1. ΤΟ ΣΩΜΑ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στο σώμα $\mathbb{R}$, η εξίσωση $\underline{x^2 = -1}$ <u>δεν</u> έχει λύση.

Θέλουμε να επεκτείνουμε το $\mathbb{R}$ σε ένα σώμα $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, μέσα στο οποίο η παραπάνω εξίσωση να έχει λύση.

Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2 = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Ορίζουμε

→ <u>**Πρόσθεση:**</u> $(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha+\gamma, \beta+\delta)$.

→ <u>**Πολλ/σμός:**</u> $(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma)$.

<u>Μονάδα</u> (ουδέτερο στοιχείο του $(\cdot)$) είναι το $(1, 0) \equiv 1$

Πράγματι: $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\alpha, \beta) \cdot (1, 0) = (\alpha \cdot 1 - \beta \cdot 0, \ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1)$$
$$= (\alpha, \beta).$$

Θέτουμε $i = (0, 1)$. Τότε,

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, \ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)$$
$$= (-1, 0) = -(1, 0)$$
$$= -1 \, !$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, δεχόμαστε την ταύτιση ότι

$$(\alpha, 0) \equiv \alpha.$$

Τότε, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + \beta(0,1) \equiv \alpha + \beta i$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \equiv \underbrace{\{\alpha + \beta i \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}}_{\mathbb{C}}$$

Το $\mathbb{C}$ λέγεται σύνολο <u>μιγαδικών</u>
<u>αριθμών.</u>

→ <u>$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$</u> διότι $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$a \equiv (a, 0) \equiv a + 0 \cdot i$$

→ <u>$a + \beta i = \gamma + \delta i \iff [a = \gamma, \ \beta = \delta]$.</u>

Το $\mathbb{C} = \{ \alpha + \beta i \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \}$

είναι <u>σώμα</u> με τις πράξεις:

→ <u>Πρόσθεση</u>: $(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) =$

$= (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) i$

→ <u>πολλ/σμός</u>: $(\alpha + \beta i) \cdot (\gamma + \delta i) =$

$= (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma) i$

→ <u>Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης:</u>

$0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$

→ <u>Ουδέτερο στοιχείο του πολλ/σμού:</u>

$1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$

→ Αντίθετος μιγαδικού:

$-(\alpha + \beta i) = (-\alpha) + (-\beta)i \in \mathbb{C}$

Αντίστροφος μιγαδικού:

Έστω $\alpha+\beta i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, δηλ. $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

Τότε,

$$\frac{1}{\alpha+\beta i} = \frac{\alpha-\beta i}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)} = \frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2-(\beta i)^2}$$

$$= \frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \left(-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right) i \in \mathbb{C}.$$

Συμβολισμός: Ένας μιγαδικός αριθμός συμβολίζεται συνήθως με $z, w, a, \dots$

Ορισμός 1.1. Έστω $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$.

→ α = πραγματικό μέρος του z $= \mathrm{Re}(z)$.

→ β = φανταστικό " " " $= \mathrm{Im}(z)$.

→ Ο z λέγεται <u>φανταστικός</u> ανν $Re(z)=0$,

δηλ. αν είναι της μορφής βi, $\beta \in \mathbb{R}$.

<u>Συμβολισμός:</u> $I = \{\beta i \mid \beta \in \mathbb{R}\}$.

ΣΧΟΛΙΑ:

(i) Οι πράξεις $(+)$, $(\cdot)$ στο $\mathbb{C}$ έχουν όλες τις ιδιότητες των αντίστοιχων πράξεων στο $\mathbb{R}$ (π.χ. ταυτότητες) **εκτός από μία**:

Εάν $z, w \in \mathbb{C}$ με $z^2 + w^2 = 0$, **δεν** έπεται ότι $z = w = 0$.

Π.χ. $i^2 + 1^2 = 0$, $i \neq 0$, $1 \neq 0$.

(ii) Στο $\mathbb{C}$ δεν μπορεί να ορισθεί διάταξη με τις ίδιες ιδιότητες της κλασικής διάταξης στο $\mathbb{R}$ (δηλ. ολική κ' συμβατή με τις πράξεις σωμ.).

Πράγματι· έστω ($<$) μια τέτοια διάταξη.

Επειδή $i \neq 0$, θα πρέπει $i > 0$ ή $i < 0$.

→ Εάν $i > 0$, τότε $i \cdot i > 0 \Rightarrow \underline{-1 > 0}$ (*)

$\Rightarrow (-1)\cdot(-1) > 0 \Longrightarrow \underline{1 > 0}$ (**)

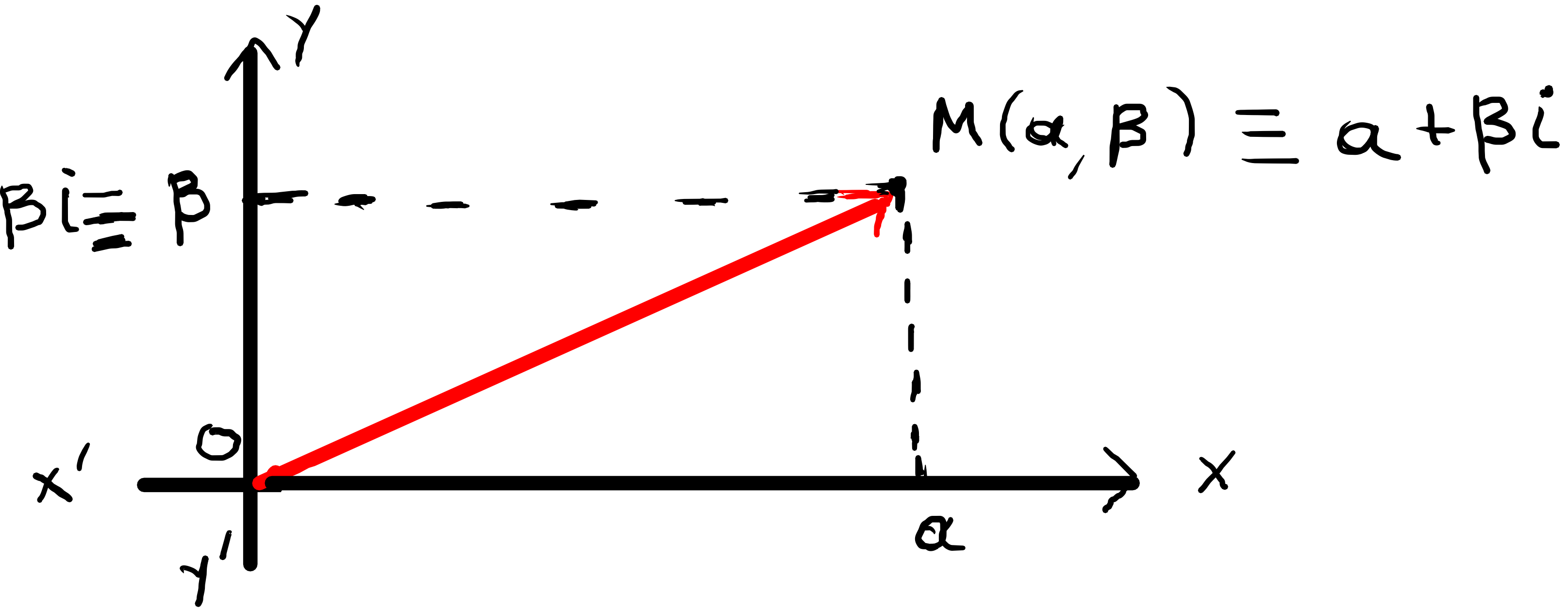
Με πρόσθεση των (*), (**) παίρνω $0 > 0$ (Άτοπο!)

$\rightarrow$ Εάν $i < 0$, τότε $i \cdot i > 0 \Rightarrow -1 > 0$

κ.λ.π. καταλήγω όπως πριν στο

$0 > 0$ (Άτοπο!)

Γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικού

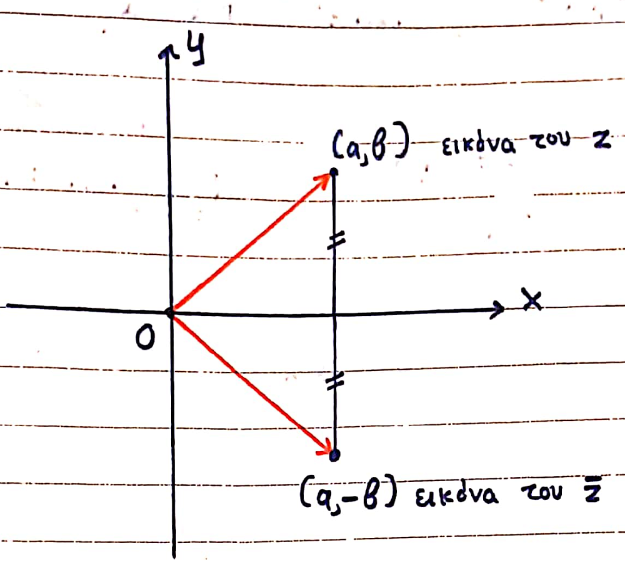


- $x'x$ → άξονας των πραγματικών
- $y'y$ → " " φανταστικών

Συζυγής Μιγαδικός

$z = a + \beta i \quad , \quad a, \beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\bar{z} = a - \beta i}$ άρα $\boxed{\overline{(\bar{z})} = z}$



Ιδιότητες

(i) $\boxed{z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}}$ και $\boxed{z = -\bar{z} \iff z \in \mathbb{I}}$

(ii) $\boxed{\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}}$ και $\boxed{\overline{az} = a \cdot \bar{z} \ , \ \forall a \in \mathbb{R}}$ Γραμμικότητα του Συζυγούς

(iii) $\boxed{\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}}$

(iv) $\boxed{\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}}$ $(w \neq 0)$

(v) $\boxed{z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Real}(z)}$ Πολύ χρήσιμη

(vi) $\boxed{z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z) \cdot i}$

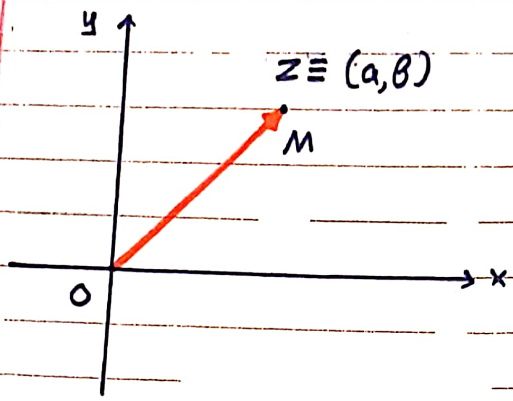
(vii) $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει : $\boxed{\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n}$

④

Μέτρο

$z = \alpha + \beta i$

$\boxed{|z| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $|z| \geq 0$ πάντα



άρα $\boxed{|z| = |\vec{OM}|}$

Ιδιότητες

Έστω $z, w \in \mathbb{C}$

2 πολύ εξυπηρετικές μορφές της ιδιότητας αυτής

(i) $\boxed{|z|^2 = z \cdot \bar{z}}$ Μαγική Ιδιότητα $\Leftrightarrow$ $\boxed{\bar{z} = \frac{|z|^2}{z}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{z = \frac{|z|^2}{\bar{z}}}$

(ii) $\boxed{|z \cdot w| = |z| \cdot |w|}$

Απόδ. $|z\cdot w|^2 \overset{(i)}{=} (zw)\cdot\overline{(zw)} =$

$= z\cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} =$

$= (z\cdot\bar{z})\cdot(w\cdot\bar{w}) \overset{(i)}{=}$

$= |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow |z\cdot w| = |z|\cdot|w|$, ό.έ.δ.

iii) Εάν $w \neq 0$: $\boxed{\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}}$

(iv) $\boxed{|\bar{z}| = |z|}$

(v) $\boxed{|z| = 1 \iff \bar{z} = \dfrac{1}{z} \iff z = \dfrac{1}{\bar{z}}}$ Πολύ χρήσιμο σε Ασκήσεις

(vi) Ιδιότητα Παραλληλογράμμου
(ή Θεώρημα Διαμέσων αν το δεις Γεωμετρικά)

$$\boxed{|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)}$$

Απόδειξη:

Ο μόνος τρόπος να χειριστής μέτρο αθροίσματος ή μέτρο διαφοράς είναι να υψώσεις στο τετράγωνο (ακόμα και αν το τετράγωνο δεν υπάρχει στην τελική σχέση) και μετά να χρησιμοποιήσεις την ιδιότητα (i).

$$|z+w|^2 = (z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w}) =$$
$$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} =$$
$$= |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2$$, ομοίως:

$$|z-w|^2 = |z|^2 - z\bar{w} - w\bar{z} + |w|^2$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο, ό.έ.δ.

(vii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, ισχύει $\boxed{|z^n| = |z|^n}$

⑥

(viii) $$\boxed{|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Real}(z\bar{w})}$$ Πολύ Χρήσιμη

[η απόδειξη βασίζεται στο ότι :

Εάν $a \in \mathbb{C}$, τότε $a + \bar{a} = 2\,\mathrm{Real}(a)$]

Απόδειξη:

$$|z+w|^2 = (z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w}) =$$
$$= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} =$$
$$= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \overline{(z\bar{w})} \iff$$

$$\underline{|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Real}(z\bar{w})} \iff \text{(είναι το ίδιο με)}$$

$$\underline{|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Real}(\bar{z}w)}$$ ό.έ.δ.

(ix) $$\boxed{|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Real}(z\bar{w})}$$ Πολύ Χρήσιμη

[η απόδειξη βασίζεται στην ίδια ιδιότητα με πριν]

Απόδειξη:

$$|z-w|^2 = (z-w)\cdot(\bar{z}-\bar{w}) =$$
$$= z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} =$$
$$= |z|^2 + |w|^2 - \left[z\bar{w} + \overline{(z\bar{w})}\right] \iff$$

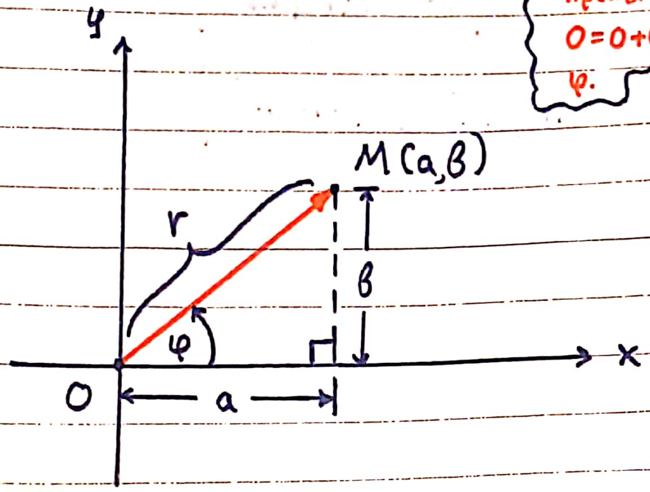
$$\underline{|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Real}(z\bar{w})} \iff \text{(είναι το ίδιο με)}$$

$$\underline{|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Real}(\bar{z}w)}$$ ό.έ.δ.

Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού Αριθμού.

(καθοριστικής σημασίας για πράξεις και κυρίως για ύψωση σε μεγάλες δυνάμεις)

Αν: $z = a + \beta i$ $\quad z \neq 0$ → **Προσοχή!** για να έχει Τριγωνομετρική μορφή ένας μιγαδικός πρέπει υποχρεωτικό να είναι διάφορος του $0 = 0 + 0i$, ώστε να μπορεί να οριστεί γωνία φ.



Είναι:

$$\boxed{a = r \cdot \cos\varphi}$$ κ'

$$\boxed{\beta = r \cdot \sin\varphi}$$

Άρα: $z = a + \beta i \Leftrightarrow$

$z = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi \Leftrightarrow$

$z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) \Leftrightarrow$

$$\boxed{z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)} \quad (1)$$

→ **Τριγωνομετρική Μορφή του μιγαδικού z**

Σχόλιο: Εάν η φ ικανοποιεί την (1) τότε και $\forall \kappa \in \mathbb{Z}$, η $\varphi + 2\kappa\pi$ επίσης ικανοποιεί την (1).

8

Ορισμός : Μια γωνία φ που ικανοποιεί την (1) ονομάζεται όρισμα του z.

Η μοναδική $\boxed{\varphi_0 \in (-\pi, \pi]}$ που ικανοποιεί την (1) ονομάζεται πρωτεύον όρισμα του z, και συμβολίζεται με:

$$\boxed{\varphi_0 = Arg(z)}$$

δηλ. $\boxed{Arg(z) \in (-\pi, \pi]}$

Scanned with CamScanner

Πρόταση 1: Πολύ χρήσιμη, θα την χρησιμοποιούμε συνέχεια.

Έστω $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($z,w \neq 0$ για να μπορεί να οριστεί τριγωνομετρική μορφή γι' αυτούς)

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

$w = |w| \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$. Τότε:

Μιγαδικοί ίσοι

$$z = w \overset{\text{ανν}}{\iff} \begin{cases} \bullet\ |z| = |w| & \text{μέτρα ίσα} \\ \bullet\ \exists\, k \in \mathbb{Z} \mid \varphi - \theta = 2k\pi & \text{ορίσματα που διαφέρουν κατά ακέραιο πολ/σιο του } 2\pi \end{cases}$$

Απόδειξη:

$(\Leftarrow)$: άμεσο

$(\Rightarrow)$: Έστω ότι $z = w$

- Τότε $\underline{|z| = |w|}$, προφανώς

- $z = w \xrightarrow[\text{αφού } z,w \neq 0]{|z| = |w| \neq 0} \cos\varphi + i\sin\varphi = \cos\theta + i \cdot \sin\theta \Rightarrow$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \cos\theta & \text{(I)} \\ \sin\varphi = \sin\theta & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\cos(\varphi - \theta) = \cos\varphi \cdot \cos\theta + \sin\varphi \cdot \sin\theta \overset{\text{(I)}}{\underset{\text{(II)}}{=}} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$$\sin(\varphi - \theta) = \sin\varphi \cdot \cos\theta - \sin\theta \cdot \cos\varphi \overset{\text{(I)}}{\underset{\text{(II)}}{=}} \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0$$

Άρα $\underline{\exists\, k \in \mathbb{Z} \mid \varphi - \theta = 2k\pi}$ Άρα $\underline{\text{ό.έ.δ.}}$

Η Εκθετική Συνάρτηση e^z, $z \in \mathbb{C}$

Το ζήτημα είναι να το ορίσουμε για z φανταστικό γιατί τότε τελειώσαμε.

Κίνητρο: Θυμάμαι την Δυναμοσειρά της e^x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

Θέτω $x = \theta i$, $\theta \in \mathbb{R}$ (κάπως περίεργο αλλά το κάνω)

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{\theta}{1!} \cdot i - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3}{3!} i + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5}{5!} \cdot i - \frac{\theta^6}{6!} + \dots =$$

$$\overset{*}{=} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i \cdot \left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) =$$

$$= \cos\theta + i \cdot \sin\theta$$

(άρα αν πρόκειται να ορίσω κάπως το $e^{i\theta}$ θα πρέπει να το ορίσω έτσι:

$*$ και εδώ ανακατατάσσω τους όρους δυναμοσειράς χωρίς να ξέρω αν συγκλίνει απολύτως (περίεργο αλλά το κάνω)

Ορισμός 2: $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Τύπος του Euler

Ορισμός 3: Εάν $z = a + \theta i$, $a, \theta \in \mathbb{R}$,

ορίζουμε $\boxed{e^{z} = e^{a}\cdot(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{a}\cdot e^{i\theta}}$

Ιδιότητες:

(i) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{|e^{i\theta}| = 1}$

(ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\boxed{|e^{z}| = e^{Real(z)}}$ ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ χρησιμοποιείται σε τρικ σε διάφορες ασκήσεις

(iii) $\boxed{e^{z} \neq 0}$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Απόδειξη: Απ' την (ii) έχουμε $|e^{z}| = e^{Real(z)} > 0$ αφού $a = Real(z) \in \mathbb{R}$, άρα $|e^{z}| \neq 0 \iff e^{z} \neq 0$, ό.έ.δ.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Το $e^{z} > 0$ είναι ΛΑΘΟΣ γιατί ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ διάταξη στους Μιγαδικούς!

(iv) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $\boxed{e^{z+w} = e^{z}\cdot e^{w}}$

(v) **Η Εκθετική Συνάρτηση e^z έχει $2\pi i$ – περιοδικότητα**

(όχι μόνο δεν είναι 1-1 όπως η e^x, $x\in\mathbb{R}$, αλλά επιπλέον είναι κ' περιοδική)

$$\boxed{e^z = e^w \iff \exists\, k\in\mathbb{Z} \mid z-w = 2k\pi i}$$ ή αλλιώς

$$\boxed{e^{z+2k\pi i} = e^z}$$

Απόδειξη:

$z = a+\beta i$, $w = \gamma+\delta i$

$$e^z = e^w \iff e^a\cdot(\cos\beta + i\sin\beta) = e^\gamma\cdot(\cos\delta + i\sin\delta)$$

$$\xLeftrightarrow{\text{Πρόταση 1}} \begin{cases} e^a = e^\gamma \\ \exists\, k\in\mathbb{Z} \mid \beta-\delta = 2k\pi \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{αφού } a,\gamma\in\mathbb{R}]{y=e^x \text{ είναι 1-1 στο } \mathbb{R}}$$

$$\begin{cases} a = \gamma & \text{(I)} \\ \beta-\delta = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} & \text{(II)} \end{cases}$$

άρα: $z-w = \cancel{a}+\beta i-\cancel{\gamma}-\delta i \overset{\text{(I)}}{\iff}$

$$z-w = (\beta-\delta)i \underset{\exists k\in\mathbb{Z} \text{ τέτοιο ώστε}}{\overset{\text{(II)}}{=\!=}} 2k\pi i$$, ό.έ.δ.

(vi) $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall \lambda\in\mathbb{Z}$, $\boxed{(e^z)^\lambda = e^{\lambda z}}$

Απόδειξη: με Επαγωγή

(13)

Τύπος De Moivre

Αν $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z \neq 0$,

τότε $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$: (για κάθε εκθέτη ακέραιο)

$$\boxed{z^{\lambda} = |z|^{\lambda} \cdot \left[\cos(\lambda\varphi) + i\sin(\lambda\varphi)\right]}$$

Απόδειξη:

$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$

$$z^{\lambda} = |z|^{\lambda} \cdot (e^{i\varphi})^{\lambda} \overset{(iv)}{=\!=}$$

$$= |z|^{\lambda} \cdot e^{i\lambda\varphi} =$$

$$= |z|^{\lambda} \cdot \left[\cos(\lambda\varphi) + i\sin(\lambda\varphi)\right]$$ ό.έ.δ.

Εφαρμογή: $(1+i)^{10} = ;$

$|1+i| = \sqrt{2}$, άρα

$$1+i = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

αυτός είναι ο τρόπος για να βρίσκεις τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού από καρτεσιανή.

Άρα: $(1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\cdot\left[\cos\frac{10\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{10\pi}{4}\right] =$

$$= 2^5\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{2}\right) =$$

$$= 2^5\left[\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$(1+i)^{10} = 2^5\cdot(0+1i) = 32i$$

Scanned with CamScanner

Τύπος De Moivre

Αν $z \neq 0$ με $z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

τότε: $\boxed{z^{\lambda} = |z|^{\lambda} \cdot [\cos(\lambda\varphi) + i \cdot \sin(\lambda\varphi)]}$, $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$

Συμπληρωματικά:

Εαν $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, $w = |w| \cdot e^{i\theta}$ με $z \neq 0$ και $w \neq 0$

(i) $\boxed{z \cdot w = |z \cdot w| \cdot e^{i(\varphi+\theta)}}$,

(ii) $\boxed{\dfrac{z}{w} = \left|\dfrac{z}{w}\right| \cdot e^{i(\varphi-\theta)}}$,

που είναι κατ' ευθείαν σε τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

δηλ.:

$\boxed{\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w}$

$\boxed{\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w}$

arg και όχι Arg, δηλ. ένα δυνατό όρισμα και όχι απαραίτητα το πρωτεύον όρισμα

δηλ.: Εαν φ, θ ορίσματα των z, w τότε:

→ το $\varphi+\theta$ είναι ένα όρισμα του $z \cdot w$

→ το $\varphi-\theta$ είναι ένα όρισμα του $\dfrac{z}{w}$

Ρίζες Μιγαδικού Αριθμού

Ρίζες της Μονάδος

Αναζητούμε ρίζες της εξίσωσης: $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ (1) $(z \in \mathbb{C})$

[π.χ. $z^5 = 1$, $z = ;$ αν $z \in \mathbb{C}$]

Εδώ φαίνεται η πολύ μεγάλη χρησιμότητα της Τριγωνομετρικής Μορφής και του Τύπου De Moivre.

Έστω $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ μια ρίζα της εξίσωσης $z^n = 1$ με $-\pi < \varphi \leq \pi$ ↳ προφανώς το 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, δηλ. οποιαδήποτε ρίζα της είναι $\neq 0$, άρα θα έχει τριγωνομετρική μορφή.

Άρα η (1) $\Leftrightarrow$ $|z|^n \cdot e^{in\varphi} = 1 \cdot e^{i0}$ $\Leftrightarrow$ (αναγκαστικά)

$$\begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\varphi - 0 = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ n\varphi = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |z| = 1 \quad (\mathrm{I}) \\ \varphi = \dfrac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(I) σίγουρα οι ρίζες είναι μιγαδικοί με μέτρο 1

Προσοχή! Αν όμως σταματήσουμε εδώ, έχουμε ότι μια εξίσωση n-οστού βαθμού έχει άπειρες ρίζες για όλα τα $k \in \mathbb{Z}$, ενώ ως n-οστού βαθμού μπορεί να έχει το πολύ n ρίζες.

Άλλωστε δεν έχει νόημα να έχουμε ρίζες για όλες τις άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$, αφού αν π.χ. έχουμε μια ρίζα για $k = a$ τότε αυτή θα έχει όρισμα $\varphi = \frac{2a\pi}{n}$

και η ρίζα για $k=a+n$ θα έχει όρισμα $\theta = \frac{2a\pi}{n} + 2\pi$, δηλ. τα ορίσματα των 2 αυτών ριζών θα διαφέρουν κατά 2π, δηλ. οι δύο αυτές ρίζες θα είναι ίδιες. Παρατηρούμε δηλ. ότι για τιμές του k εκτός ενός πεπερασμένου πλήθους, οι ρίζες αρχίζουν και επαναλαμβάνονται.

Για αυτό κάνουμε το εξής:

Εαν $k \geq n$, εκτελώ την Ευκλείδια Διαίρεση:

$$\begin{array}{c|c} k & n \\ \hline \upsilon & m \end{array}$$

$\upsilon = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, άρα

$$\varphi = \frac{2k\pi}{n} = \frac{2(m \cdot n + \upsilon)}{n} \cdot \pi = 2m\pi + \frac{2\upsilon\pi}{n} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\varphi = 2m\pi + \frac{2\upsilon\pi}{n}, \quad \upsilon = 0, 1, 2, \ldots, n-1}, \quad \text{άρα}$$

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} = \underbrace{|z|}_{1} \cdot e^{i\left(2m\pi + \frac{2\upsilon\pi}{n}\right)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{η } e^{z} \text{ είναι} \\ 2\pi i \text{ περιοδική} \end{array}\right)$$

$$\boxed{z = e^{i\frac{2\upsilon\pi}{n}}}, \quad \upsilon = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \quad \text{άρα:}$$

Θεώρημα:

για $n=0$ η εξίσωση δεν έχει νόημα γιατί γίνεται $1=1$ που ισχύει πάντα ως ταυτότητα

Για $n \geq 1$, οι n-οστές ρίζες της μονάδος (δηλ. οι ρίζες της εξίσωσης $z^n = 1$) είναι οι:

ο τύπος αυτός χρησιμοποιείται απ' έξω

$$\boxed{z_\upsilon = e^{i\frac{2\upsilon\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2\upsilon\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\upsilon\pi}{n}\right)} \quad \upsilon = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Παρατηρήσεις:
1) Οι n-οστές ρίζες της μονάδος είναι n το πλήθος
2) Είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους (δηλ. όλες έχουν πολ/τητα 1)
3) Πάντα μια ρίζα της μονάδος θα είναι το 1.

Παράδειγμα:

Να λυθεί η εξίσωση $z^6 = 1$.

Λύση:

ια $\nu=0$: $\underline{z_0 = 1}$ είναι πάντα ρίζα.

ια $\nu=1$: $z_1 = \cos\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{6}_{3}}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{6}_{3}}\right) \Leftrightarrow \underline{z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

α $\nu=2$: $z_2 = \cos\left(\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\pi}{\cancel{6}_{3}}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\pi}{\cancel{6}_{3}}\right) =$

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \underline{z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

α $\nu=3$: $z_3 = \cos\left(\frac{\cancel{6}\pi}{\cancel{6}}\right) + i\,\sin\left(\frac{\cancel{6}\pi}{\cancel{6}}\right) \Leftrightarrow \underline{z_3 = -1}$

Για $\nu=4$: $z_4 = \cos\left(\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\pi}{\cancel{6}_{3}}\right) + i\,\sin\left(\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\pi}{\cancel{6}_{3}}\right) =$

$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \underline{z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

ια $\nu=5$: $z_5 = \cos\left(\frac{\overset{5}{\cancel{10}}\pi}{\cancel{6}_{3}}\right) + i\,\sin\left(\frac{\overset{5}{\cancel{10}}\pi}{\cancel{6}_{3}}\right) =$

$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \underline{z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

Επομένως οι $6^{ες}$ ρίζες της μονάδος είναι οι:

$$\pm 1 \;,\; \pm\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \;,\; \pm\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

όπου το $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\overline{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$.

Παρατήρηση:

▶ Σχετικά με τις ν-οστές ρίζες της μονάδος:

- αν ν είναι άρτιος: τότε ρίζες είναι το ± 1 και οι άλλες ρίζες εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών και αντιθέτων.

- αν ν είναι περιττός: τότε ρίζες είναι το $+1$ και οι άλλες ρίζες εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών.

▶ Σχετικά με τις ν-οστές ρίζες ενός πραγματικού αριθμού:

Γενικά και για οποιοδήποτε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 1$ οι ν-οστές ρίζες ενός οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού $a \in \mathbb{R}$ είναι αλληλοσυζυγείς μιγαδικοί αριθμοί, εμφανίζονται δηλ. σε ζεύγη συζυγών.

Γενίκευση για Ρίζες Μιγαδικού Αριθμού

Θεώρημα:

Οι Ρίζες της εξίσωσης $z^n = a$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

Υποθέτω $a = |a| e^{i\theta}$.

Οι ρίζες του μιγαδικού αριθμού a είναι:

$$\boxed{z_\upsilon = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2\upsilon\pi}{n}\right)}} \quad \upsilon = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $z^3 = i$

$$z^3 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$z_\nu = \sqrt[3]{\underbrace{|i|}_{1}} \cdot e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\nu\pi}{3}\right)} \quad \nu = 0, 1, 2 \quad \text{, άρα}$$

Για $\nu=0$: $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Για $\nu=1$: $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi/2+2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Για $\nu=2$: $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi/2+4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{9\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} =$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow z_2 = -i$$

Προσοχή! Δεν έχω ρίζες και τους συζυγείς μιγαδικούς γιατί η πολυωνυμική εξίσωση δεν έχει μόνο πραγματικούς συντελεστές.

Παρατήρηση: Για να εμφανίζονται οι μιγαδικές ρίζες σε ζεύγη συζυγών πρέπει η πολυωνυμική εξίσωση να έχει ΜΟΝΟ πραγματικούς συντελεστές.

ΣΥΜΠΤΑΗ ΡΟ ΜΑΤΙΚΑ

(1) Απόδειξη τύπου n-οστής ρίζας μιγαδικού

$a = |a| \cdot e^{i\theta}$, θ ένα όρισμα του a.

Εάν $z^n = a$, τότε $z^n = \left(\sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\theta/n} \right)^n$

$$\Rightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\theta/n}} \right)^n = 1 \Rightarrow \frac{z}{\sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\theta/n}} = e^{i\frac{2\nu\pi}{n}}$$

$\nu = 0, 1, \dots, n-1$

$$\Rightarrow z = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\frac{2\nu\pi + \theta}{n}}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

(2) Εξισώσεις 2ου βαθμού

$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Εάν $\Delta < 0$, ρίζες: $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$.

Π.χ. $z^2 + z + 1 = 0$. $\Delta = -3$, $z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

(3) Πολυωνυμικές εξισώσεις

$$P(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

$a_j \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$, $k \geq 1$.

Πρόταση: Εάν $P(z_0) = 0$, τότε $P(\overline{z_0}) = 0$.

Απόδ: $P(\overline{z_0}) = \sum_{j=0}^{k} a_j \overline{z_0}^j = \overline{\sum_{j=0}^{k} a_j z_0^j} =$

$$= \overline{\sum_{j=0}^{k} a_j z_0^{\,j}} = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0. \quad \boxtimes$$

<u>Πόρισμα:</u> Εάν $P(z_0) = 0$, τότε το $(z - z_0)(z - \overline{z_0})$ είναι παράγοντας του P.

Π.χ. Να λυθεί η εξίσωση

$$P(z) = z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$$

αν μία ρίζα είναι το i.

$(z+i)(z-i) = z^2 + 1$ παράγοντας του P

$$\begin{array}{l|l} P(z) & z^2+1 \\ \hline & \pi(z) = z^2 - z + 1 \end{array}$$

$\pi(z) = z^2 - z + 1 \rightarrow$ Ρίζες: $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Ρίζες του $P(z)$: $\pm i$, $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.