I. Σειρές μιγαδικών αριθμών

Ορισμός I.1. Για κάθε ακολουθία $(z_n) \subset \mathbb{C}$, θεωρούμε την παράσταση

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

και την ονομάζουμε σειρά με γενικό όρο (z_n).

Η ακολουθία (S_n) με $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, $n \geq 1$ λέγεται ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Ορισμός I.2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει ανν $\lim_{n\to\infty} S_n = L \in \mathbb{C}$.

Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = L.$$

<u>Παράδειγμα (Γεωμετρική σειρά):</u>

Για $|z|<1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = 1+z+z^2+\cdots$

$$= \frac{1}{1-z}.$$

Πράγματι: $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$ με $|z|<1$,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} - \frac{1}{1-z} \right| =$$

$$= \left| 1+z+\cdots+z^{n-1} - \frac{1}{1-z} \right|$$

$$= \left| \frac{1-z^n}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| = \frac{|z|^n}{|1-z|} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

<u>Πρόταση I.3.</u> Έστω $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ συγκλίνουσες σειρές και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Τότε, οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n)$$

συγκλίνουν και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n}$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} z_n} .$$

Πρόταση I.4. (Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης)

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει και ισχύει

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| .$$

Πρόταση I.5. (Κριτήριο του λόγου).

Έστω $(z_n) \subset \mathbb{C}$, με $z_n \neq 0$, $\forall n \geq 1$.

- Εάν $\limsup_n \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει (απόλυτα).

- Εάν $\liminf_{n} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

- Εάν $\liminf_{n} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq 1 \leq \limsup_{n} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$, το κριτήριο <u>δεν</u> αποφαίνεται.

<u>Παράδειγμα</u>

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ συγκλίνει απόλυτα, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Πράγματι· $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1.$$

<u>Πρόταση I. 5. (Κριτήριο Ρίζας)</u>

- Εάν $\limsup_n \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απόλυτα.

- Εάν $\liminf_n \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

- Εάν

$$\liminf_n \sqrt[n]{|z_n|} \leq 1 \leq \limsup_n \sqrt[n]{|z_n|},$$

το κριτήριο <u>δεν</u> αποφαίνεται.

<u>Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{n^2}\right|} = \frac{|z|}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n} |z|.$$

Εάν $|z|<1$ (αντ. $|z|>1$), η σειρά συγκλίνει (αντ. αποκλίνει).

Για $|z|=1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$

Συνοψίζοντας, η σειρά

- συγκλίνει, για $|z| \leq 1$.
- αποκλίνει, για $|z| > 1$.

<u>Πρόταση Ι.6:</u> Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει, τότε $z_n \xrightarrow{n} 0$.

ΙΙ. Δυναμοσειρές

<u>Ορισμός ΙΙ.1.</u> Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. <u>Δυναμοσειρά</u> με <u>κέντρο z_0</u> και <u>συντελεστές a_n, $n\in\mathbb{N}$</u>, είναι η σειρά

$$\boxed{a_0 + a_1(z-z_0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.} \quad (1)$$

Θέτουμε $L = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,\infty]$.

<u>Η ακτίνα σύγκλισης της (1)</u> ορίζεται ως:

$$R = \begin{cases} 1/L, & \text{αν } L \in (0,\infty) \\ 0, & \text{αν } L = \infty \\ +\infty, & \text{αν } L = 0 \end{cases}$$

Πρόταση ΙΙ.1. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά (1) με ακτίνα σύγκλισης $R \in [0, +\infty]$.

(α) Αν $R = 0$, η (1) <u>αποκλίνει</u>, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(β) Αν $R = +\infty$, η (1) <u>συγκλίνει</u>, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(γ) Αν $0 < R < +\infty$, τότε η (1)

- συγκλίνει, $\forall z \in D(z_0, R)$
- αποκλίνει, για $|z - z_0| > R$.

Ο δίσκος

$(0 < R < \infty)$ $$D(z_0, R) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R \}$$

λέγεται <u>δίσκος σύγκλισης της (1)</u>.

Για $R = \infty$, ορίζουμε

$$D(z_0, R) = \mathbb{C}.$$

Θεώρημα ΙΙ. 2. (Παραγώγιση δυναμοσειράς)

Έστω $R \in (0, +\infty]$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in D(z_0, R).$$

Τότε, η f είναι ολόμορφη στο $D(z_0, R)$ και ισχύει

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}, \quad z \in D(z_0, R).$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω

Λήμμα ΙΙ.3. Έστω $z, h \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\delta > 0$ με $|h| \leq \delta$. Τότε,

$$\left| (z+h)^n - z^n - n z^{n-1} \cdot h \right| \leq \frac{|h|^2}{\delta^2} (|z| + \delta)^n.$$

Απόδειξη:

Από το Διώνυμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\left|(z+h)^n - z^n - nz^{n-1}\cdot h\right| = \left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k}\cdot h^k\right|$$

$$\leq \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\cdot|h|^k$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\cdot|h|^2\cdot|h|^{k-2}$$

$$\leq |h|^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\delta^{k-2}$$

$$= \frac{|h|^2}{\delta^2}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\cdot\delta^k$$

$$\leq \frac{|h|^2}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}\cdot\delta^k$$

$$= \frac{|h|^2}{\delta^2}\left(|z|+\delta\right)^n.$$

$\boxtimes$

Απόδειξη του Θ. ΙΙ. 2:

Θέτουμε

$$\boxed{g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.} \quad (2)$$

Είναι $\limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ (αφού $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$), οπότε η ακτίνα σύγκλισης της (2) είναι

$$\frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Άρα, η g που δίνεται από την (2) ορίζεται για $z \in D(z_0, R)$.

• Υποθέτουμε ότι $z_0 = 0$. Τότε,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

για $|z| < R$.

Έστω $z \in D(z_0, R)$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ με

$$0 < \delta < R - |z|, \text{ για } R < \infty$$

κ' $\delta > 0$ τυχαίο, για $R = \infty$.

Έστω $h \in \mathbb{C}$ με
$$0 < |h| < \delta.$$

Έχουμε

$$f(z+h) - f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[(z+h)^n - z^n \right]$$

$$\Longrightarrow f(z+h) - f(z) - h g(z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} \cdot h \right]$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} h \right]$$

$$\Longrightarrow \left| f(z+h) - f(z) - h g(z) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \cdot \left| (z+h)^n - z^n - n z^{n-1} \cdot h \right|$$

(Λήμμα II.3)

$\Longrightarrow$

$$\left|f(z+h)-f(z)-hg(z)\right| \leq$$

$$\leq \frac{|h|^2}{\delta^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\cdot(|z|+\delta)^n$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right| \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{\delta^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\cdot(|z|+\delta)^n.$$

Αλλά, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ είναι R, ενώ $|z|+\delta<R$

$$\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|(|z|+\delta)^n = M<\infty$$

Έχουμε λοιπόν ότι για $0<|h|<\delta$,

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right| \leq \frac{M}{\delta^2}|h|$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = g(z)$$

$\Rightarrow$ f διαφορίσιμη στο z κ'

$$f'(z) = g(z), \ \forall z \in D(0,R).$$

• Γενική περίπτωση: $z_0 \in \mathbb{C}$.

Εφαρμόζουμε την προηγούμενη περίπτωση για τη συνάρτηση

$$\tilde{f}(w) = f(w+z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad |w|<R$$

κ' παίρνουμε

$$f'(w+z_0) = \tilde{f}'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}, \quad \text{για } |w|<R.$$

Άρα, για $|z-z_0|<R$, θέτοντας $w=z-z_0$, παίρνουμε

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}. \quad \boxtimes$$

<u>Πόρισμα ΙΙ.4.</u> Έστω η δυναμοσειρά

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z\in D(z_0,R)$$

$(0<R\leq\infty)$.

Τότε, υπάρχουν όλων των τάξεων οι παράγωγοι $f', f'', \dots, f^{(k)}, \dots,\ k\geq 1$ και ισχύει $\forall\, k\geq 1$,

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k},$$

για $z\in D(z_0,R)$.

Επιπλέον,

$$a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Η απόδειξη του α΄ σκέλους γίνεται με επαγωγή στο k, με χρήση του Θ. ΙΙ.2.

Για το β΄ σκέλος έχουμε, $\forall\, k\geq 1$,

$$f^{(k)}(z_0)=k(k-1)\cdots 1\cdot a_k = k!\, a_k,$$

ενώ προφανώς $f(z_0)=a_0$. $\boxtimes$

III. Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών κ' σειρών συναρτήσεων.

Ορισμός III. 1. Έστω $K \subseteq \mathbb{C}$ και μια ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n : K \to \mathbb{C}, \quad n \geq 1.$$

Έστω και $f : K \to \mathbb{C}$ συνάρτηση.

Θα λέμε ότι

$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο K

ανν $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \ \forall z \in K,$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Πρόταση III. 2: Έστω γ τμ. λεία καμπύλη κ' $f_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχείς με $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο γ^*.

Τότε,

$$\lim_n \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο γ^*, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \forall z \in \gamma^*$,

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/\|\gamma\|,$$

όπου $\|\gamma\| =$ μήκος(γ). Τότε, $\forall n \geq n_0$,

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma [f_n(z) - f(z)]\,dz\right|$$

$$\overset{(\text{ML-ανισ.})}{\leq} \frac{\varepsilon}{\|\gamma\|} \cdot \|\gamma\| = \varepsilon. \qquad \boxtimes$$

<u>Πρόταση III.3</u>: Έστω γ τμ. λεία καμπύλη κ' $f_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$, συνεχείς, ώστε

$$|f_n(z)| \leq \theta_n, \quad z \in \gamma^*, \quad n \geq 1,$$

όπου $(\theta_n) \subset (0, +\infty)$ με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty.$$

Τότε,

$$\int_\gamma \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right] dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

<u>Απόδειξη:</u> Θέτουμε

$$g_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z), \quad n \geq 1,\ z \in \gamma^*,$$

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(z), \quad z \in \gamma^*.$$

Η $g : \gamma^* \to \mathbb{C}$ ορίζεται καλώς, αφού

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(z)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j < \infty, \quad \forall z \in \gamma^*.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\sum_{j=1}^{\infty} \theta_j < \infty$,

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \mid \quad \sum_{j>N} \theta_j < \varepsilon.$$

Τότε, $\forall n \geq N$, $\forall z \in \gamma^*$,

$$|g_n(z) - g(z)| = \Big| \sum_{j>n} f_j(z) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{j>n} |f_j(z)| \leq \sum_{j>n} \theta_j \leq \sum_{j>N} \theta_j < \varepsilon.$$

Άρα,

$$\underline{g_n \to g \text{ ομοιόμορφα στο } \gamma^*.}$$

Επιπλέον, η g είναι συνεχής.

Πράγματι· έστω $z_0 \in \gamma^*$, $\varepsilon > 0$.

Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N} \mid N \geq 1$ και

$$\underline{|g_N(z) - g(z)| < \varepsilon/3, \ \forall z \in \gamma^*}$$

(σημ. ότι $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο γ^*)

Επειδή g_N συνεχής στο z_0,

$\exists\, \delta > 0 \mid$ $\underline{\forall z \in \gamma^* \text{ με } |z - z_0| < \delta,}$

ισχύει $\underline{|g_N(z) - g_N(z_0)| < \varepsilon/3}$.

Τότε, για $z \in \gamma^*$ με $|z - z_0| < \delta$,

$$|g(z) - g(z_0)| \leq |g(z) - g_N(z)| + $$
$$+ |g_N(z) - g_N(z_0)| + |g_N(z_0) - g(z_0)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Από Πρότ. III. 2,

$$\lim_n \int_\gamma g_n(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz. \ \boxtimes$$