμπέρασμα «ο *x* είναι θνητός». Αλλά αν η υπόθεση είναι ψευδής, ο υποθετικός λόγος είναι αληθής, και αν η υπόθεση είναι αληθής, ο υποθετικός λόγος είναι αληθής. Επομένως, δεν μπορούν να υπάρξουν ψευδείς προτάσεις της μορφής «αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός».

(10) Επομένως, αν πρέπει να αποκλεισθούν μερικές τιμές του *x*, αυτές δεν μπορεί παρά να είναι τιμές για τις οποίες δεν υπάρχει πρόταση της μορφής «αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός», δηλ. για τις οποίες αυτή η φράση δεν έχει νόημα. Αφού, όπως είδαμε στο (7), πρέπει να αποκλεισθούν μερικές τιμές του *x*, η συνάρτηση «αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός» πρέπει να έχει ένα *πεδίο σημασίας*[18] [range of significance] που, μολονότι ξεπερνά τις τιμές για τις οποίες [ο *x*] είναι άνθρωπος, δεν συμπίπτει με όλες τις τιμές του *x*, τις οποίες μπορούμε να φανταστούμε. Επομένως, ο περιορισμός του *x* είναι περιορισμός του πεδίου σημασίας της συνάρτησης «αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός».

(11) Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» σημαίνει «αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός πάντα», όπου το *πάντα* σημαίνει για ολες τις τιμές της συνάρτησης 'αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός'. Αυτός είναι ένας *εσωτερικός* περιορισμός του *x*, που δίδεται από τη φύση της συνάρτησης· και είναι περιορισμός που δεν χρειάζεται να διατυπωθεί ρητά, αφού είναι αδύνατον η αλήθεια μιας συνάρτησης να είναι γενικότερη απ' ό,τι [μπορεί να είναι] για όλες τις τιμές της. Επιπλέον, αν το πεδίο σημασίας της συνάρτησης είναι *i*, η συνάρτηση «αν ο *x* είναι ένα *i*, τότε, αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός», έχει το ίδιο πεδίο σημασίας, αφού δεν μπορεί να έχει νόημα παρά μόνο αν έχει νόημα το συστατικό της «αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός». Εδώ, όμως, πάλι το πεδίο σημασίας είναι συγκαλυμμένο, όπως ήταν στην «αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός»· ώστε δεν μπορούμε να προδιορίσουμε τα πεδία σημασίας, αφού η προσπάθεια να τα προσδιορίσουμε γεννά μία νέα πρόταση η οποία υποκρύπτει το ίδιο πεδίο σημασίας.

Γενικά λοιπόν: «*(x)φx*» θα σημαίνει «*φx* πάντα». Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί, αν και με λιγότερη ακρίβεια, ως «η *φx* είναι πάντα αληθής» ή, πιο αναλυτικά: «Όλες οι προτάσεις της μορφής *φx* είναι αληθείς»[19]. Έτσι, θεμελιακό *όλα* είναι το «όλες οι τιμές μιας προτασιακής συνάρτησης», και όλα τα άλλα *όλα* είναι παράγωγα του θεμελιακού. Κάθε προτασιακή συνάρτηση έχει ένα ορισμένο *πεδίο σημασίας*, μέσα στο οποίο βρίσκονται τα ορίσματα για τα οποία η συνάρτηση έχει τιμές. Μέσα σ' αυτό το πεδίο ορισμάτων η συνάρτηση είναι αληθής ή ψευδής· έξω από αυτό, είναι α-νοησία.

Μπορούμε να ανακεφαλαιώσουμε:

Η δυσκολία που συναντούν οι προσπάθειες περιορισμού της μεταβλητής συνίσταται στο ότι οι περιορισμοί εκφράζονται με φυσικό τρόπο ως υποθέσεις ότι η μεταβλητή είναι αυτού ή εκείνου του είδους, και ότι όταν τους εκφράσουμε έτσι, προκύπτει μια υποθετική πρόταση που δεν υπόκειται στον υπ' όψιν περιορισμό. Για παράδειγμα, ας προσπαθήσουμε να περιορίσουμε τη μεταβλητή στο *άνθρωπος* και να βεβαιώσουμε ότι, με αυτόν τον περιορισμό, η «ο *x* είναι θνητός» είναι πάντα αληθής. Τότε, εκείνο που αληθεύει πάντα είναι ότι αν ο *x* είναι άνθρωπος, ο *x* είναι θνητός, και αυτός ο υποθετικός λόγος είναι πάντα αληθής, ακόμα κι αν ο *x* δεν είναι άνθρωπος. Έτσι, μια μεταβλητή δεν μπορεί ποτέ να περιοριστεί μέσα σε ένα ορισμένο πεδίο, αν η προτασιακή συνάρτηση στην οποία εμφανίζεται διατηρεί το νόημά της, όταν η μεταβλητή βρίσκεται έξω από το πεδίο. Αλλά αν η συνάρτηση παύσει να έχει νόημα, όταν η μεταβλητή βγει από ένα ορισμένο πεδίο, τότε η μεταβλητή είναι ipso facto περιορισμένη σ' αυτό το πεδίο και ο περιορισμός δεν χρειάζεται να διατυπωθεί ρητά. Δεν πρέπει να ξεχνάμε αυτή την αρχή, όταν θα αναπτύσσουμε τους λογικούς τύπους, όπως θα κάνουμε σύντομα.

Τώρα αρχίζει να διαφαίνεται πώς συμβαίνει η φράση «όλα τα έτσι-και-έτσι» να είναι άλλοτε θεμιτή και άλλοτε αθέμιτη. Ας υποθέσουμε πως λέμε «όλοι οι όροι που έχουν την ιδιότητα *φ* έχουν την ιδιότητα *ψ*». Σύμφωνα με την ερμηνεία που δόθηκε πιο πάνω, αυτό σημαίνει «η *φx* πάντα συνεπάγεται την *ψx*». Υπό τον όρο ότι τα πεδία σημασίας της *φx* και της *ψx* συμπίπτουν, αυτή η πρόταση έχει νόημα. Επομένως, αν δοθεί μία ορισμένη συνάρτηση *φx*, υπάρχουν προτάσεις σχετικές με «όλους τους όρους που ικανοποιούν την *φx*». Αλλά καμιά φορά συμβαίνει (όπως θα δούμε καλύτερα πιο κάτω) αυτό που ρηματικά παρουσιάζεται ως μία συνάρτηση να είναι, στην πραγματικότητα, πολλές ανάλογες συναρτήσεις, με διαφορετικά πεδία σημασίας. Αυτό ισχύει, λ.χ., για την «η *p* είναι αληθής», η οποία, όπως θα φανεί, στην πραγματικότητα δεν είναι μία συνάρτηση της *p*, αλλά διαφορετικές συναρτήσεις, ανάλογα με το είδος της πρότασης στο οποίο ανήκει η *p*. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η *φράση* που εκφράζει την αμφίσημη συνάρτηση μπορεί, εξαιτίας της αμφισημίας, να έχει νόημα για ένα σύνολο τιμών του ορίσματος που είναι ευρύτερο από το πεδίο σημασίας καθεμιάς από τις συναρτήσεις. Σ' αυτή την περίπτωση, το *όλα* δεν είναι θεμιτό. Έτσι, αν προσπαθήσουμε να πούμε «όλες οι αληθείς προτάσεις έχουν την ιδιότητα *φ*», δηλαδή «η 'η *φ* είναι αληθής' πάντα συνεπάγεται στην *φp*», τα δυνατά ορίσματα της «η *p* είναι αληθής» είναι κατ' ανάγκην περισσότερα από τα δυνατά ορίσματα της *φ* και, επομένως, η γενική δήλωση που αποπειραθήκαμε να κάνουμε είναι αδύνατη. Γι' αυτόν το λόγο δεν μπορούμε να κάνουμε γνήσιες γενικές δηλώσεις σχετικές με όλες τις αληθείς προτάσεις. Ωστόσο, μπορεί να συμβεί η υποθετική συνάρτηση φ να είναι πραγματικά αμφίσημη, όπως η «η *p* είναι αληθής», και αν συμβεί το είδος της αμφισημίας της να συμπίπτει με το είδος της αμφισημίας της «η *p* είναι αληθής», η πρόταση «'η *p* είναι αληθής' συνεπάγεται την φp» επιδέχεται πάντα ερμηνεία. Αυτό θα συμβεί, λ.χ., αν φp είναι η «η όχι-*p* είναι ψευδής». Έτσι μοιάζει σαν να είχαμε, σ' αυτές τις περιπτώσεις, μία γενική πρόταση που αφορά *όλες* τις προτάσεις· αυτό όμως οφείλεται σε μία συστηματική αμφισημία σχετική με λέξεις όπως *αληθής* και *ψευδής*. (Αυτή η συστηματική αμφισημία είναι αποτέλεσμα της ιεραρχίας των προτάσεων, την οποία θα εξηγήσουμε αργότερα.) Μπορούμε, σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, να κάνουμε τη δήλωσή μας για *οποιαδήποτε* πρόταση, αφού το νόημα των αμφίσημων όρων προσαρμόζεται σε οποιαδήποτε πρόταση. Αλλά αν μετατρέψουμε την πρότασή μας σε φαινομενική μεταβλητή και πούμε κάτι για *όλα*, πρέπει να υποθέσουμε πως οι αμφίσημοι όροι έχουν το ένα ή το άλλο σταθερό νόημα, μολονότι μπορεί να είναι εντελώς αδιάφορο ποιο από τα δυνατά νοήματά τους έχουν αυτοί οι όροι. Αυτό εξηγεί πώς συμβαίνει το *όλα* να υπόκειται σε περιορισμούς που αποκλείουν την «όλες οι προτάσεις», ενώ *φαίνεται* να υπάρχουν αληθείς δηλώσεις πάνω σε «όλες τις προτάσεις». Αυτά τα δύο σημεία θα γίνουν σαφέστερα, όταν εξετάσουμε τη θεωρία των τύπων.

Συχνά υποστηρίχθηκε[20] ότι για να είναι θεμιτό να μιλάμε για *όλα* ενός συλλέγματος, πρέπει το σύλλεγμα να είναι πεπερασμένο. Έτσι η «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» είναι θεμιτή, γιατί οι άνθρωποι αποτελούν πεπερασμένο σύνολο. Αλλά δεν είναι αυτός ο πραγματικός λόγος για τον οποίο μπορούμε να μιλάμε για «όλους τους ανθρώπους». Ουσιαστικό, όπως δείχνει η συζήτηση που προηγήθηκε, δεν είναι το πεπερασμένο, αλλά αυτό που μπορεί να ονομασθεί *λογική ομοιογένεια*. Αυτή την ιδιότητα θα έχει κάθε σύλλεγμα του οποίου όλα τα στοιχεία περιλαμβάνονται στο πεδίο σημασίας μιας συνάρτησης. Θα ήταν πάντα φανερό με την πρώτη ματιά, αν το ένα σύλλεγμα έχει αυτή την ιδιότητα ή όχι, αν οι κοινοί λογικοί όροι, όπως *αληθής* και *ψευδής*, δεν έκρυβαν μέσα τους την αμφισημία η οποία κάνει να φαίνεται μία και μόνη συνάρτηση εκείνο το οποίο, στην πραγματικότητα, είναι συσσώρευμα πολλών συναρτήσεων με διαφορετικά πεδία σημασίας.

Τα συμπεράσματα αυτού του κεφαλαίου είναι: Κάθε πρόταση που περιέχει το *όλα* βεβαιώνει ότι κάποια προτασιακή συνάρτηση είναι πάντα αληθής· και αυτό σημαίνει ότι όλες οι τιμές αυτής της συνάρτησης είναι αληθείς, όχι ότι η συνάρτηση είναι αληθής για όλα τα ορίσματα, αφού υπάρχουν ορίσματα για τα οποία οποιαδήποτε δεδομένη συνάρτηση στερείται νοήματος, δηλ. δεν έχει τιμή. Επομένως, μπορούμε να μιλάμε για *όλα* ενός συλλέγματος τότε και μόνο τότε, όταν το σύλλεγμα αποτελεί

μέρος ή συμπίπτει με το *πεδίο σημασίας* κάποιας προτασιακής συνάρτησης· το πεδίο σημασίας ορίζεται ως το σύλλεγμα των ορισμάτων για τα οποία η εν λόγω συνάρτηση έχει νόημα, δηλ. έχει τιμή.

IV. *Η ιεραρχία των τύπων*

Ως *τύπο* ορίζουμε το πεδίο σημασίας μιας προτασιακής συνάρτησης, δηλαδή το σύλλεγμα των ορισμάτων για τα οποία η συνάρτηση έχει τιμές. Κάθε φορά που μια φαινομενική μεταβλητή παρουσιάζεται σε μία πρόταση, το πεδίο μεταβολής της φαινομενικής μεταβλητής είναι ένας τύπος, και αυτός προσδιορίζεται από τη συνάρτηση για «όλες τις τιμές» της οποίας πρόκειται. Η διαίρεση των αντικειμένων σε τύπους είναι αναγκαία για να αποφευχθούν οι αντιφάσεις της αυτοαναφοράς. Αυτές οι αντιφάσεις πρέπει, όπως είδαμε, να αποφευχθούν με τη βοήθεια αυτής που μπορεί να ονομασθεί «αρχή του φαύλου κύκλου»· δηλ. «καμία ολότητα δεν μπορεί να περιλαμβάνει μέλη που ορίζονται βάση του εαυτού της». Στην τεχνική γλώσσα μας, αυτή η αρχή γίνεται: «Ό,τι περιέχει μία φαινομενική μεταβλητή δεν μπορεί να είναι δυνατή τιμή αυτής της μεταβλητής». Επομένως, οτιδήποτε περιέχει μία φαινομενική μεταβλητή, πρέπει να έχει τύπο ο οποίος να διαφέρει από τις δυνατές τιμές αυτής της μεταβλητής – θα λέμε ότι είναι *ανώτερου* τύπου. Ώστε εκείνο που καθορίζει τον τύπο μιας έκφρασης είναι οι φαινομενικές μεταβλητές που περιέχει. Στα επόμενα, αυτή θα είναι η καθοδηγητική αρχή μας.

Οι προτάσεις που περιέχουν φαινομενικές μεταβλητές γεννιούνται από προτάσεις που δεν περιέχουν τέτοιες μεταβλητές με διαδικασίες, μία από τις οποίες είναι πάντα η διαδικασία της *γενίκευσης*, δηλ. η αντικατάσταση ενός από τους όρους της πρότασης με μία μεταβλητή, και η βεβαίωση της συνάρτησης που προέκυψε για όλες τις δυνατές τιμές της μεταβλητής. Γι' αυτό και μία πρόταση που περιέχει φαινομενικές μεταβλητές λέγεται *γενικευμένη* πρόταση. *Στοιχειώδη* πρόταση θα ονομάζουμε την πρόταση που δεν περιέχει φαινομενικές μεταβλητές. Είναι σαφές ότι μία πρόταση που περιέχει μία φαινομενική μεταβλητή προϋποθέτει άλλες προτάσεις από τις οποίες μπορεί να παραχθεί με γενίκευση· επομένως, όλες οι γενικευμένες προτάσεις προϋποθέτουν στοιχειώδεις προτάσεις. Στη στοιχειώδη πρόταση μπορούμε να διακρίνουμε έναν ή περισσότερους *όρους* από μία ή περισσότερες *έννοιες*. *Όρος* είναι καθετί που μπορεί να θεωρηθεί ως *υποκείμενο* της πρότασης, ενώ έννοιες είναι τα κατηγορήματα ή οι σχέσεις που βεβαιώνουμε γι' αυτούς τους όρους[21]. Θα ονομάσουμε *άτομα* τους όρους των στοιχειωδών προτάσεων· αυτά συνιστούν τον πρώτο ή κατώτατο τύπο.

Στην πράξη δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε ποια αντικείμενα ανήκουν στον κατώτατο τύπο, ούτε αν ο κατώτατος τύπος μεταβλητής που παρουσιάζεται σε ένα δεδομένο πλαίσιο συζήτησης είναι τύπος ατόμων ή άλλος. Γιατί στην πράξη σημασία έχουν μόνο οι *σχετικοί* τύποι των μεταβλητών· έτσι ο κατώτατος τύπος που παρουσιάζεται σε ένα δεδομένο πλαίσιο μπορεί να ονομασθεί τύπος των ατόμων, στο βαθμό που πρόκειται γι' αυτό το πλαίσιο. Επομένως, η περιγραφή των ατόμων που δόθηκε πιο πάνω δεν είναι ουσιώδης για την αλήθεια όσων ακολουθούν· ουσιώδης είναι μόνο ο τρόπος με τον οποίο οι άλλοι τύποι γεννιούνται από τα άτομα ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο σχηματίσθηκε ο τύπος των ατόμων.

Όταν εφαρμόσουμε τη διαδικασία της γενίκευσης στα άτομα που εμφανίζονται σε στοιχειώδεις προτάσεις, εξάγουμε νέες προτάσεις. Για να είναι θεμιτή αυτή η διαδικασία, το μόνο που απαιτείται είναι κανένα άτομο να μην είναι πρόταση. Αυτό πρέπει να μας το εξασφαλίσει το νόημα που δίνουμε στη λέξη *άτομο*. Μπορούμε να ορίσουμε τη λέξη *άτομο* ως κάτι που δεν έχει πολυπλοκότητα· είναι προφανές ότι το άτομο δεν είναι πρόταση, αφού οι προτάσεις είναι ουσιαστικά σύνθετες. Επομένως, όταν εφαρμόσουμε τη διαδικασία της γενίκευσης στα άτομα, δεν κινδυνεύουμε να υποπέσουμε στην πλάνη της αυτοαναφοράς.

Θα ονομάσουμε *πρωτοβάθμιες προτάσεις* τις στοιχειώδεις προτάσεις και τις προτάσεις στις οποίες οι μόνες φαινομενικές μεταβλητές είναι τα άτομα. Αυτές αποτελούν τον δεύτερο λογικό τύπο.

Έτσι έχουμε μία νέα ολότητα, την ολότητα των *πρωτοβάθμιων προτάσεων*. Και μπορούμε να σχηματίσουμε νέες προτάσεις στις οποίες φαινομενικές μεταβλητές θα είναι οι πρωτοβάθμιες προτάσεις. Αυτές θα τις ονομάσουμε *δευτεροβάθμιες προτάσεις*· αποτελούν τον τρίτο λογικό τύπο. Έτσι, λ.χ., αν ο Επιμενίδης βεβαιώνει ότι «όλες οι πρωτοβάθμιες προτάσεις που καταφάσκω είναι ψευδείς», βεβαιώνει μια δευτεροβάθμια πρόταση· και μπορεί να τη βεβαιώνει αληθώς, χωρίς να βεβαιώνει αληθώς καμία πρωτοβάθμια πρόταση. Δεν προκύπτει λοιπόν καμία αντίφαση.

Μπορούμε να συνεχίσουμε απεριόριστα τη διαδικασία που μόλις περιγράψαμε. Ο νυοστός-πρώτος λογικός τύπος θα συνίσταται από προτάσεις βαθμού ν, που θα έχουν ως φαινομενικές μεταβλητές προτάσεις βαθμού το πολύ $\nu - 1$. Οι τύποι που πορίζόμαστε μ' αυτόν τον τρόπο αποκλείονται αμοιβαία και, επομένως, είναι αδύνατη κάθε αντίφαση αυτοαναφοράς, εφόσον δεν ξεχνάμε ότι μία φαινομενική μεταβλητή πρέπει να περιορίζεται σε ένα μόνο τύπο.

Στην πράξη, μια ιεραρχία *συναρτήσεων* είναι πιο πρόσφορη από μια ιεραρχία προτάσεων. Οι συναρτήσεις διαφόρων βαθμών μπορούν να παραχθούν από προτάσεις διαφόρων βαθμών με τη μέθοδο της *αντικατάστασης*. Αν p είναι μία πρόταση και a είναι ένα συστατικό στοιχείο της, με $p/a;x$ συμ-

βολίζουμε την πρόταση που προκύπτει όταν το a αντικατασταθεί με το x κάθε φορά που παρουσιάζεται στην p. Τότε, το p/a, που θα το ονομάσουμε μήτρα, μπορεί να παίξει το ρόλο συνάρτησης· η τιμή του για το όρισμα x είναι $p/a;x$ και η τιμή του για το όρισμα a είναι p. Ομοίως, αν το '$p/(a,b);(x,y)$' *συμβολίζει το αποτέλεσμα της αντικατάστασης του* a με το x και έπειτα του b με το y, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διπλή μήτρα $p/(a,b)$ για να παραστήσουμε μία διπλή συνάρτηση. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αποφύγουμε φαινομενικές μεταβλητές που δεν είναι άτομα ή προτάσεις διαφόρων βαθμών. *Βαθμό* μιας μήτρας θα ονομάσουμε το βαθμό της πρότασης στην οποία εκτελείται η αντικατάσταση· την πρόταση αυτή θα ονομάσουμε *πρωτότυπο*. Ο βαθμός μιας μήτρας δεν καθορίζει τον τύπο της: πρώτον, γιατί δεν καθορίζει τον αριθμό των ορισμάτων τα οποία πρέπει να αντικατασταθούν από άλλα ορίσματα (δηλ. το αν η μήτρα είναι της μορφής p/a ή $p/(a,b)$ ή $p/(a,b,c)$ κτλ.)· δεύτερον, γιατί αν ο βαθμός του πρωτοτύπου είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα, τα ορίσματα μπορεί να είναι ή προτάσεις ή άτομα. Αλλά είναι σαφές ότι ο τύπος της μήτρας μπορεί πάντα να ορισθεί με τη βοήθεια της ιεραρχίας των προτάσεων.

Μολονότι είναι *δυνατόν* να αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις με τις μήτρες, και μολονότι αυτή η διαδικασία απλουστεύει κάπως την εξήγηση των τύπων, δεν είναι τεχνικά πρόσφορη. Τεχνικά, συμφέρει να αντικαταστήσουμε το πρωτότυπο p με το φa και το $p/a;x$ με το φx· έτσι, εκεί που θα εμφανίζονταν τα p και a, αν χρησιμοποιούσαμε μήτρες, τώρα ως φαινομενική μεταβλητή μας έχουμε το φ. Για να είναι θεμιτή η φ ως φαινομενική μεταβλητή, είναι αναγκαίο οι τιμές της να περιοριστούν σε προτάσεις ενός και μόνο τύπου. Γι' αυτό και ακολουθούμε την εξής πορεία:

Πρωτοβάθμια ονομάζουμε μία συνάρτηση όταν το όρισμά της είναι ένα άτομο και η τιμή της είναι πάντοτε μια πρωτοβάθμια πρόταση. Δευτεροβάθμια ονομάζουμε μία συνάρτηση στην οποία υπεισέρχεται ως φαινομενική μεταβλητή μία πρωτοβάθμια συνάρτηση ή μία πρόταση και ούτω καθεξής. Μία συνάρτηση μιας μεταβλητής, της οποίας ο βαθμός διαδέχεται το βαθμό του ορίσματός της, θα λέγεται *κατηγορηματική* συνάρτηση· θα δώσουμε το ίδιο όνομα και σε μία συνάρτηση περισσότερων μεταβλητών, αν ανάμεσα στις μεταβλητές της υπάρχει μεταβλητή ως προς την οποία η συνάρτηση γίνεται κατηγορηματική, όταν δώσουμε τιμές σε όλες τις άλλες μεταβλητές. Ώστε ο τύπος μιας συνάρτησης καθορίζεται από τον τύπο των τιμών της και τον αριθμό και τον τύπο των ορισμάτων της.

Μπορούμε να επεξηγήσουμε την ιεραρχία των συναρτήσεων με τον ακόλουθο τρόπο. Μία πρωτοβάθμια συνάρτηση ενός ατόμου x θα συμβολίζεται με το $\varphi!x$ (και τα γράμματα ψ, χ, θ, f, g, F, G θα χρησιμοποιούνται για τις συναρτήσεις). Καμία πρωτοβάθμια συνάρτηση δεν περιέχει μια συνάρτηση ως φαινομενική μεταβλητή· άρα τέτοιες συναρτήσεις αποτελούν μία ολότητα που είναι καλά ορισμένη, και το φ στο $\varphi!x$ μπορεί να μετατραπεί σε φαινομενική μεταβλητή. Κάθε πρόταση στην οποία το φ παρουσιάζεται ως φαινομενική μεταβλητή με τύπο ανώτερο από τον τύπο του φ, είναι δευτεροβάθμια πρόταση. Αν μια τέτοια συνάρτηση περιέχει ένα άτομο x αλλά δεν περιέχει μια πρωτοβάθμια συνάρτηση φ, είναι κατηγορηματική συνάρτηση του φ, και γράφεται $f!(\psi!\hat{z})$. Τότε η f είναι μία *δευτεροβάθμια κατηγορηματική συνάρτηση*· οι δυνατές τιμές της f σχηματίζουν πάλι μία καλά ορισμένη ολότητα και μπορούμε να μετατρέψουμε την f σε φαινομενική μεταβλητή. Μπορούμε, λοιπόν, να ορίσουμε *τριτοβάθμιες κατηγορηματικές συναρτήσεις*· αυτές θα είναι συναρτήσεις που έχουν ως τιμές τριτοβάθμιες προτάσεις και ως ορίσματα δευτεροβάθμιες κατηγορηματικές συναρτήσεις. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να προχωρήσουμε απεριόριστα. Μία ακριβώς παρόμοια μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών.

Θα υιοθετήσουμε τις ακόλουθες συμβάσεις. Με πεζά λατινικά γράμματα θα συμβολίζουμε τις μεταβλητές του κατώτατου τύπου που παρουσιάζονται σε ένα χωρίο (εκτός από τα f και g, που φυλάξαμε για συναρτήσεις)· με το $\varphi!x$ θα συμβολίζουμε μία κατηγορηματική συνάρτηση ενός ορίσματος (όπου το x μπορεί να είναι οποιουδήποτε τύπου και το φ μπορεί να αντικατασταθεί από τα ψ, χ, θ, f, g, F ή G)· ομοίως με το $\varphi!(x,y)$ θα συμβολίζουμε μία κατηγορηματική συνάρτηση δύο ορισμάτων x και y· με το φx θα συμβολίζουμε μία γενική συνάρτηση των x και y. Στην φx, η φ δεν μπορεί να μετατραπεί σε φαινομενική μεταβλητή, αφού ο τύπος της είναι απροσδιόριστος· αλλά στην $\varphi!x$, όπου η φ είναι μία *κατηγορηματική* συνάρτηση της οποίας το όρισμα είναι δεδομένου τύπου, η φ *μπορεί* να μετατραπεί σε φαινομενική μεταβλητή.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι αφού υπάρχουν διάφοροι τύποι προτάσεων και συναρτήσεων, και αφού η γενίκευση μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο μέσα στα όρια ενός και μόνο τύπου, όλες οι φράσεις που περιέχουν τις λέξεις «όλες οι προτάσεις» ή «όλες οι συναρτήσεις» εκ πρώτης όψεως στερούνται νοήματος, αν και σε ορισμένες περιπτώσεις επιδέχονται μια αναντίρρητη ερμηνεία. Οι αντιφάσεις πηγάζουν από τη χρήση τέτοιων φράσεων σε περιπτώσεις στις οποίες δεν μπορεί να βρεθεί ένα ακίνδυνο νόημα.

Αν τώρα επιστρέψουμε στις αντιφάσεις, αμέσως βλέπουμε ότι η θεωρία των τύπων λύνει μερικές από αυτές. Οπουδήποτε γίνεται μνεία «όλων των προτάσεων», πρέπει να αντικαταστήσουμε αυτή την έκφραση με την «όλες οι προτάσεις βαθμού ν»· και είναι αδιάφορο ποια τιμή δίνουμε στο ν, αλλά είναι ουσιαστικό το ν να έχει *κάποια* τιμή. Έτσι, όταν κάποιος πει: «Ψεύδομαι», πρέπει να ερμηνεύσουμε αυτό που λέει ως: «Υπάρχει μία πρόταση βαθμού ν την οποία καταφάσκω και είναι ψευδής». Αυτή είναι πρόταση βαθμού $\nu + 1$· άρα αυτός δεν καταφάσκει καμία πρόταση βαθμού ν· επομένως, η δήλωσή του είναι ψευδής, αλλά το ότι είναι ψευδής δεν συνεπάγεται το ότι κάνει μία αληθή δήλωση, όπως φαινόταν να συμβαίνει στην περίπτωση της «Ψεύδομαι». Αυτό λύνει τον Ψεύτη.

Τώρα ας εξετάσουμε τον «ελάχιστο ακέραιο που δεν λέγεται με λιγότερες από τριάντα συλλαβές». Πρώτ' απ' όλα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι εδώ το *λέγεται* πρέπει να σημαίνει «κατονομάζεται με τη βοήθεια αυτού και εκείνου του καθορισμένου ονόματος» και ότι ο αριθμός των καθορισμένων ονομάτων πρέπει να είναι πεπερασμένος. Γιατί, αν δεν είναι πεπερασμένος, δεν υπάρχει λόγος για τον οποίο δεν θα υπήρχε ακέραιος που δεν λέγεται με λιγότερες από τριάντα συλλαβές, και δεν υπάρχει παράδοξο. Κατόπιν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το «που λέγεται με ονόματα από το σύνολο N» σημαίνει « είναι ο μόνος όρος που ικανοποιεί κάποια συνάρτηση η οποία συντίθεται εξ ολοκλήρου από ονόματα του συνόλου N». Το παράδοξο λύνεται, νομίζω, αν κάνουμε την απλή παρατήρηση ότι το ίδιο το «που λέγεται με ονόματα από το σύνολο N» ποτέ δεν λέγεται με ονόματα από το σύνολο αυτό [N]. Αν διευρύνουμε το σύνολο N με την προσθήκη του ονόματος «που λέγεται με ονόματα από το σύνολο N», έχουμε διευρύνει το θεμελιακό μας απόθεμα ονομάτων· αν ονομάσουμε N' το νέο απόθεμα, το «που λέγεται με ονόματα από το σύνολο N'» δεν μπορεί να κατονομασθεί με ονόματα από το σύνολο N'. Αν προσπαθήσουμε να διευρύνουμε το N, ωσότου συμπεριλάβει *όλα* τα ονόματα, τότε το «που λέγεται» γίνεται (σύμφωνα με όσα είπαμε πιο πάνω) «είναι ο μόνος όρος που ικανοποιεί κάποια συνάρτηση η οποία συντίθεται εξ ολοκλήρου από ονόματα». Αλλά εδώ έχουμε μία συνάρτηση ως φαινομενική μεταβλητή· επομένως, έχουμε περιορισθεί σε κατηγορηματικές συναρτήσεις ενός ορισμένου τύπου (διότι οι μη κατηγορηματικές συναρτήσεις δεν μπορούν να είναι φαινομενικές μεταβλητές). Ώστε για να αποφύγουμε το παράδοξο αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η δυνατότητα ονομασίας με τη βοήθεια τέτοιων συναρτήσεων είναι μη κατηγορηματική.

Μεγάλη αναλογία με την περίπτωση που μόλις συζητήσαμε παρουσιάζει και η περίπτωση του «ελάχιστου μη οριστού διατακτικού αριθμού». Εδώ, όπως και πριν, το «μη οριστός» πρέπει να είναι σχετικό με κάποιο δεδομένο απόθεμα από θεμελιακές ιδέες· και έχουμε λόγους να υποθέτουμε ότι το «οριστός από τις ιδέες του συνόλου N» δεν είναι οριστό από τις ιδέες του συνόλου N. Είναι αλήθεια ότι υπάρχει κάποιο καθορισμένο τμήμα της σειράς των διατακτικών αριθμών, που αποτελείται αποκλειστικά από οριστούς διατακτικούς αριθμούς, και το οποίο ως όριό τους έχει τον ελάχιστο διατακτικό μη οριστό. Αυτός ο ελάχιστος διατακτικός θα γίνει οριστός με μια μικρή διεύρυνση του βασικού μας αποθέματος· αλλά τότε θα υπάρχει ένας νέος διατακτικός αριθμός ο οποίος είναι ο ελάχιστος οριστός με το νέο απόθεμα. Αν διευρύνουμε το απόθεμά μας ώστε να περιλάβει όλες τις δυνατές ιδέες, δεν υπάρχει πια λόγος να πιστεύουμε ότι υπάρχει μη οριστός διατακτικός αριθμός. Νομίζω πως η φαινομενική δύναμη του παραδόξου βρίσκεται στην υπόθεση, σύμφωνα με την οποία αν όλοι οι διατακτικοί αριθμοί ενός ορισμένου συνόλου είναι οριστοί, το σύνολο πρέπει να είναι οριστό, και σ' αυτή την περίπτωση ο διάδοχός του είναι βέβαια οριστός· αλλά δεν υπάρχει λόγος να δεχθούμε αυτή την υπόθεση.

Για να λυθούν οι αντιφάσεις, ιδιαίτερα του Burali-Forti, απαιτούνται μερικά συμπληρωματικά αποτελέσματα.

V. *Το αξίωμα της αναγωγιμότητας*

Όπως είδαμε, μία προτασιακή μεταβλητή του *x* μπορεί να είναι οποιουδήποτε βαθμού· γι' αυτό δεν έχει νόημα καμία δήλωση της μορφής «όλες οι ιδιότητες του *x*». (Το «μία ιδιότητα του *x*» είναι το ίδιο πράγμα με το «μία προτασιακή συνάρτηση που ισχύει για το *x*».) Αλλά, για να είναι δυνατά τα μαθηματικά, είναι απόλυτα αναγκαίο να έχουμε κάποια μέθοδο για να κάνουμε δηλώσεις που συνήθως ισοδυναμούν με ό,τι έχουμε στο νου μας όταν μιλάμε για «όλες τις ιδιότητες του *x*». Η ανάγκη αυτή παρουσιάζεται σε πολλές περιπτώσεις, αλλά ειδικά σε σχέση με τη μαθηματική επαγωγή. Μπορούμε, χρησιμοποιώντας το *κάθε* αντί του *όλοι*, να πούμε: «Κάθε ιδιότητα που έχει ο *0* και όλοι οι διάδοχοι όλων των αριθμών που την έχουν, είναι ιδιότητα όλων των πεπερασμένων αριθμών». Δεν μπορούμε όμως να συνεχίσουμε: «Πεπερασμένος αριθμός είναι ο αριθμός που έχει *όλες* τις ιδιότητες που έχουν ο *0* και οι διάδοχοι όλων των αριθμών που τις έχουν». Αν περιορίσουμε αυτή τη δήλωση σε όλες τις πρωτοβάθμιες ιδιότητες των αριθμών, δεν μπορούμε να συναγάγουμε ότι ισχύει για δευτεροβάθμιες ιδιότητες. Για παράδειγμα, δεν θα μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν οι μ και ν είναι πεπερασμένοι αριθμοί, τότε ο $\mu + \nu$ είναι πεπερασμένος αριθμός. Γιατί, σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε πιο πάνω, η «ο μ είναι πεπερασμένος αριθμός» είναι δευτεροβάθμια ιδιότητα του μ· επομένως το γεγονός ότι το $\mu + 0$ είναι πεπερασμένος αριθμός, και ότι, αν ο $\mu + \nu$ είναι πεπερασμένος αριθμός, το ίδιο ισχύει και για τον $\mu + \nu + 1$, δεν μας επιτρέπει να συμπεράνουμε επαγωγικά ότι ο $\mu + \nu$ είναι πεπερασμένος αριθμός. Είναι προφανές ότι μια τέτοια κατάσταση πραγμάτων αποκλείει ένα μεγάλο μέρος από τα στοιχειώδη μαθηματικά.

Ούτε πετυχαίνει περισσότερα ο άλλος ορισμός του πεπερασμένου με τη βοήθεια της ανομοιότητας όλου και μέρους. Γιατί ο ορισμός αυτός είναι: «Ένα σύνολο λέγεται πεπερασμένο όταν κάθε σχέση ένα-προς-ένα, της οποίας το πεδίο ορισμού συμπίπτει με το σύνολο και το πεδίο τιμών περιέχεται στο σύνολο, έχει ολόκληρο το σύνολο ως πεδίο τιμών της». Εδώ παρουσιάζεται μία μεταβλητή σχέση, δηλ. μία μεταβλητή συνάρτηση δύο μεταβλητών· πρέπει να πάρουμε *όλες* τις τιμές αυτής της συνάρτησης, και αυτό απαιτεί η συνάρτηση να είναι καθορισμένου βαθμού· αλλά κανένας καθορισμένος βαθμός δεν θα μας επιτρέψει να παραγάγουμε λογικά πολλές από τις προτάσεις των στοιχειωδών μαθηματικών.

Πρέπει λοιπόν να βρούμε, αν είναι δυνατόν, κάποια μέθοδο για να μειώσουμε το βαθμό μιας προτασιακής συνάρτησης, χωρίς να επηρεάσουμε την αλήθεια ή το ψεύδος των τιμών της. Αυτό φαίνεται να επιτελεί ο κοινός νους, όταν δέχεται τα *σύνολα*. Αν δοθεί μία προτασιακή συνάρτηση φx, οποιουδήποτε βαθμού, αυτή υποτίθεται ότι ισοδυναμεί, για όλες τις τιμές του *x*, με μία δήλωση της μορφής «ο x ανήκει στο σύνολο *α*». Αυτή η δήλωση είναι πρωτοβάθμια, αφού δεν κάνει καμία νύξη σε «όλες τις συναρτήσεις αυτού-και-αυτού του τύπου». Και μάλιστα το μόνο πλεονέκτημά της, όταν συγκριθεί με την αρχική δήλωση φx, έγκειται στο ότι είναι πρωτοβάθμια. Δεν κερδίζουμε τίποτε από την παραδοχή ότι πραγματικά υπάρχουν πράγματα όπως τα σύνολα, και η αντινομία των συνόλων που δεν είναι μέλη του εαυτού τους δείχνει ότι, αν υπάρχουν σύνολα, αυτά πρέπει να διαφέρουν ριζικά από τα άτομα. Πιστεύω πως ο κύριος σκοπός που εξυπηρετούν τα σύνολα και ο κύριος λόγος που τα κάνει πρόσφορα από γλωσσική άποψη, είναι ότι προσφέρουν μία μέθοδο για να μειώνεται ο βαθμός των προτασιακών συναρτήσεων. Γι' αυτό δεν θα υποθέσω το παραμικρό από όσα φαίνεται να εμπεριέχει η αποδοχή των συνόλων από τον κοινό νου, εκτός από τούτο: κάθε προτασιακή συνάρτηση ισοδυναμεί, για όλες τις τιμές της, με κάποια κατηγορηματική συνάρτηση.

Αυτή η παραδοχή πρέπει να γίνει για τις συναρτήσεις, ανεξάρτητα από τον τύπο των ορισμάτων τους. Έστω ότι φx είναι μία συνάρτηση οποιουδήποτε βαθμού, ενός ορίσματος *x*, που το ίδιο μπορεί να είναι ένα άτομο ή μία συνάρτηση οποιουδήποτε βαθμού. Αν ο βαθμός της φ είναι ο αμέσως επόμενος του βαθμού του *x*, γράφουμε τη συνάρτηση με τη μορφή $\varphi ! x$· σε μια τέτοια περίπτωση θα ονομάζουμε την φ *κατηγορηματική* συνάρτηση. Έτσι η κατηγορηματική συνάρτηση ενός ατόμου είναι μια πρωτοβάθμια συνάρτηση· για ορίσματα ανώτερων τύπων, οι κατηγορηματικές συναρτήσεις παίζουν το ρόλο που παίζουν οι πρωτοβάθμιες συναρτήσεις σε σχέση με τα άτομα. Δεχόμαστε, λοιπόν, ότι κάθε συνάρτηση ισοδυναμεί, για όλες τις τιμές της, με κάποια κατηγορηματική συνάρτηση του ίδιου ορίσματος. Αυτή η παραδοχή φαίνεται να είναι η ουσία της συνηθισμένης παραδοχής για τα σύνολα· πάντως, διατηρεί από τα σύνολα όσο μας χρειάζεται και, μαζί, τόσο λίγο ώστε να αποφεύγονται οι αντιφάσεις που μπορεί να συνεπιφέρει μια πιο γενναιόδωρη αποδοχή των συνόλων. *Αξίωμα των συνόλων ή αξίωμα της αναγωγιμότητας* θα ονομάσουμε αυτή την παραδοχή.

Ομοίως θα δεχθούμε ότι κάθε συνάρτηση δύο μεταβλητών ισοδυναμεί, για όλες τις τιμές της, με μία κατηγορηματική συνάρτηση αυτών των μεταβλητών, όπου μία κατηγορηματική συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε να υπάρχει μία από τις μεταβλητές για την οποία η συνάρτηση γίνεται κατηγορηματική (με την προηγούμενη σημασία), όταν δώσουμε μία τιμή στην άλλη μεταβλητή. Αυτή την παραδοχή φαίνεται να εννοούν, όταν λένε ότι κάθε δήλωση σχετική με δύο μεταβλητές ορίζει μια σχέση μεταξύ τους. *Αξίωμα των σχέσεων ή αξίωμα της αναγωγιμότητας* θα ονομάσουμε αυτή την παραδοχή.

Όταν ασχολούμαστε με σχέσεις περισσότερων από δύο όρους, χρειαζόμαστε παρόμοιες παραδοχές για τρεις, τέσσερις, . . . μεταβλητές. Αλλά για το σκοπό μας, αυτές οι παραδοχές δεν είναι απαραίτητες και γι' αυτό δεν γίνονται στην παρούσα εργασία.

Με τη βοήθεια του αξιώματος της αναγωγιμότητας οι δηλώσεις για «όλες τις πρωτοβάθμιες συναρτήσεις του x» ή για «όλες τις κατηγορηματικές συναρτήσεις του α» παράγουν την πλειονότητα των αποτελεσμάτων των οποίων η ύπαρξη, χωρίς τη βοήθειά του, θα απαιτούσε το «όλες οι συναρτήσεις». Ουσιαστικό είναι το ότι έχουμε αποτελέσματα αυτού του είδους σε όλες τις περιπτώσεις στις οποίες σημασία έχει μόνο η αλήθεια ή το ψεύδος των τιμών των σχετικών συναρτήσεων, όπως συμβαίνει πάντα στα μαθηματικά. Έτσι, λ.χ., αρκεί η μαθηματική επαγωγή να διατυπωθεί μόνο για όλες τις κατηγορηματικές συναρτήσεις αριθμών· από το αξίωμα των συνόλων απορρέει ότι αυτή ισχύει για *οποιαδήποτε* συνάρτηση οποιουδήποτε βαθμού. Ίσως σκεφτεί κανείς ότι τώρα θα εμφανισθούν ξανά τα παράδοξα, για χάρη των οποίων επινοήσαμε την ιεραρχία των τύπων. Αλλά αυτό δεν συμβαίνει, γιατί σ' αυτά τα παράδοξα σημασία έχει κάτι που βρίσκεται πέρα από την αλήθεια ή το ψεύδος των τιμών των συναρτήσεων, ή παρουσιάζονται εκφράσεις που εξακολουθούν να μην έχουν νόημα και μετά την εισαγωγή του αξιώματος της αναγωγιμότητας. Για παράδειγμα, μία δήλωση όπως η «ο Επιμενίδης βεβαιώνει ότι ψx» δεν ισοδυναμεί με την «ο Επιμενίδης βεβαιώνει ότι $\varphi!x$», μολονότι οι ψx και $\varphi!x$ είναι ισοδύναμες. Έτσι η «Ψεύδομαι» παραμένει ανόητη, αν προσπαθήσουμε να συμπεριλάβουμε *όλες* τις προτάσεις σε εκείνες που καταφάσκω και είναι ψευδείς, και δεν επηρεάζεται από το αξίωμα των συνόλων, αν την περιορίσουμε σε προτάσεις βαθμού ν. Επομένως, η ιεραρχία των προτάσεων και των συναρτήσεων εξακολουθεί να έχει βαρύτητα μόνο στις περιπτώσεις στις οποίες πρέπει να αποφευχθεί ένα παράδοξο.

VI. *Βασικές ιδέες και προτάσεις της συμβολικής λογικής*

Η συμβολική λογική φαίνεται να απαιτεί τις ακόλουθες επτά αρχικές ιδέες:

(1) Οποιαδήποτε προτασιακή συνάρτηση μιας μεταβλητής x ή περισσότερων μεταβλητών $x, y, z, \ldots$ θα τη συμβολίσουμε με το φx ή $\varphi(x, y, z, \ldots)$.

(2) Η άρνηση μιας πρότασης. Αν p είναι η πρόταση, η άρνησή της θα συμβολίζεται με το $\sim p$.

(3) Η διάζευξη ή λογικό άθροισμα δύο προτάσεων, δηλ. «αυτό ή εκείνο». Αν p και q είναι δύο προτάσεις, η διάζευξή[22] τους συμβολίζεται με $p \vee q$.

(4) Η αλήθεια *οποιασδήποτε* τιμής μιας προτασιακής συνάρτησης, δηλ. της φx, όπου το x είναι ακαθόριστο.

(5) Η αλήθεια *όλων* των τιμών μιας προτασιακής συνάρτησης. Αυτό συμβολίζεται με το $(x).\varphi x$ ή $(x){:}\varphi x$ ή με όσες τελείες χρειάζονται για να χωριστεί η πρόταση[23]. Στην $(x).\varphi x$, το x λέγεται φαινομενική μεταβλητή, ενώ όταν βεβαιώνουμε την φx, με x ακαθόριστο, το x λέγεται *πραγματική μεταβλητή*.

(6) Οποιαδήποτε κατηγορηματική συνάρτηση ενός ορίσματος οποιουδήποτε τύπου· αυτή θα συμβολίζεται με το $\varphi!x$ ή $\varphi!a$ ή $\varphi!R$ ανάλογα με τις περιστάσεις. Κατηγορηματική είναι μία συνάρτηση του x, όταν οι τιμές της είναι προτάσεις των οποίων ο τύπος είναι άμεσος διάδοχος του τύπου του x, αν το x είναι ένα άτομο ή μία πρόταση, ή του τύπου των τιμών του x, αν το x είναι μία συνάρτηση. Μπορεί να περιγραφεί ως συνάρτηση στην οποία οι φαινομενικές μεταβλητές, αν υπάρχουν, έχουν όλες τον τύπο του x ή κατώτερο· και μία μεταβλητή έχει τύπο κατώτερο από τον τύπο του x, αν έχει νόημα να παρουσιασθεί ως όρισμα του x ή ως όρισμα ενός ορίσματος του x κτλ.

(7) Βεβαίωση· δηλ. η βεβαίωση ότι κάποια πρόταση είναι αληθής ή ότι είναι αληθής οποιαδήποτε τιμή κάποιας προτασιακής συνάρτησης. Αυτό απαιτεί η διάκριση ανάμεσα σε μια πρόταση που βεβαιώνουμε και σε μια πρόταση που εξετάζουμε μονάχα ή παρουσιάζουμε ως υπόθεση για μια άλλη πρόταση. Το βεβαιωτικό σημείο είναι '$\vdash$' και μπαίνει μπροστά σε ό,τι βεβαιώνεται, με αρκετές τελείες ώστε να το διαχωρίζει[24].

Προτού προχωρήσουμε στις αρχικές προτάσεις, χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς. Στους ακόλουθους ορισμούς, καθώς και στις αρχικές προτάσεις, τα γράμματα p, q, r συμβολίζουν προτάσεις.

$$p \supset q. = .\sim p \vee q \quad Df.$$

Αυτός ο ορισμός λέει ότι το '$p \supset q$' (που διαβάζεται ως «η p συνεπάγεται την q») σημαίνει «η p είναι ψευδής ή η q είναι αληθής». Δεν θέλω να πω ότι η λέξη «συνεπάγεται» δεν μπορεί να έχει κανένα άλλο νόημα, αλλά μονάχα ότι αυτό το νόημα είναι το πιο κατάλληλο για τη συμβολική λογική. Σε έναν ορισμό, το σημείο της ισότητας και τα γράμματα 'Df' πρέπει να θεωρούνται ενιαίο σύμβολο· η σύζευξή τους σημαίνει: «σημαίνει εξ ορισμού». Το σημείο της ισότητας, χωρίς τα γράμματα «Df», έχει διαφορετικό νόημα και θα ορισθεί παρακάτω.

$$p.q. = .\sim(\sim p \vee \sim q) \quad Df.$$

Αυτό ορίζει το λογικό γινόμενο δύο προτάσεων p και q, δηλ. την «και η p και η q είναι αληθείς». Ο ορισμός μας λέει ότι αυτό θα σημαίνει: «Είναι ψευδές ότι ή η p είναι ψευδής ή η q είναι ψευδής». Και εδώ, πάλι, ο ορισμός δεν δίνει το μόνο νόημα που μπορεί να δοθεί στην «και η p και η q είναι αληθείς», αλλά δίνει το νόημα που είναι πιο κατάλληλο για τους σκοπούς μας.

$$p \equiv q. = .p \supset q.q \supset p \quad Df.$$

Δηλ. το '$p \equiv q$', που διαβάζεται «η p ισοδυναμεί με την q», σημαίνει ότι «η p συνεπάγεται την q και η q συνεπάγεται την p»· από το οποίο απορρέει, βέβαια, ότι οι p και q είναι και οι δύο αληθείς ή και οι δύο ψευδείς.

$$(\exists x).\varphi x. = .\sim\{(x).\sim\varphi x\} \quad Df.$$

Αυτό ορίζει το «υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή του x για την οποία η φx είναι αληθής» και, εξ ορισμού, σημαίνει «είναι ψευδές ότι η φx είναι πάντα ψευδής».

$$x = y. = :(\varphi):\varphi!x.\supset.\varphi!y \quad Df.$$

Αυτός είναι ο ορισμός της ταυτότητας. Δηλώνει ότι λέμε πως τα x και y ταυτίζονται, όταν κάθε κατηγορηματική συνάρτηση που ικανοποιείται από το x ικανοποιείται από το y. Από το αξίωμα της αναγωγιμότητας απορρέει ότι, αν το x ικανοποιεί την ψx, όπου ψ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, κατηγορηματική ή μη κατηγορηματική, τότε το y ικανοποιεί την ψy.

Οι ακόλουθοι ορισμοί είναι λιγότερο σημαντικοί και εισάγονται μόνο για λόγους συντομογραφίας:

$$(x,y).\varphi(x,y). = :(x):(y).\varphi(x,y) \quad Df,$$
$$(\exists x,y).\varphi(x,y). = :(\exists x):(\exists y).\varphi(x,y) \quad Df,$$
$$\varphi x.\supset_x.\psi x: = :(x):\varphi x \supset \psi x \quad Df,$$
$$\varphi x.\equiv_x.\psi x: = :(x):\varphi x.\equiv.\psi x \quad Df,$$
$$\varphi(x,y).\supset_{x,y}.\psi(x,y): = :(x,y):\varphi(x,y).\supset\psi(x,y) \quad Df,$$

και πάει λέγοντας, για οποιονδήποτε αριθμό μεταβλητών.

Χρειαζόμαστε τις ακόλουθες αρχικές [ή βασικές] προτάσεις.

(Στα 2, 3, 4, 5, 6 και 10 τα p, q, r συμβολίζουν προτάσεις.)

(1) Μία πρόταση που απορρέει από μία αληθή προκείμενη είναι αληθής.

(2) $\vdash : p \vee q.\supset.p.$

(3) $\vdash : q.\supset.p \vee q.$

(4) $\vdash : p \vee q.\supset.q \vee p.$

(5) $\vdash : p \vee (q \vee r).\supset.q \vee (p \vee r).$

(6) $\vdash :. q \supset r.\supset: p \vee q.\supset.p \vee r.$

(7) $\vdash : (x).\varphi x.\supset.\varphi y$·

δηλ. «αν όλες οι τιμές της $\varphi\hat{x}$ είναι αληθείς, τότε η φy είναι αληθής, όπου φy είναι οποιαδήποτε τιμή»[25].

(8) Αν η φy είναι αληθής, όπου φy είναι οποιαδήποτε τιμή της $\varphi\hat{x}$, τότε η $(x).\varphi(x)$ είναι αληθής. Αυτό δεν μπορεί να διατυπωθεί με τα σύμβολά μας· γιατί αν γράψουμε «$\varphi y.\supset.(x).\varphi x$», αυτό σημαίνει «η φy συνεπάγεται το ότι όλες οι τιμές του $\varphi\hat{x}$ είναι αληθείς, όπου το y μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή κατάλληλου τύπου», και αυτό δεν ισχύει γενικά. Αυτό που θέλουμε να βεβαιώσουμε είναι: «Αν, όπως και αν επιλέξουμε το y, η φy είναι αληθής, τότε η $(x).\varphi x$ είναι αληθής», ενώ η «$\varphi y.\supset.(x).\varphi x$» εκφράζει το ότι: «Όπως και αν επιλέξουμε το y, αν η φy είναι αληθής, τότε η $(x).\varphi x$ είναι αληθής», και αυτή είναι μία εντελώς διαφορετική δήλωση η οποία, στη γενική περίπτωση, είναι ψευδής.

(9) $\vdash : (x).\varphi x.\supset.\varphi a$, όπου το a είναι οποιαδήποτε ορισμένη σταθερά.

Στην πραγματικότητα αυτή η αρχή περιλαμβάνει πολλές διαφορετικές αρχές, και ο αριθμός τους είναι ίσος με τον αριθμό των δυνατών τιμών του a. Λέει ότι, λ.χ., οτιδήποτε ισχύει για τα άτομα, ισχύει και για τον Σωκράτη· επίσης ισχύει και για τον Πλάτωνα· κ.ο.κ.ε. Είναι η αρχή ότι ένας γενικός κανόνας μπορεί να εφαρμοσθεί και στις ειδικές περιπτώσεις· αλλά για να του δώσουμε περιεχόμενο, είναι ανάγκη να αναφέρουμε τις ειδικές περιπτώσεις, γιατί αλλιώς πρέπει η ίδια η αρχή να μας εξασφαλίσει το ότι ο γενικός κανόνας –«οι γενικοί κανόνες μπορούν να εφαρμοσθούν σε ειδικές περιπτώσεις»– μπορεί να εφαρμοσθεί (ας πούμε) στην ειδική περίπτωση του Σωκράτη. Σ' αυτό η παρούσα αρχή διαφέρει από την (7)· η αρχή που εξετάζουμε δηλώνει κάτι για τον Σωκράτη ή τον Πλάτωνα ή κάποια άλλη ορισμένη σταθερά, ενώ η (7) δήλωνε κάτι για μία μεταβλητή.

Η αρχή αυτή ποτέ δεν χρησιμοποιείται στη συμβολική λογική ή στα καθαρά μαθηματικά, αφού όλες οι προτάσεις μας είναι γενικές· ακόμα και όταν (όπως στην «ο *1* είναι αριθμός») φαίνεται να έχουμε μία αυστηρά ειδική περίπτωση, εξετάζοντάς την προσεκτικά, ανακαλύπτουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει. Στην πραγματικότητα, η χρήση αυτής της αρχής αποτελεί το χαρακτηριστικό γνώρισμα των *εφαρμοσμένων* μαθηματικών. Ώστε, αν ήμασταν ακριβολόγοι, θα μπορούσαμε να μην την περιλάβουμε στον κατάλογό μας.

(10) $\vdash :.(x).p \vee \varphi x.\supset:p.\vee.(x).\varphi x$,

δηλ. «αν η 'p ή φx' είναι πάντα αληθής, τότε ή η p είναι αληθής ή η φx είναι πάντα αληθής».

(11) Όταν η $f(\varphi x)$ είναι αληθής οποιοδήποτε και αν είναι το όρισμα x, και η $F(\varphi y)$ είναι αληθής οποιοδήποτε δυνατό όρισμα κι αν είναι το y, τότε η $\{f(\varphi x).F(\varphi x)\}$ είναι αληθής οποιοδήποτε δυνατό όρισμα κι αν είναι το x.

Αυτό είναι το αξίωμα του «προσδιορισμού της ταυτότητας μεταβλητών». Το χρειαζόμαστε όταν γνωρίζουμε ότι δύο προτασιακές συναρτήσεις είναι πάντα αληθείς χωριστά και θέλουμε να συμπεράνουμε ότι το λογικό γινόμενό τους είναι πάντα αληθές. Αυτός ο συμπερασμός είναι θεμιτός μόνο αν οι δύο συναρτήσεις έχουν ορίσματα του ίδιου τύπου, γιατί αλλιώς το λογικό τους γινόμενο δεν έχει νόημα. Στο αξίωμα αυτό τα x και y πρέπει να είναι του ίδιου τύπου, γιατί και τα δύο παρουσιάζονται ως ορίσματα της φ.

(12) Αν η $\varphi x . \varphi x \supset \psi x$ είναι αληθής για κάθε δυνατό x, τότε η ψx είναι αληθής για κάθε δυνατό x.

Αυτό το αξίωμα χρειάζεται για να διασφαλιστεί το ότι το πεδίο σημασίας της ψx, στην εξεταζόμενη περίπτωση, είναι το ίδιο με το πεδίο της $\varphi x . \varphi x \supset \psi x . \supset . \psi x$· στην πραγματικότητα, και τα δύο συμπίπτουν με το πεδίο της φx. Στην εξεταζόμενη περίπτωση, γνωρίζουμε ότι η ψx είναι αληθής όταν και η $\varphi x . \varphi x \supset \psi x$ και η $\varphi x . \varphi x \supset \psi x . \supset \psi x$ έχουν νόημα, αλλά χωρίς το αξίωμα δεν γνωρίζουμε ότι η ψx είναι αληθής κάθε φορά που η ψx έχει νόημα. Γι' αυτό και χρειαζόμαστε το αξίωμα.

Τα αξιώματα (11) και (12) χρειάζονται, λ.χ., για να αποδείξουμε ότι:

$$(x) . \varphi x : (x) . \varphi x : \supset \psi x : \supset . (x) . \psi x \, .$$

Από τα (7) και (11),

$$\vdash : . (x) . \varphi x : (x) . \varphi x \supset \psi x : \supset : \varphi y . \varphi y \supset \psi y \, ,$$

και, επομένως, με τη βοήθεια της (12),

$$\vdash : . (x) . \varphi x : (x) . \varphi x \supset \psi x : \supset : \psi y \, .$$

Το αποτέλεσμα απορρέει από τα (8) και (10).

(13) $\vdash : . (\exists f) : . (x) : \varphi x . \equiv . f!x$.

Αυτό είναι το αξίωμα της αναγωγιμότητας. Δηλώνει ότι, όταν δοθεί μία συνάρτηση $\varphi \hat{x}$, υπάρχει μία κατηγορηματική συνάρτηση $f!\hat{x}$ τέτοια ώστε η $f!x$ να είναι πάντα ισοδύναμη με την φx. Ας σημειωθεί ότι αφού η πρόταση που αρχίζει με το '$(\exists f)$' είναι εξ ορισμού η άρνηση μιας πρότασης που αρχίζει με το '(f)' το παραπάνω αξίωμα συνεπάγεται τη δυνατότητα να θεωρήσουμε «όλες τις κατηγορηματικές συναρτήσεις του x». Αν η φx είναι *οποιαδήποτε* συνάρτηση του x, δεν μπορούμε να σχηματίσουμε προτάσεις που να αρχίζουν με τα '(φ)' ή '$(\exists \varphi)$', αφού δεν μπορούμε να θεωρήσουμε «όλες τις συναρτήσεις», αλλά μόνο «*οποιαδήποτε* συνάρτηση» ή «όλες τις *κατηγορηματικές* συναρτήσεις».

(14) $\vdash : . (\exists f) : . (x, y) : \varphi(x, y) . \equiv . f!(x, y)$.

Αυτό είναι το αξίωμα της αναγωγιμότητας για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Στις παραπάνω προτάσεις, τα x και y μπορούν να έχουν οποιονδήποτε τύπο. Η θεωρία των τύπων επεμβαίνει στο ότι η (11) μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε την ταυτότητα πραγματικών μεταβλητών που παρουσιάζονται σε διαφορετικά συμφραζόμενα, όταν δειχθεί πως είναι του ίδιου

τύπου, με το να παρουσιάζονται ως ορίσματα της ίδιας συνάρτησης· και στο ότι στις (7) και (9), τα y και a πρέπει να είναι, αντίστοιχα, του κατάλληλου τύπου, ώστε να είναι ορίσματα της $\varphi \hat{x}$. Ας υποθέσουμε, λ.χ., ότι έχουμε μία πρόταση της μορφής $(\varphi) . f!(\varphi!\hat{z}, x)$, που είναι δευτεροβάθμια συνάρτηση του x. Τότε, σύμφωνα με την (7),

$$\vdash : (\varphi) . f!(\varphi!\hat{z}, x) . \supset . f!(\psi!\hat{z}, x) \, ,$$

όπου η $\psi!\hat{z}$ είναι οποιαδήποτε πρωτοβάθμια συνάρτηση. Αλλά δεν γίνεται να χρησιμοποιήσουμε την $(\varphi) . f!(\varphi!\hat{z}, x)$ σαν να ήταν πρωτοβάθμια συνάρτηση του x, και να θεωρήσουμε αυτή τη συνάρτηση ως δυνατή τιμή του $\psi!\hat{z}$ στα παραπάνω. Από τέτοια σύγχυση των τύπων προκύπτει το παράδοξο του *Ψεύτη*.

Ας θεωρήσουμε ξανά τα σύνολα που δεν είναι μέλη του εαυτού τους. Είναι φανερό ότι, αφού ταυτίσαμε τα σύνολα με συναρτήσεις[26], για κανένα σύνολο δεν έχει νόημα να πούμε ότι είναι μέλος του εαυτού του· γιατί τα μέλη ενός συνόλου είναι ορίσματά του, και τα ορίσματα μιας συνάρτησης έχουν πάντα τύπο κατώτερο από τον τύπο της συνάρτησης. Και αν ρωτήσουμε: «Αλλά τι συμβαίνει με το σύνολο όλων των συνόλων; Δεν είναι σύνολο και, επομένως, μέλος του εαυτού του;», υπάρχουν δύο ειδών απαντήσεις. Πρώτον, αν η «το σύνολο όλων των συνόλων» σημαίνει «το σύνολο όλων των συνόλων οποιασδήποτε τάξης», τότε υπάρχει τέτοια έννοια. Δεύτερον, αν η «το σύνολο όλων των συνόλων» σημαίνει «το σύνολο όλων των συνόλων του τύπου τ», τότε αυτό το σύνολο έχει τύπο τον αμέσως επόμενο του τ, και, επομένως, ξανά δεν είναι μέλος του εαυτού του. Έτσι, μολονότι οι αρχικές προτάσεις που δόθηκαν πιο πάνω ισχύουν εξίσου για όλους τους τύπους, δεν μας επιτρέπουν να συναγάγουμε αντιφάσεις. Γι' αυτό κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε διαδικασίας λογικής παραγωγής δεν είναι ποτέ ανάγκη να θεωρήσουμε τον απόλυτο τύπο μιας μεταβλητής· το μόνο που χρειάζεται είναι να βεβαιωθούμε ότι οι διάφορες μεταβλητές που παρουσιάζονται σε μια πρόταση είναι του κατάλληλου σχετικού τύπου. Αυτό αποκλείει συναρτήσεις όπως εκείνη από την οποία αντλήσαμε την τέταρτη από τις αντιφάσεις μας, δηλ. την «Η σχέση R έχει τη σχέση R με την S». Διότι, μια σχέση μεταξύ των R και S έχει κατ' ανάγκην τύπο ανώτερο από τους τύπους των δύο σχέσεων και, επομένως, η συνάρτηση που προτείνεται δεν έχει νόημα.

VII. *Στοιχειώδης θεωρία των συνόλων και των σχέσεων*

Η τιμή αληθείας των προτάσεων στις οποίες εμφανίζεται η συνάρτηση φ

μπορεί να εξαρτάται από τη συγκεκριμένη συνάρτηση φ ή μπορεί να εξαρτάται μόνο από την *έκταση* της φ, δηλαδή από το ορίσματα που ικανοποιούν την φ. Ονομάζουμε τις συναρτήσεις του δεύτερου είδους *εκτασιακές*. Έτσι, λ.χ., η «πιστεύω ότι όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» μπορεί να μην ισοδυναμεί με την «πιστεύω ότι όλα τα δίποδα είναι θνητά», μολονότι «άνθρωπος» και «άπτερο δίποδο» έχουν την ίδια έκταση [λογικό πλάτος.]· και αυτό, διότι μπορεί να μη γνωρίζω ότι έχουν το ίδιο πλάτος. Αλλά η «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» πρέπει να ισοδυναμεί με την «όλα τα άπτερα δίποδα είναι θνητά», αν άνθρωπος και άπτερο δίποδο έχουν το ίδιο πλάτος. Έτσι η «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» είναι εκτασιακή συνάρτηση της συνάρτησης «ο x είναι άνθρωπος», ενώ η «πιστεύω ότι όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» είναι συνάρτηση, αλλά όχι εκτασιακή· θα ονομάσουμε *σημασιακές*[33] τις συναρτήσεις που δεν είναι εκτασιακές. Όλες οι συναρτήσεις συναρτήσεων στις οποίες συγκεντρώνεται ιδιαίτερα το ενδιαφέρον των μαθηματικών είναι εκτασιακές. Το χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας εκτασιακής συνάρτησης f μιας συνάρτησης $\varphi!\hat{z}$ είναι ότι

$$\varphi!x.\equiv_x.\psi!x:\supset_{\varphi,\psi}:f(\varphi!\hat{z}).\equiv.f(\psi!\hat{z}).$$

Από μία συνάρτηση f μιας συνάρτησης $\varphi!\hat{z}$ μπορούμε να παραγάγουμε μία εκτασιακή συνάρτηση με τον ακόλουθο τρόπο. Θέτουμε

$$f\{\hat{z}(\psi z)\}.=:(\exists\varphi):\varphi!x.\equiv_x.\psi x:f\{\varphi!\hat{z}\}\quad Df.$$

Στην πραγματικότητα, η συνάρτηση $f\{\hat{z}(\psi z)\}$ είναι συνάρτηση της $\psi\hat{z}$, αλλά δεν συμπίπτει με την $f(\psi\hat{z})$, αν υποτεθεί ότι η τελευταία έχει νόημα. Αλλά είναι τεχνικά πρόσφορο να μεταχειριστούμε την $f\{\hat{z}(\psi z)\}$ σαν να έχει ως όρισμα το $\hat{z}(\psi z)$ το οποίο θα ονομάσουμε «το σύνολο που ορίζεται από την ψ». Έχουμε:

$$\vdash:.\varphi x.\equiv_x.\psi x:\supset:f\{\hat{z}(\varphi z)\}.\equiv.f\{\hat{z}(\psi z)\},$$

από την οποία, με εφαρμογή του ορισμού της ταυτότητας στα πλασματικά αντικείμενα $\hat{z}(\varphi z)$ και $\hat{z}(\psi z)$, βρίσκουμε:

$$\vdash:.\varphi x.\equiv_x.\psi x:\supset.\hat{z}(\varphi z)=\hat{z}(\psi z).$$

Αυτό, μαζί με το αντίστροφό του (που μπορεί να αποδειχθεί), αποτελεί τη διακριτική ιδιότητα των συνόλων. Δικαιολογείται λοιπόν το να θεωρούμε ότι το $\hat{z}(\varphi z)$ είναι το σύνολο που ορίζεται από την φ. Με τον ίδιο τρόπο, θέτουμε:

$$f\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\}.=:(\exists\varphi):\varphi!(x,y).\equiv_{x,y}.\psi(x,y):f\{\varphi!(\hat{x},\hat{y})\}\quad Df.$$

Εδώ χρειάζονται λίγα λόγια σχετικά με τη διάκριση ανάμεσα στα $\varphi!(\hat{x},\hat{y})$ και $\varphi!(\hat{y},\hat{x})$. Θα υιοθετήσουμε την ακόλουθη σύμβαση: Όταν μία συνάρτηση (εν αντιθέσει προς τις τιμές της) παριστάνεται με μία μορφή στην οποία υπεισέρχονται το $\hat{x}$ και το $\hat{y}$, ή οποιοδήποτε ζεύγος γραμμάτων του αλφαβήτου, η τιμή αυτής της συνάρτησης για τα ορίσματα a και b θα βρίσκεται με αντικατάσταση του $\hat{x}$ με το a και του $\hat{y}$ με το b· δηλαδή το όρισμα που αναφέρεται πρώτο πρέπει να αντικατασταθεί με το γράμμα που προηγείται στο αλφάβητο, και το όρισμα που αναφέρεται δεύτερο με το γράμμα που ακολουθεί. Αυτό διακρίνει ικανοποιητικά την $\varphi!(\hat{x},\hat{y})$ από την $\varphi!(\hat{y},\hat{x})$· λόγου χάρη:

Η τιμή της $\varphi!(\hat{x},\hat{y})$ για τα ορίσματα a,b είναι $\varphi!(a,b)$.
Η τιμή της $\varphi!(\hat{x},\hat{y})$ για τα ορίσματα b,a είναι $\varphi!(b,a)$.
Η τιμή της $\varphi!(\hat{y},\hat{x})$ για τα ορίσματα a,b είναι $\varphi!(b,a)$.
Η τιμή της $\varphi!(\hat{y},\hat{x})$ για τα ορίσματα b,a είναι $\varphi!(a,b)$.

Θέτουμε

$$x\epsilon\varphi!\hat{z}.=.\varphi!x\quad Df,$$

και έχουμε

$$\vdash:.x\epsilon\hat{z}(\psi z).=:(\exists\varphi):\varphi!y.\equiv_y.\psi y:\varphi!x.$$

Επίσης, σύμφωνα με το αξίωμα της αναγωγιμότητας, έχουμε

$$(\exists\varphi):\varphi!y.\equiv_y.\psi y,$$

και

$$\vdash:x\epsilon\hat{z}(\psi z).\equiv.\psi x.$$

Αυτό ισχύει ό,τι και να είναι το x. Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να εξετάσουμε το $\hat{z}(\psi z)\epsilon\hat{\varphi}f\{\hat{z}(\varphi!z)\}$. Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν, έχουμε:

$$\vdash:.\hat{z}(\psi z)\epsilon\hat{\varphi}f\{\hat{z}(\varphi!z)\}.\equiv:f\{\hat{z}(\psi z)\}:\equiv:(\exists\varphi):\varphi!y.\equiv_y.\psi y:f\{\varphi!z),$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\vdash:.\hat{z}(\psi z)=\hat{z}(\chi z).\supset:\hat{z}(\psi z)\epsilon\varkappa.\equiv_\varkappa.\hat{z}(\chi z)\epsilon\varkappa,$$

όπου γράφουμε $\varkappa$ για οποιαδήποτε έκφραση της μορφής $\hat{\varphi}f\{\hat{z}(\varphi!z)\}$. Θέτουμε

$$cls=\hat{\alpha}\{(\exists\varphi).\alpha=\hat{z}(\varphi!z)\}\quad Df.$$

Εδώ το *cls* έχει ένα νόημα που εξαρτάται από τον τύπο της φαινομενικής μεταβλητής φ. Έτσι, λ.χ., η πρόταση «*clsϵcls*», που είναι συνέπεια του ορισμού αυτού, απαιτεί το «*cls*» να έχει διαφορετικό νόημα στις δύο θέσεις όπου εμφανίζεται. Το σύμβολο «*cls*» μπορεί να χρησιμοποιείται μόνο εκεί όπου δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τον τύπο· έχει μία αμφισημία που προσαρμόζεται στις περιστάσεις. Αν εισαχθεί ως μη οριστή η συνάρτηση «Indiv!x», που διαβάζεται « το x είναι ένα άτομο», μπορούμε να θέσουμε:

$$Kl = \hat{\alpha}\{(\exists\, \varphi).\alpha = \hat{z}(\varphi!z.\mathrm{Indiv}!z)\}\ Df.$$

Τότε το Kl δεν είναι αμφίσημο σύμβολο και σημαίνει «σύνολα ατόμων».

Θα χρησιμοποιούμε πεζά γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου (εκτός από τα ϵ, φ, ψ, χ, θ) για να παριστάνουμε σύνολα οποιουδήποτε τύπου, δηλ. ως αντιπροσώπους συμβόλων της μορφής $\hat{z}(\varphi!z)$ ή $\hat{z}(\varphi z)$.

Από αυτό το σημείο η θεωρία των συνόλων αναπτύσσεται όπως στο σύστημα του Peano· το $\hat{z}(\varphi z)$ αντικαθιστά το $z\ni(\varphi z)$. Ορίζω λοιπόν:

$$\alpha \subset \beta. = :x\epsilon\alpha.\supset_x.x\epsilon\beta\ Df,$$

$$\exists!\alpha. = .(\exists x).x\epsilon\alpha\ Df,$$

$$V = \hat{x}(x = x)\ Df,$$

$$\Lambda = \hat{x}\{\sim(x = x)\}\ Df,$$

όπου το Λ, όπως και στον Peano, είναι το κενό σύνολο. Τα σύμβολα $\exists$, Λ, V, όπως και τα *cls* και ϵ, είναι αμφίσημα, και αποκτούν καθορισμένο νόημα, όταν ο τύπος τους προσδιοριστεί με άλλο τρόπο.

Μελετούμε τις σχέσεις με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, και θέτουμε:

$$a\{\varphi!(\hat{x}, \hat{y})\}b. = .\varphi!(a,b)\ Df,$$

(όπου η σειρά καθορίζεται από την αλφαβητική σειρά των x και y και την τυπογραφική σειρά των a και b)· επομένως,

$$\vdash:.a\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\}b.\equiv:(\exists\varphi):\psi(x,y).\equiv_{x,y}.\varphi!(x,y):\varphi!(a,b),$$

και, σύμφωνα με το αξίωμα της αναγωγιμότητας,

$$\vdash:a\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\}b.\equiv.\psi(a,b).$$

Χρησιμοποιούμε λατινικά κεφαλαία ως επιβραχύνσεις συμβόλων όπως το $\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)$ και βρίσκουμε:

$$\vdash:.R = S.\equiv:xRy.\equiv_{x,y}.xSy,$$

όπου

$$R = S. = :f!R.\supset_f.f!S\ Df.$$

Θέτουμε

$$\mathrm{Rel} = \hat{R}\{(\exists\varphi).R = \hat{x}\hat{y}\varphi!(x,y)\}\ Df,$$

και βρίσκουμε ότι όλα όσα αποδείχθηκαν για τα σύνολα έχουν το ανάλογό τους για τις διμελείς σχέσεις. Ακολουθώντας τον Peano, θέτουμε

$$\alpha\cap\beta = \hat{x}(x\epsilon\alpha.x\epsilon\beta)\ Df,$$

που ορίζει το γινόμενο, ή το κοινό μέρος, δύο συνόλων·

$$\alpha\cup\beta = \hat{x}(x\epsilon\alpha.v.x\epsilon\beta)\ Df,$$

που ορίζει το άθροισμα δύο συνόλων· και

$$-\alpha = \hat{x}\{\sim(x\epsilon\alpha)\}\ Df,$$

που ορίζει το αρνητικό ενός συνόλου. Ανάλογα, για τις σχέσεις γράφουμε:

$$R\dot{\cap}S = \hat{x}\hat{y}(xRy.xSy)\ Df,$$
$$R\dot{\cup}S = \hat{x}\hat{y}(xRy.v.xSy)\ Df,$$
$$\dot{-}R = \hat{x}\hat{y}\{\sim(xRy)\}\ Df.$$

VIII. *Περιγραφικές συναρτήσεις*

Έως τώρα εξετάσαμε προτασιακές συναρτήσεις, εκτός από μερικές ειδικές συναρτήσεις, όπως η $R\dot{\cap}S$. Αλλά οι κοινές συναρτήσεις των μαθηματικών, όπως η x^2, sin$x$, log$x$, δεν είναι προτασιακές. Οι συναρτήσεις αυτού του είδους πάντα σημαίνουν «ο όρος που έχει με τον x αυτή-και-αυτή τη σχέση». Γι' αυτόν το λόγο μπορούμε να τις ονομάσουμε *περιγραφικές* συναρτήσεις, γιατί *περιγράφουν* έναν ορισμένο όρο μέσω της σχέσης του με το όρισμά τους. Έτσι, το «sin π/2» περιγράφει τον αριθμό 1· ωστόσο οι προτάσεις στις οποίες παρουσιάζεται το sin π/2 δεν συμπίπτουν με τις προτάσεις που προκύπτουν, όταν το αντικαταστήσουμε με το 1. Αυτό φαίνεται, λ.χ., από την πρόταση «sin π/2 = 1», που μας δίνει πολύτιμη πληροφορία, ενώ η «1 = 1» είναι κοινότοπη. Οι περιγραφικές συναρτήσεις δεν έχουν νόημα από μόνες τους, αλλά μόνο ως συστατικά προτάσεων· και αυτό ισχύει γενικά για φράσεις της μορφής «ο όρος που έχει αυτή-και-αυτή την ιδιότητα». Όταν, λοιπόν, μελετάμε τέτοιες φράσεις, πρέπει να ορίσουμε την πρόταση στην οποία παρουσιάζονται, όχι τις ίδιες τις φράσεις[27]. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό, στον οποίο το «'$(\iota x)(\varphi x)$'» διαβάζεται «ο όρος x που ικανοποιεί την φx».

$$\psi\{(\iota x)(\varphi x)\}. = :(\exists b)\varphi x.\equiv_x.x = b:\psi b\ Df.$$

Αυτός ο ορισμός λέει ότι η «Ο όρος που ικανοποιεί την φ ικανοποιεί την ψ» θα σημαίνει: «Υπάρχει ένας όρος b τέτοιος ώστε η φx να είναι αληθής τότε και μόνο τότε όταν το x συμπίπτει με το b και η ψb είναι αληθής». Έτσι, όλες οι προτάσεις για «το αυτό-και-αυτό» θα είναι ψευδείς, αν δεν υπάρχουν τέτοια αντικείμενα ή αν υπάρχουν περισσότερα τέτοια αντικείμενα.

Ο γενικός ορισμός της περιγραφικής συνάρτησης είναι:

$$R‘y = (\iota x)(xRy) \ \ Df,$$

δηλ. το «$R‘y$» θα σημαίνει «ο όρος που έχει τη σχέση *R με το y*».

Αν υπάρχουν διάφοροι όροι (ή κανένας) που έχουν τη σχέση *R* με τον *y*, όλες οι προτάσεις για το *R‘y* θα είναι ψευδείς. Θέτουμε:

$$E!(\iota x)(\varphi x). = :(\exists b) : \varphi x. \equiv_x . x = b \ \ Df.$$

Εδώ το «$E!(\iota x)(\varphi x)$» μπορεί να διαβαστεί ως «υπάρχει κάποιος όρος, όπως ο *x*, που ικανοποιεί την φx» ή «υπάρχει ο *x* που ικανοποιεί την φx». Έχουμε:

$$\vdash :. E!R‘y. \equiv :(\exists b):xRy. \equiv_x . x = b\,.$$

Η ανάστροφη απόστροφος στο *R‘y* μπορεί να διαβαστεί ως *του*. Έτσι, αν *R* είναι η σχέση του πατέρα προς το γιο, η '*R‘y*' είναι η «ο πατέρας του *y*». Αν *R* είναι η σχέση του γιου προς τον πατέρα, όλες οι προτάσεις γύρω από το *R‘y* θα είναι ψευδείς, εκτός αν ο *y* έχει μόνο ένα γιο.

Από τα προηγούμενα φαίνεται ότι οι περιγραφικές συναρτήσεις προκύπτουν από σχέσεις. Οι σχέσεις που θα ορίσουμε τώρα έχουν σπουδαιότητα κυρίως εξαιτίας των περιγραφικών συναρτήσεων που πηγάζουν από αυτές:

$$Cnv = \hat{Q}\hat{P}\{xQy. \equiv_{x,y} . yPx\} \ \ Df.$$

Εδώ το *Cnv* είναι σύντμηση της λέξης «αντίστροφο» (converse). Είναι η σχέση μιας σχέσης με την αντίστροφή της· λ.χ. του *μεγαλύτερου* προς το *μικρότερο*, του πατέρα προς το γιο, του πρότερου προς το ύστερο κτλ. Έχουμε

$$\vdash . Con‘P = (\iota Q)\{xQy. \equiv_{x,y} . yPx\}\,.$$

Για να έχουμε βραχύτερα σύμβολα, που συχνά είναι πιο βολικά, γράφουμε:

$$\breve{P} = Cnv‘P \ \ Df.$$

Χρειαζόμαστε τώρα ένα σύμβολο για το σύνολο των όρων που έχουν την σχέση *R* προς τον *y*. Γι' αυτόν το σκοπό γράφουμε:

$$\vec{R} = \hat{\alpha}\hat{y}\{\alpha = \hat{x}(xRy)\} \ \ Df,$$

από το οποίο:

$$\vdash . \vec{R}‘y = \hat{x}(xRy)\,.$$

Ομοίως γράφουμε

$$\overleftarrow{R} = \hat{\beta}\hat{x}\{\beta = \hat{y}(xRy)\} \ \ Df,$$

από όπου:

$$\vdash . \overleftarrow{R}‘x = \hat{y}(xRy)\,.$$

Τώρα χρειαζόμαστε το *πεδίο ορισμού* της *R* (δηλ. το σύνολο των όρων που έχουν τη σχέση *R* με κάτι), το *πεδίο τιμών* της *R* (δηλαδή το σύνολο των όρων με τους οποίους κάτι έχει τη σχέση *R*) και το *συνολικό πεδίο* της *R*, που είναι το άθροισμα του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών. Οι ορισμοί είναι:

$$D = \hat{\alpha}\hat{R}\{\alpha = \hat{x}((\exists y).xRy)\} \ \ Df,$$
$$Ɑ = \hat{\beta}\hat{R}\{\beta = \hat{y}((\exists x).xRy)\} \ \ Df,$$
$$C = \hat{\gamma}\hat{R}\{\gamma = \hat{x}((\exists y):xRy. \vee .yRx)\} \ \ Df.$$

Ας σημειωθεί ότι ο τρίτος ορισμός έχει νόημα μόνο όταν η *R* είναι αυτό που θα ονόμαζα *ομοιογενής* σχέση, δηλ. μια σχέση στην οποία, αν ισχύει ότι *xRy*, τα *x* και τα *y* έχουν τον ίδιο τύπο. Γιατί αλλιώς, όπως κι αν επιλέξουμε τα *x* και *y*, είτε η *xRy* είτε η *yRx* δεν έχει νόημα. Η παρατήρηση αυτή είναι σημαντική για την αντινομία του Burali-Forti.

Δυνάμει των ορισμών που δόθηκαν πιο πάνω, έχουμε:

$$\vdash . D‘R = \hat{x}\{\exists y).xRy\}\,,$$
$$\vdash Ɑ‘P = \hat{y}\{(\exists x).xRy\}\,,$$
$$\vdash . C‘R = \hat{x}\{(\exists y):xRy. \vee .yRx\}\,,$$

όπου η τελευταία έχει νόημα μόνο όταν η *R* είναι ομοιογενής.

Το «*D‘P*» διαβάζεται «το πεδίο ορισμού της *R*· το «Ɑ‘R» διαβάζεται το «συνολικό πεδίο τιμών της *R*» και το «*C‘R* διαβάζεται «το συνολικό πεδίο της *R*». Το γράμμα *C* επιλέχθηκε επειδή είναι το αρχικό της λέξης campus.

Τώρα χρειαζόμαστε ένα σύμβολο για τη σχέση ανάμεσα σε ένα σύνολο α, που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της *R*, και στο σύνολο των όρων με τους οποίους κάποιο μέλος της α έχει τη σχέση *R*· και ένα σύμβολο για τη σχέση ανάμεσα σε ένα σύνολο β, που περιέχεται στο πεδίο τιμών της *R*, και στο σύνολο των όρων που έχουν τη σχέση *R* με κάποιο μέλος του β. Για τη δεύτερη γράφουμε

$$R_\epsilon = \hat{\alpha}\hat{\beta}\{\alpha = \hat{x}((\exists y).y\epsilon\beta.xRy)\} \ \ Df,$$

Επομένως,

$$\vdash . R_\epsilon‘\beta = \hat{x}\{(\exists y)\epsilon\beta.xRy\}\,.$$

Αν, λ.χ., η *R* είναι η σχέση του πατέρα προς το γιο και β είναι το σύνολο των μαθητών του Eton, $R_\epsilon‘\beta$ θα είναι το σύνολο «πατέρες μαθητών του

Έτσι»· αν R είναι η σχέση «μικρότερος από» και β είναι το σύνολο των γνήσιων κλασμάτων της μορφής $1 - 2^{-\nu}$ για ακέραιες τιμές του ν, $R_\epsilon`\beta$ θα είναι το σύνολο των κλασμάτων που είναι μικρότερα από κάποιο κλάσμα της μορφής $1 - 2^{-\nu}$· δηλαδή το $R`\beta$ θα είναι το σύνολο των γνήσιων κλασμάτων. Η άλλη σχέση που αναφέραμε πιο πάνω είναι $(\breve{R})_\epsilon$.

Ως εναλλακτικό συμβολισμό, που συχνά είναι πιο πρόσφορος, θέτουμε:

$$R``\beta = R_\epsilon`\beta \quad Df.$$

Το *σχετικό γινόμενο* δύο σχέσεων R και S είναι η σχέση που ισχύει ανάμεσα στο x και z κάθε φορά που υπάρχει ένας όρος y τέτοιος ώστε να ισχύουν οι xRy και ySz. Το σχετικό γινόμενο συμβολίζεται με R/S. Έτσι:

$$R/S = \hat{x}\hat{z}\{(\exists y).xRy.ySz\} \quad Df.$$

Γράφουμε επίσης

$$R^2 = R/R \quad Df.$$

Συχνά χρειαζόμαστε το γινόμενο και το άθροισμα ενός συνόλου από σύνολα. Ορίζονται ως εξής:

$$s`k = \hat{x}\{(\exists\alpha).\alpha\epsilon k.x\epsilon\alpha\} \quad Df.$$
$$p`k = \hat{x}\{\alpha\epsilon k.\supset_\alpha.x\epsilon\alpha.\} \quad Df.$$

Κατ' αναλογίαν, για τις σχέσεις γράφουμε:

$$\dot{s}`\lambda = \hat{x}\hat{y}\{(\exists R).R\epsilon\lambda.xRy\} \quad Df,$$
$$\dot{p}`\lambda = \hat{x}\hat{y}\{R\epsilon\lambda.\supset_R.xRy\} \quad Df.$$

Χρειαζόμαστε ένα συμβολισμό για το σύνολο του οποίου μόνο μέλος είναι το x. Ο Peano χρησιμοποιεί το ιx, γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το $\iota`x$. Ο Peano έδειξε (και ο Frege τόνισε) ότι το σύνολο αυτό δεν συμπίπτει με το x. Σύμφωνα με τη συνηθισμένη άποψη για τα σύνολα, η ανάγκη μιας τέτοιας διάκρισης παραμένει ένα μυστήριο· αλλά με την άποψη που προτείνουμε, γίνεται προφανής. Θέτουμε:

$$\iota = \hat{\alpha}\hat{x}\{\alpha = \hat{y}(y = x)\} \quad Df,$$

από τον οποίο

$$\vdash.\iota`x = \hat{y}(y = x),$$

και

$$\vdash:E!\breve{\iota}`\alpha.\supset.\breve{\iota}`\alpha = (\imath x)(x\epsilon\alpha).$$

δηλ. αν το α είναι ένα σύνολο που έχει μόνο ένα μέλος, τότε $\breve{\iota}`\alpha$ είναι αυτό το ένα μέλος[28].

Για το σύνολο των συνόλων που περιέχονται σε ένα ορισμένο σύνολο, γράφουμε

$$Cl`\alpha = \hat{\beta}(\beta\subset\alpha) \quad Df.$$

Μπορούμε τώρα να περάσουμε στους πληθικούς και στους διατακτικούς αριθμούς, καθώς και στη μελέτη του τρόπου με τον οποίο επηρεάζονται από τη θεωρία των τύπων.

IX. *Πληθικοί αριθμοί*

Ο πληθικός αριθμός [ή πληθάριθμος] ενός συνόλου α ορίζεται ως το σύνολο όλων των συνόλων που είναι *όμοια* με το α. Δύο σύνολα είναι όμοια, όταν ανάμεσά τους υπάρχει μία σχέση ένα-προς-ένα [αμφιμονοσήμαντη]. Το σύνολο των σχέσεων ένα-προς-ένα συμβολίζεται με $1\rightarrow1$ και ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$1\rightarrow1 = \hat{R}\{xRy.x'Ry.xRy'.\supset_{x,y,x',y'}.x = x'.y = y'\} \quad Df.$$

Η ομοιότητα συμβολίζεται με το *Sim* [από το similis]· ο ορισμός της είναι:

$$Sim = \hat{\alpha}\hat{\beta}\{(\exists R).R\epsilon1\rightarrow1.D`R = \alpha.Cl`R = \beta\} \quad Df.$$

Εξ ορισμού λοιπόν ο πληθικός αριθμός του α είναι $\overrightarrow{Sim}`\alpha$ και τον γράφουμε $Nc`\alpha$· επομένως θέτουμε:

$$Nc = \overrightarrow{Sim} \quad Df.$$

από το οποίο απορρέει ότι:

$$\vdash.Nc`\alpha = \overrightarrow{Sim}`\alpha.$$

Με *NC* [αρχικά του cardinal number] συμβολίζουμε το σύνολο των πληθικών αριθμών· ώστε:

$$NC = Nc``cls \quad Df.$$

Ο αριθμός *0* ορίζεται ως το σύνολο του οποίου μοναδικό στοιχείο είναι το κενό σύνολο Λ· ώστε:

$$0 = \iota`\Lambda \quad Df.$$

Ο ορισμός του *1* είναι:

$$1 = \hat{\alpha}\{(\exists c):x\epsilon\alpha.\equiv_x.x = c\}Df.$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι ο *0* και ο *1* είναι πληθικοί αριθμοί σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε.

Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι ο *0* και ο *1*, και όλοι οι άλλοι πληθικοί αριθμοί, σύμφωνα με τους ορισμούς που δόθηκαν πιο πάνω, είναι αμφίσημα σύμβολα, όπως το *cls*, και έχουν τόσα νοήματα όσοι είναι οι τύποι. Αρχίζοντας με τον 0: το νόημα του 0 εξαρτάται από το νόημα του Λ και το νόημα του Λ διαφέρει ανάλογα με τον τύπο του οποίου είναι το κενό σύνολο. Ώστε υπάρχουν τόσοι 0 όσοι είναι οι τύποι. Το ίδιο ισχύει για όλους τους άλλους πληθικούς αριθμούς. Ωστόσο, αν δύο σύνολα α και β είναι διαφορετικών τύπων, μπορούμε να λέμε ότι έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό ή ότι ο πληθικός αριθμός του ενός είναι μεγαλύτερος από τον πληθικό αριθμό του άλλου, γιατί μπορεί να υπάρχει μία σχέση ένα-προς-ένα ανάμεσα στα μέλη του α και τα μέλη του β, ακόμα κι αν τα α και β είναι διαφορετικών τύπων. Λόγου χάρη, έστω ότι β είναι το $\iota''\alpha$, δηλ. το σύνολο του οποίου μέλη είναι τα σύνολα που αποτελούνται από μεμονωμένα μέλη του α. Τότε ο τύπος του $\iota''\alpha$ είναι μεγαλύτερος από τον τύπο του α, αλλά το $\iota''\alpha$ είναι όμοιο με το α, αφού συσχετίζεται με το α μέσω της αμφιμονοσήμαντης σχέσης ι.

Η ιεραρχία των τύπων έχει σημαντικές επιπτώσεις στην πρόσθεση. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο με α όρους και ένα σύνολο με β όρους, όπου τα α και β είναι πληθάριθμοι. Μπορεί να είναι αδύνατον να τους προσθέσουμε για να έχουμε ένα σύνολο με α και β όρους, αφού, αν τα σύνολα δεν έχουν τον ίδιο τύπο, το λογικό άθροισμά τους δεν έχει νόημα. Αν έχουμε να κάνουμε με έναν πεπερασμένο αριθμό συνόλων, μπορούμε να υπερπηδήσουμε τις πρακτικές δυσκολίες, επειδή είναι πάντα δυνατόν, με κατάλληλες πράξεις, να επαυξήσουμε τον τύπο ενός συνόλου όσο χρειάζεται, χωρίς μ' αυτό να αλλοιώσουμε τον πληθάριθμό του. Λόγου χάρη, αν δοθεί το σύνολο α, το σύνολο $\iota''\alpha$ έχει τον ίδιο πληθάριθμο, αλλά τύπο αμέσως ανώτερο του α. Επομένως, όταν δοθεί ένας πεπερασμένος αριθμός συνόλων διάφορων τύπων, μπορούμε να αυξήσουμε τον τύπο όλων των συνόλων έως τον τύπο που θα μπορούσαμε να ονομάσουμε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τύπων των συνόλων· και μπορεί κανείς να αποδείξει ότι αυτό είναι δυνατόν να γίνει έτσι ώστε τα σύνολα που προκύπτουν να μην έχουν κοινά μέλη. Μπορούμε τότε να σχηματίσουμε το λογικό άθροισμα όλων των νέων συνόλων και ο πληθάριθμός του θα είναι ο άθροισμα των πληθαρίθμων των αρχικών συνόλων. Αλλά η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να εφαρμοσθεί, αν έχουμε μία άπειρη σειρά συνόλων με αύξοντες τύπους. Γι' αυτόν το λόγο, δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι πρέπει να υπάρχουν άπειρα σύνολα. Διότι, ας υποθέσουμε ότι στο σύμπαν υπήρχαν μόνο ν άτομα, όπου ο ν είναι πεπερασμένος. Τότε θα υπήρχαν 2^ν σύνολα ατόμων, 2^{2^ν} σύνολα συνόλων από άτομα κ.ο.κε. Ώστε ο πληθάριθμος των όρων κάθε τύπου θα ήταν πεπερασμένος· και, μολονότι αυτοί οι αριθμοί θα αυξάνονταν και θα ξεπερνούσαν κάθε προσδιορισμένο πεπερασμένο αριθμό, δεν θα υπήρχε κανένας τρόπος να τους προσθέσουμε ώστε να έχουμε έναν

άπειρο αριθμό. Επομένως, όπως φαίνεται, χρειαζόμαστε ένα αξίωμα που να λέει ότι κανένα πεπερασμένο σύνολο από άτομα δεν περιέχει όλα τα άτομα· αλλά αν κάποιος θέλει να υποθέσει ότι ο συνολικός αριθμός των ατόμων του σύμπαντος είναι, ας πούμε 10.367, δεν φαίνεται να υπάρχει a priori τρόπος να αντικρούσουμε τη γνώμη του.

Από τον τρόπο σκέψης που εκθέσαμε, είναι φανερό ότι η θεωρία των τύπων αποφεύγει όλες τις δυσκολίες όσον αφορά τον μέγιστο πληθάριθμο. Σε κάθε τύπο υπάρχει ένας μέγιστος πληθάριθμος, ο πληθάριθμος όλου του τύπου· αλλά τον υπερβαίνει πάντα ο αριθμός του αμέσως ανώτερου τύπου, αφού, αν ο πληθάριθμος του ενός τύπου είναι α, ο πληθάριθμος του επόμενου τύπου είναι 2^α, και, όπως έδειξε ο Cantor, αυτός είναι πάντα μεγαλύτερος του α. Εφόσον δεν είναι δυνατόν να προσθέσουμε διαφορετικούς τύπους, δεν μπορούμε να μιλάμε για τον «πληθάριθμο όλων των αντικειμένων οποιουδήποτε τύπου», και, επομένως, δεν υπάρχει απόλυτα μέγιστος πληθάριθμος.

Αν δεχθούμε ότι κανένα σύνολο ατόμων δεν περιέχει όλα τα άτομα, τότε υπάρχουν σύνολα ατόμων που έχουν οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό. Επομένως, όλοι οι πεπερασμένοι πληθάριθμοι υπάρχουν ως ατομικοί πληθάριθμοι, δηλ. ως πληθάριθμοι συνόλων από άτομα. Άρα υπάρχει ένα σύνολο με $\aleph_0$ πληθαρίθμους, δηλ. το σύνολο των πεπερασμένων πληθαρίθμων. Επομένως, ο $\aleph_0$ υπάρχει ως ο πληθάριθμος ενός συνόλου από σύνολα συνόλων από άτομα. Όταν σχηματίσουμε όλα τα σύνολα πεπερασμένων πληθαρίθμων, βρίσκουμε ότι υπάρχει ο $2^{\aleph_0}$ ως πληθάριθμος ενός συνόλου που αποτελείται από σύνολα συνόλων από σύνολα ατόμων· έτσι μπορούμε να προχωρήσουμε απεριόριστα. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ο $\aleph_\nu$ για κάθε πεπερασμένη τιμή του ν· αυτό όμως απαιτεί τη χρήση των διατακτικών αριθμών.

Αν στην παραδοχή ότι κανένα πεπερασμένο σύνολο δεν περιέχει όλα τα άτομα, προσθέσουμε την παραδοχή του πολλαπλασιαστικού αξιώματος (δηλαδή του αξιώματος ότι, όταν δοθεί μια οικογένεια από μη κενά ξένα ανά δύο σύνολα, υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία αποτελούνται από ένα μέλος από κάθε σύνολο της οικογένειας), τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο από άτομα που περιέχει $\aleph_0$ μέλη· ώστε ο $\aleph_0$ θα υπάρχει ως ατομικός πληθάριθμος. Αυτό ελαττώνει κάπως τον τύπο στον οποίο πρέπει να φτάσουμε για να αποδείξουμε το θεώρημα ύπαρξης για κάθε δεδομένο πληθάριθμο, αλλά δεν μας δίνει κανένα θεώρημα ύπαρξης στο οποίο να μη φτάνουμε αργά ή γρήγορα.

Πολλά από τα στοιχειώδη θεωρήματα των πληθαρίθμων απαιτούν το πολλαπλασιαστικό αξίωμα[29]. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτό το αξίωμα ισοδυναμεί με το αξίωμα του Zermelo[30], και άρα με την παραδοχή ότι κάθε σύνολο επιδέχεται καλή διάταξη[31]. Φαίνεται πως όλες αυτές οι ισοδύναμες παραδοχές είναι αδύνατον να αποδειχθούν, μολονότι το πολλαπλασιαστικό αξίωμα φαίνεται τουλάχιστον να είναι εντελώς πρόδηλο αφ' εαυτού. Εφόσον το πολλαπλασιαστικό αξίωμα δεν έχει αποδειχθεί, καλύτερα να μην το δεχθούμε [ως αρχή], αλλά κάθε φορά που το χρησιμοποιούμε να το βάζουμε σαν υπόθεση [από την οποία απορρέει αυτό που αποδεικνύουμε].

X. *Διατακτικοί αριθμοί*

Διατακτικός αριθμός είναι το σύνολο των διατακτικά όμοιων καλά διατεταγμένων σειρών, δηλ. των σχέσεων που γεννούν τέτοιες σειρές. Η διατακτική *ομοιότητα* ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$Smor = \hat{P}\hat{Q}\{(\exists S).S\epsilon 1\rightarrow 1.\text{G}'S = C'Q.P = S|Q|\breve{S}\} \;\; Df\,,$$

όπου το σύμβολο 'Smor' είναι επιβράχυνση του similar ordinally [διατακτικά όμοιο].

Το σύνολο των σειραϊκών σχέσεων –θα το συμβολίσουμε με το 'Ser'– ορίζεται ως εξής:

$$Ser = \hat{P}\{xPy.\supset_{x,y}.\sim(x = y):xPy.yPz\supset_{x,y,z}.xPz: \\ x\epsilon C'P.\supset_x.\vec{P}'x \cup \iota'x \cup \overleftarrow{P}'x = C'P\} \;\; Df\,.$$

Με άλλα λόγια, διαβάζοντας το P ως «προηγείται», μία σχέση είναι σειραϊκή αν: (1) κανένας όρος δεν προηγείται του εαυτού του, (2) ο πρόδρομος ενός προδρόμου είναι πρόδρομος, (3) αν ο x είναι οποιοσδήποτε όρος του συνολικού πεδίου της σχέσης, τότε οι πρόδρομοι του x μαζί με τον x και με τους διαδόχους του x αποτελούν το συνολικό πεδίο της σχέσης.

Οι καλά διατεταγμένες σειραϊκές σχέσεις –θα τις ονομάζουμε Ω– ορίζονται ως εξής:

$$\Omega = \hat{P}\{P\epsilon Ser:\alpha\subset C'P.\exists!\alpha.\supset_\alpha\exists!(\alpha-\breve{P}``\alpha)\} \;\; Df\,,$$

δηλ. η P γεννά μια καλά διατεταγμένη σειρά, αν η P είναι σειραϊκή, και κάθε σύνολο α που περιέχεται στο συνολικό πεδίο της P και δεν είναι κενό, έχει έναν πρώτο όρο. (Ας σημειωθεί ότι $\breve{P}``\alpha$ είναι οι όροι που διαδέχονται κάποιον όρο του α.)

Αν με το $No'P$ συμβολίσουμε τον διατακτικό αριθμό μιας καλά διατεταγμένης σχέσης P και με NO συμβολίσουμε το σύνολο των διατακτικών αριθμών, θα έχουμε:

$$No = \hat{\alpha}\hat{P}\{P\epsilon\Omega.\,\alpha = \overrightarrow{Smor}'P\} \;\; Df\,,$$
$$NO = No``\Omega\,.$$

Από τον ορισμό του No έχουμε:

$$\vdash:P\epsilon\Omega.\supset.No'P = \overrightarrow{Smor}'P\,,$$
$$\vdash:\sim(P\epsilon\Omega).\supset.\sim E!No'P\,.$$

Αν τώρα εξετάσουμε τους ορισμούς μας για να δούμε τη σχέση τους με τη θεωρία των τύπων, βλέπουμε πρώτ' απ' όλα ότι στους ορισμούς των 'Ser' και Ω υπεισέρχονται τα *συνολικά πεδία* σειραϊκών σχέσεων. Αλλά το πεδίο έχει σημασία μόνο όταν η σχέση είναι ομοιογενής· επομένως, οι σχέσεις που δεν είναι ομοιογενείς δεν γεννούν σειρές. Λόγου χάρη, θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ότι η σχέση ι γεννά σειρές των οποίων ο διατακτικός αριθμός είναι ω, όπως είναι η

$$x,\, \iota'x, \iota'\iota'x, \,\ldots\,, \iota^{m}{}'x, \,\ldots\,,$$

και, μ' αυτόν τον τρόπο μπορεί να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη του ω και του $\aleph_0$. Αλλά τα x και $\iota'x$ έχουν διαφορετικούς τύπους, και, επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό, δεν υπάρχει μία τέτοια σειρά.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό του No ο διατακτικός αριθμός μιας σειράς από άτομα είναι ένα σύνολο σχέσεων ανάμεσα σε άτομα. Αυτός είναι λοιπόν, διαφορετικού τύπου από ό,τι τα άτομα και δεν μπορεί να ανήκει σε καμία σειρά στην οποία παρουσιάζονται άτομα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι όλοι οι πεπερασμένοι αριθμοί υπάρχουν ως ατομικοί διατακτικοί, δηλ. ως διατακτικοί σειρών από άτομα. Τότε οι ίδιοι οι πεπερασμένοι διατακτικοί αποτελούν μία σειρά της οποίας διατακτικός αριθμός είναι ο ω· ώστε ο ω υπάρχει ως διατακτικός-διατακτικός, δηλαδή ως διατακτικός μιας σειράς διατακτικών. Αλλά ο τύπος ενός διατακτικού-διατακτικού είναι ο τύπος ενός συνόλου σχέσεων συνόλων σχέσεων ανάμεσα σε άτομα. Έτσι αποδείξαμε την ύπαρξη του ω σε τύπο ανώτερο εκείνου των πεπερασμένων διατακτικών. Εξάλλου, ο πληθάριθμος των διατακτικών αριθμών των καλά διατεταγμένων σειρών που μπορούν να σχηματισθούν από πεπερασμένους διατακτικούς είναι $\aleph_1$· άρα ο $\aleph_1$ υπάρχει σε τύπο συνόλου συνόλων από σύνολα σχέσεων ανάμεσα σε σύνολα σχέσεων μεταξύ ατόμων. Επίσης, οι διατακτικοί αριθμοί των καλά διατεταγμένων σειρών που απαρτίζονται από πεπερασμένους διατακτικούς μπορούν να διαταχθούν κατά σειρά μεγέθους, και το αποτέλεσμα είναι μία καλά διατεταγμένη σειρά της οποίας ο διατακτικός αριθμός είναι ω_1. Επομένως, ο ω_1 υπάρχει ως διατακτικός-διατακτικός-διατακτικός. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί ν φορές, όπου ν είναι οποιοσδήποτε πεπερασμένος αριθμός, και έτσι μπορούμε να δείξουμε την ύπαρξη, σε κατάλληλους τύπους, των $\aleph_\nu$ και ω_ν.

Η διαδικασία γένεσης, που μόλις περιγράψαμε, δεν οδηγεί όμως σε μία ολότητα *όλων* των διατακτικών αριθμών, γιατί αν πάρουμε όλους τους διατακτικούς αριθμούς ενός δεδομένου τύπου, υπάρχουν μεγαλύτεροι διατακτικοί ανώτερου τύπου· και δεν μπορούμε να προσθέσουμε μία οικογένεια διατακτικών της οποίας ο τύπος να υπερβαίνει κάθε πεπερασμένο όριο. Ώστε όλοι οι διατακτικοί ενός τύπου μπορούν να διαταχθούν κατά σειρά μεγέθους σε μία καλά διατεταγμένη σειρά της οποίας ο διατακτικός αριθμός έχει τύπο ανώτερο από τον τύπο των διατακτικών που απαρτίζουν τη σειρά. Στο νέο τύπο, ο νέος διατακτικός αριθμός δεν είναι μέγιστος. Πράγματι δεν υπάρχει μέγιστος διατακτικός σε κανέναν τύπο, αλλά σε κάθε τύπο όλοι οι διατακτικοί είναι μικρότεροι από ορισμένους διατακτικούς ανώτερου τύπου. Είναι αδύνατον να ολοκληρωθεί η σειρά των διατακτικών, αφού φτάνει σε τύπους που υπερβαίνουν κάθε προσδιορισμένο πεπερασμένο όριο· έτσι μολονότι κάθε τμήμα της σειράς των διατακτικών έχει καλή διάταξη, δεν μπορούμε να πούμε ότι όλη η σειρά έχει καλή διάταξη, διότι η [έκφραση] «όλη η σειρά» είναι πλασματική. Με αυτό εξαφανίζεται η αντινομία του Burali-Forti.

Τα δύο τελευταία κεφάλαια δείχνουν ότι, αν δεχθούμε ότι ο αριθμός των ατόμων δεν είναι πεπερασμένος, μπορεί να αποδειχθεί η ύπαρξη όλων των πληθαρίθμων και των διατακτικών αριθμών του Cantor μέχρι (αλλά χωρίς) τους $\aleph_\omega$ και ω_ω. (Είναι πολύ πιθανόν να μπορεί να αποδειχθεί η ύπαρξη και αυτών.) Μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη όλων των *πεπερασμένων* πληθαρίθμων και διατακτικών αριθμών, χωρίς να κάνουμε καμία παραδοχή σχετική με την ύπαρξη οποιουδήποτε πράγματος. Διότι, αν ο πληθάριθμος των όρων ενός τύπου είναι ν, ο πληθάριθμος των όρων του επόμενου τύπου είναι 2^ν. Επομένως, αν δεν υπάρχουν άτομα, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον σύνολο (το κενό σύνολο), δύο σύνολα συνόλων (ένα που δεν περιέχει κανένα σύνολο και ένα που περιέχει το κενό σύνολο), τέσσερα σύνολα συνόλων από σύνολα, και γενικά $2^{\nu-1}$ σύνολα του νυοστού βαθμού. Αλλά δεν μπορούμε να αθροίσουμε όρους διαφορετικού τύπου και, επομένως, δεν μπορούμε να ελπίζουμε ότι μ' αυτόν τον τρόπο θα αποδείξουμε την ύπαρξη ενός άπειρου συνόλου.

Τώρα μπορούμε να ανακεφαλαιώσουμε ολόκληρη τη συζήτηση. Αφού εκθέσαμε μερικά λογικά παράδοξα, ανακαλύψαμε ότι όλα τους οφείλονται στο ότι μία έκφραση, που αναφέρεται σε *όλα* [τα στοιχεία] ενός συλλέγματος, μπορεί η ίδια να φαίνεται ότι αναφέρεται σε ένα στοιχείο του συλλέγματος· όπως, λ.χ., η «όλες οι προτάσεις είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς» φαίνεται να είναι μια πρόταση. Αποφασίσαμε ότι, εκεί όπου συμβαίνει κάτι τέτοιο, έχουμε να κάνουμε με μία ανύπαρκτη ολότητα και πως, στην πραγματικότητα, ό,τι πούμε για *όλα* τα στοιχεία ενός συλλέγματος δεν μπορεί να έχει νόημα. Για να γίνει αποτελεσματική αυτή η απόφαση, εξηγήσαμε τη θεωρία των *τύπων* για μεταβλητές, ακολουθώντας την αρχή ότι κάθε έκφραση που αναφέρεται σε *όλα* τα στοιχεία κάποιου τύπου, πρέπει, αν αναφέρεται σε κάτι, να αναφέρεται σε κάτι του οποίου ο τύπος είναι ανώτερος από τον τύπο όλων των στοιχείων στα οποία αναφέρεται. Όπου

γίνεται αναφορά σε *όλα* [τα στοιχεία] ενός τύπου, εκεί υπάρχει μία *φαινομενική μεταβλητή* που ανήκει σ' αυτόν τον τύπο. Έτσι, *κάθε έκφραση που περιέχει μία φαινομενική μεταβλητή έχει τύπο ανώτερο από ό,τι αυτή η μεταβλητή*. Αυτή είναι η θεμελιώδης αρχή της θεωρίας των τύπων. Μία αλλαγή στον τρόπο κατασκευής των τύπων, αν θα ήταν απαραίτητη, δεν θα επηρέαζε τη λύση των αντιφάσεων, εφόσον θα τηρούσε αυτή τη θεμελιώδη αρχή. Η μέθοδος κατασκευής των τύπων που εξηγήσαμε πιο πάνω μας επέτρεψε να διατυπώσουμε όλους τους θεμελιώδεις ορισμούς των μαθηματικών και, συνάμα, να αποφύγουμε όλες τις γνωστές αντιφάσεις. Και έγινε φανερό ότι στην πράξη η θεωρία των τύπων παρεμβαίνει μόνο όταν πρόκειται για θεωρήματα ύπαρξης ή όταν πρέπει να γίνουν εφαρμογές σε κάποια ειδική περίπτωση.

Η ερμηνεία της θεωρίας των τύπων θέτει μερικά δύσκολα φιλοσοφικά ζητήματα. Ωστόσο, τα ζητήματα αυτά μπορούν ουσιαστικά να ξεχωριστούν από τη μαθηματική ανάπτυξη της θεωρίας και, όπως όλα τα φιλοσοφικά ζητήματα, εισάγουν στοιχεία αβεβαιότητας που δεν ανήκουν στην ίδια τη θεωρία. Γι' αυτό μου φάνηκε καλύτερο να εκθέσω τη θεωρία χωρίς να αναφερθώ σε φιλοσοφικά ζητήματα τα οποία πρέπει να εξεταστούν ανεξάρτητα από αυτήν.

Σημειώσεις

1. Βλ. πιο κάτω [(7)].

2. Λέμε ότι δύο προτάσεις είναι *ισοδύναμες* όταν και οι δύο είναι αληθείς ή και οι δύο είναι ψευδείς.

3. Άλλαξα το 'English' του πρωτότυπου σε 'ελληνικά'. Η μεταγλώττιση του παραδείγματος με ανάγκασε να αλλάξω τους αριθμούς. Το αγγλικό έχει 19 συλλαβές: 'The least integer not nameable in fewer than nineteen syllables' και ο αριθμός αυτός είναι ο 111.777 [Σ.τ.Ε.].

4. Ο κ. G. G. Berry της Bodleian Library μου υπέδειξε αυτή την αντίφαση.

5. Βλ. König, 'Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuum Problem', *Math. Annalen* τόμ. LXI (1905)· A.C. Dixon, 'On well-ordered aggregates', *Proc. London Math. Soc.*, Series 2, vol. IV Part I (1906)· και E. W. Hobson, 'On the Arithmetic Continuum', *στο ίδιο*. Η λύση που προτείνεται στο τελευταίο άρθρο δεν μου φαίνεται ικανοποιητική.

6. Βλ. Poincaré, 'Les mathématiques et la logique', *Revue de Métaphysique et de Morale* (Μάιος 1906), ιδιαίτερα τα μέρη VII και IX. Επίσης Peano, *Revista de Mathematica*, VIII, αρ. 5(1906), σ. 149 κ.ε.

7. 'Una questione sui numeri transfiniti', *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, vol XI (1897).

8. Βλ. το άρθρο μου 'Les paradoxes de la logique', *Revue de Métaphysique et de Morale* (Σεπτέμβριος 1906), σ. 645.

9. Όταν λέω ότι ένα σύλλεγμα δεν έχει άθροισμα, εννοώ ότι στερούνται νοήματος οι δηλώσεις που αφορούν *όλα* τα μέλη του. Επιπλέον, θα βρούμε ότι η χρήση αυτής της αρχής προϋποθέτει τη διάκριση ανάμεσα στο *όλα* και το *οποιοδήποτε*, που εξηγούμε στο Κεφάλαιο II.

10. Οι δύο αυτοί όροι οφείλονται στον Peano ο οποίος τους χρησιμοποιεί με την ίδια περίπου σημασία όπως κι εμείς. Βλ. το έργο του *Formulaire de Mathématiques* (Τορίνο, 1903) τόμ. IV, σ. 5.

11. Ο κ. Mac Coll λέει ότι οι 'προτάσεις' διαιρούνται σε τρεις τάξεις: βέβαιες, μεταβλητές και αδύνατες. Μπορούμε να δεχθούμε τη διαίρεση αυτή για προτασιακές συναρτήσεις. Είναι βέβαιη η συνάρτηση που μπορούμε να βεβαιώσουμε, αδύνατη αν μπορούμε να την αρνηθούμε, και όλες οι άλλες είναι μεταβλητές (με την έννοια του κ. Mac Coll).

12. Βλ. το έργο του *Grundgesetze der Arithmetik* (Ιένα, 1893), τόμ. I, § 17, σ. 31.

13. Ο Russell γράφει 'premises to the effect that'. Τον όρο *premise*, από το λατινικό praemissa propositio ή sententia, τον αποδίδω ως 'προκείμενη' πρόταση ή απόφανση [Σ.τ.Ε.].

14. Αυτό δεν διαφέρει από το 'όλες οι ιδιότητες'.

15. Το *βεληνεκές* (scope) μιας πραγματικής μεταβλητής είναι όλη η συνάρτηση για 'οποιαδήποτε τιμή' της οποίας μιλάμε. Έτσι στην 'η *φx* συνεπάγεται την *p*' το βεληνεκές του *x* δεν είναι η *φx*, αλλά η '*φx* συνεπάγεται *p*'.

16. *Logic*, Πρώτο μέρος, 2ο Κεφάλαιο [1883].

17. Βλ. 'On Denoting', *Mind* (Οκτώβριος 1905). [Ελλ. μετάφραση με τον τίτλο 'Υποσήμανση', *Δευκαλίων 15*, Σεπτέμβριος 1975].

18. Λέμε ότι μία συνάρτηση έχει σημασία για το όρισμα *x*, αν έχει τιμή γι' αυτό το όρισμα. Έτσι, για συντομία, μπορούμε να πούμε 'το *φx* έχει σημασία' και να εννοούμε 'η συνάρτηση *φ* έχει τιμή για το όρισμα *x*'. Το πεδίο σημασίας μιας συνάρτησης αποτελείται

από όλα τα ορίσματα για τα οποία η συνάρτηση είναι αληθής, μαζί με όλα τα ορίσματα για τα οποία είναι ψευδής.

19. Μία γλωσσικά εύστοχη έκφραση αυτής της ιδέας είναι: «η *φx* είναι αληθής για όλες τις *δυνατές* τιμές του *x*»· με «δυνατή τιμή» εννοούμε μία τιμή για την οποία η *φx* έχει σημασία.

20. Λόγου χάρη, από τον κ. Poincaré, 'Les Mathématiques et la logique', *Revue de métaphysique et de Morale*, Μάιος 1906.

21. Βλέπε *Principles of Mathematics*, § 48 [1903· 2η έκδοση χ.χ.].

22. Σε ένα προηγούμενο άρθρο μου, στο ίδιο περιοδικό, πήρα ως μη οριζόμενη τη συνεπαγωγή αντί της διάζευξης. Η επιλογή είναι ζήτημα προτίμησης· τώρα επιλέγω τη διάζευξη, επειδή μας επιτρέπει να μειώσουμε τον αριθμό των αρχικών προτάσεων. [Βλέπε και 'The Theory of Implication', *American Journal of Mathematics*, 28 (1906) σ. 159-202. Σημ. του *R. C. Marsh*, επιμελητή της συλλογής που έχει τον τίτλο *Logic and Knowlege*, London: Allen and Unwin, 1956].

23. Στη χρήση της τελείας ακολουθώ τον Peano. Την εξηγεί διεξοδικά ο κ. Whitehead, 'On Mathematical Concepts of the Material World', *Phil. Trans. A.*, τόμ. *205*, σ. 472.

24. Αυτό το σημείο, όπως και η εισαγωγή της ιδέας που εκφράζει, οφείλονται στον Frege. Βλέπε το *Begriffsschrift* (Halle, 1879), σ. 1 και τα *Grundgesetze der Arithmetik* (Jena, 1893), τόμ. I, σ. 9.

25. Είναι πρόσφορο να χρησιμοποιούμε το σύμβολο *φx* για να υποδηλώνουμε την ίδια τη συνάρτηση, σε αντίθεση με αυτή ή εκείνη την τιμή της συνάρτησης.

26. Αυτή η ταύτιση υπόκειται σε μια τροποποίηση που θα εξηγήσουμε λίγο πιο κάτω.

27. Βλέπε το άρθρο «On Denoting» που αναφέρθηκε πιο πάνω [σημ. 17].

28. Ώστε *ι'α* είναι αυτό που ο Peano ονομάζει *ια*.

29. Βλέπε το τρίτο μέρος του «On some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types», *Proc. London Math. Soc.* , Ser. II vol. IV Part I [1905].

30. Βλέπε παραπάνω για τη διατύπωση του αξιώματος του Zermelo και για την απόδειξη ότι αυτό το θεώρημα συνεπάγεται το πολλαπλασιαστικό αξίωμα. Η αντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει αν θέσουμε *Prod'k* για το πολλαπλασιαστικό σύνολο του *k*, και ορίσουμε

$$Z`\beta = \hat{R}\{(\exists x).x\epsilon\beta.D`R = \iota`\beta.\text{ᗡ}`R = \iota`x\} \quad Df,$$

και υποθέσουμε ότι

$$\gamma\epsilon Prod`Z``cl`\alpha.R = \hat{\xi}\hat{x}\{(\exists S).S\epsilon\gamma.\xi Sx\}.$$

Τότε η *R* είναι ένας συσχετισμός του Zermelo. Επομένως, αν το *Prod'Z''cl'α* δεν είναι κενό, υπάρχει ένας τουλάχιστον συσχετισμός του Zermelo για το *α*.

31. Βλ. Zermelo, 'Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann', *Math. Annalen*, τόμ. 59, σ. 514-16 [1904].