3. ΤΡΙΓΩΝΟΜ. ΣΥΝΑΡΤ. – ΜΙΓΑΔ. ΛΟΓΑΡ.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Γνωρίζουμε ότι $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\sin x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

<u>Ορισμός 3.1.</u> $\forall z \in \mathbb{C}$, ορίζουμε

$$\rightarrow \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\rightarrow \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Όλες σχεδόν οι ιδιότητες των $\sin x$, $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$, μεταφέρονται στις $\sin z$, $\cos z$, $z \in \mathbb{C}$.

<u>Π.χ.</u> (α) Ταυτότητες

→ $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

→ $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$

→ $\cos(2z) = 2\cos^2 z - 1$ $\quad$ κ.λ.π.

→ Τύποι για $\cos(z \pm w)$, $\sin(z \pm w)$ . . .

---

(6) $\cos(-z) = \cos z$, $\quad \sin(-z) = -\sin z$

$\cos(2k\pi + z) = \cos z$, $\quad \sin(2k\pi + z) = \sin z$, $k \in \mathbb{Z}$

$\cos(\pi \pm z) = -\cos z$, $\quad \sin(\pi \pm z) = \mp \sin z$

κ.λ.π.

Τριγωνομ. εξισώσεις

Τις επιλύουμε με βάση τον ορισμό ή τις ιδιότητες της e^z, $z \in \mathbb{C}$.

Παραδείγματα:

(α) $\cos z = 0 \iff e^{iz} + e^{-iz} = 0 \iff$

$$e^{iz} = -e^{-iz} = e^{i\pi} \cdot e^{-iz} = e^{i(\pi - z)} \iff$$

$$iz = i(\pi - z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \pi - z + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z = k\pi + \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

(β) $\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow iz = -iz + 2k\pi i$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

(γ) $\cos z = 2 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 4$. Θέτω

$w = e^{iz} \Rightarrow w + \frac{1}{w} = 4 \Leftrightarrow w^2 - 4w + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (w-2)^2 = 3 \Leftrightarrow w = 2 \pm \sqrt{3}$

• $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} = e^{\ln(2 \pm \sqrt{3})} \Leftrightarrow iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i$

$\Leftrightarrow \underline{z = 2k\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Σχολιο!!

Οι συναρτήσεις $\sin z$, $\cos z$ δεν είναι κατά μέτρο φραγμένες σε όλο το $\mathbb{C}$!

Πράγματι: $\forall y>0$,

$$|\sin(iy)| = \left|\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right| = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} \xrightarrow{y\to+\infty} +\infty$$

$$|\cos(iy)| = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} \xrightarrow{y\to+\infty} +\infty$$

Πρωτεύων κλάδος λογαρίθμου

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Η f δεν είναι 1-1. Παρ' όλ' αυτά, είναι 1-1 στο σύνολο

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi \}.$$

Πράγματι· έστω $z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2 \in A$ (δηλ. $y_1, y_2 \in (-\pi, \pi]$) με $e^{z_1} = e^{z_2}$.

Τότε, $\exists k \in \mathbb{Z} \mid z_1 - z_2 = 2k\pi i \Leftrightarrow$

$$(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = 2k\pi i \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ y_1 - y_2 = 2k\pi. \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\pi < y_1 \leq \pi \\ -\pi \leq -y_2 < \pi \end{array}\right\} \xRightarrow{(+)} -2\pi < y_1 - y_2 < 2\pi \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad -2\pi < 2k\pi < 2\pi \Rightarrow -1 < k < 1$

$\Rightarrow \quad k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$ δηλ. $z_1 = z_2$.

Άρα, η $f|_A : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι 1-1.

$f(A) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; ;

Έστω $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ κ' $\varphi = \operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi]$.

Τότε, $w = |w| e^{i\varphi} = e^{\ln|w| + i\varphi} = e^{z}$,

$z = \ln|w| + i\varphi \in A$ (αφού $-\pi < \varphi \leq \pi$).

Άρα, $f|_A : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\underline{1-1}$, $\underline{\text{επί}}$

$\Rightarrow$ ορίζεται η $(f|_A)^{-1} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to A$ με

τύπο $\underline{(f|_A)^{-1}(w) = \ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\,w, \quad w \neq 0}$

Η $(f|_A)^{-1}$ ονομάζεται πρωτεύων κλάδος

του μιγαδικού λογαρίθμου κ' συμβολίζεται

με **Log**. Δηλ.

$$\mathrm{Log}: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to A = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}\, z \leq \pi\}$$ με

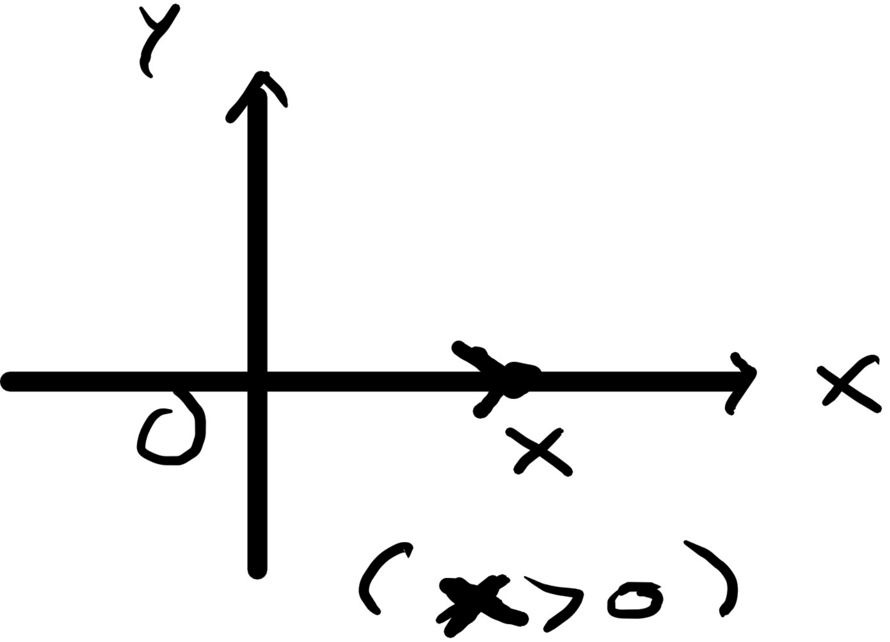
$$\mathrm{Log}\, w = \ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\, w, \quad w \neq 0.$$

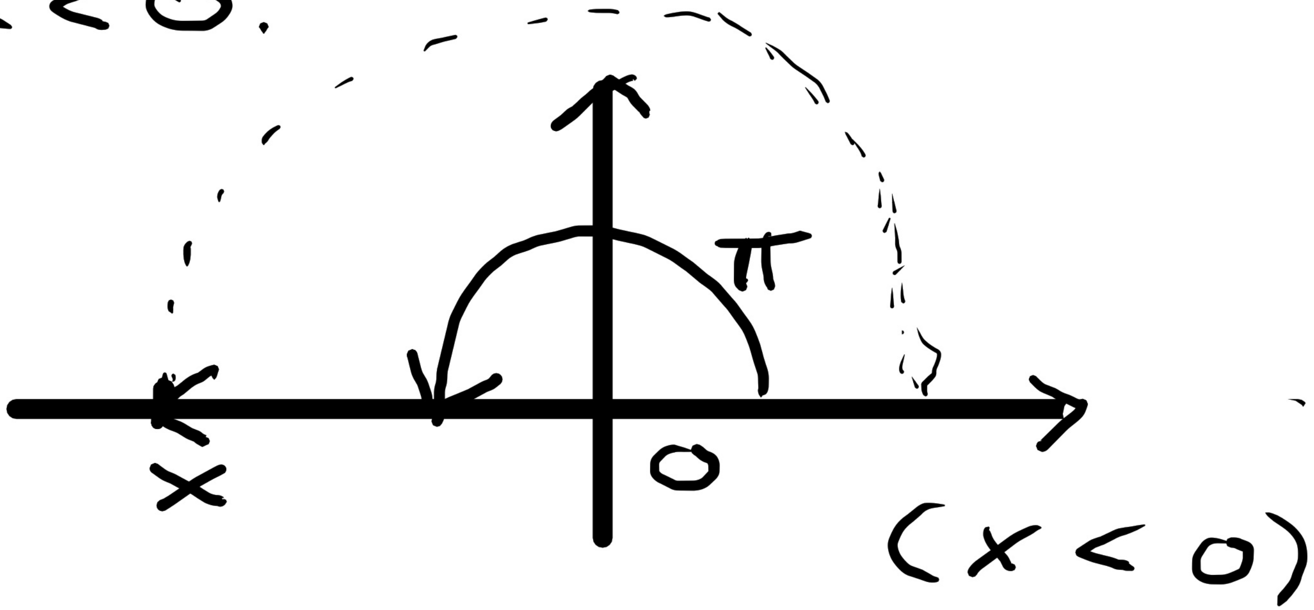
Παραδείγματα:

(α) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\quad \operatorname{Log} x = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln|x| + i\pi, & x < 0 \end{cases}$

διότι $\quad \operatorname{Arg} x = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \pi, & x < 0. \end{cases}$

π.χ. $\operatorname{Log}(-1) = i\pi$



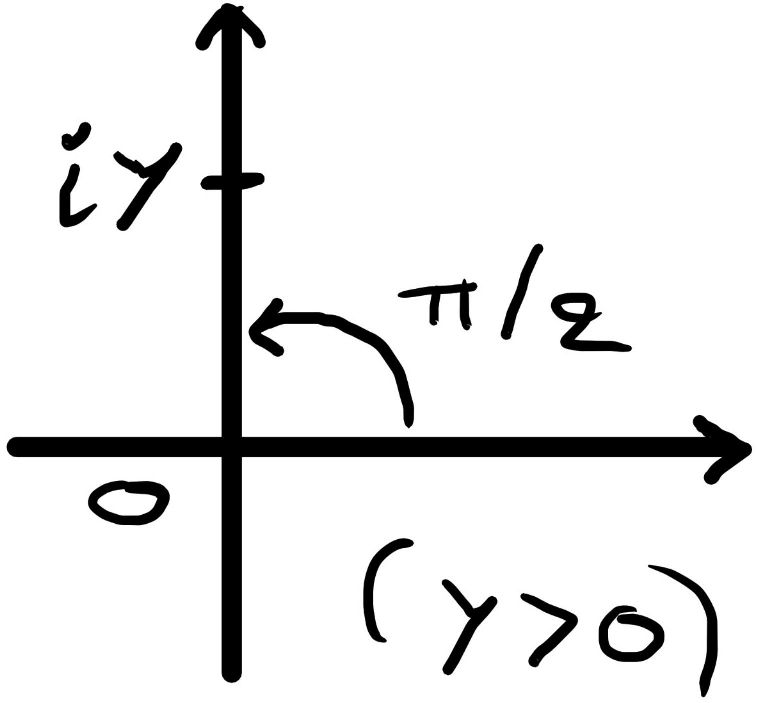


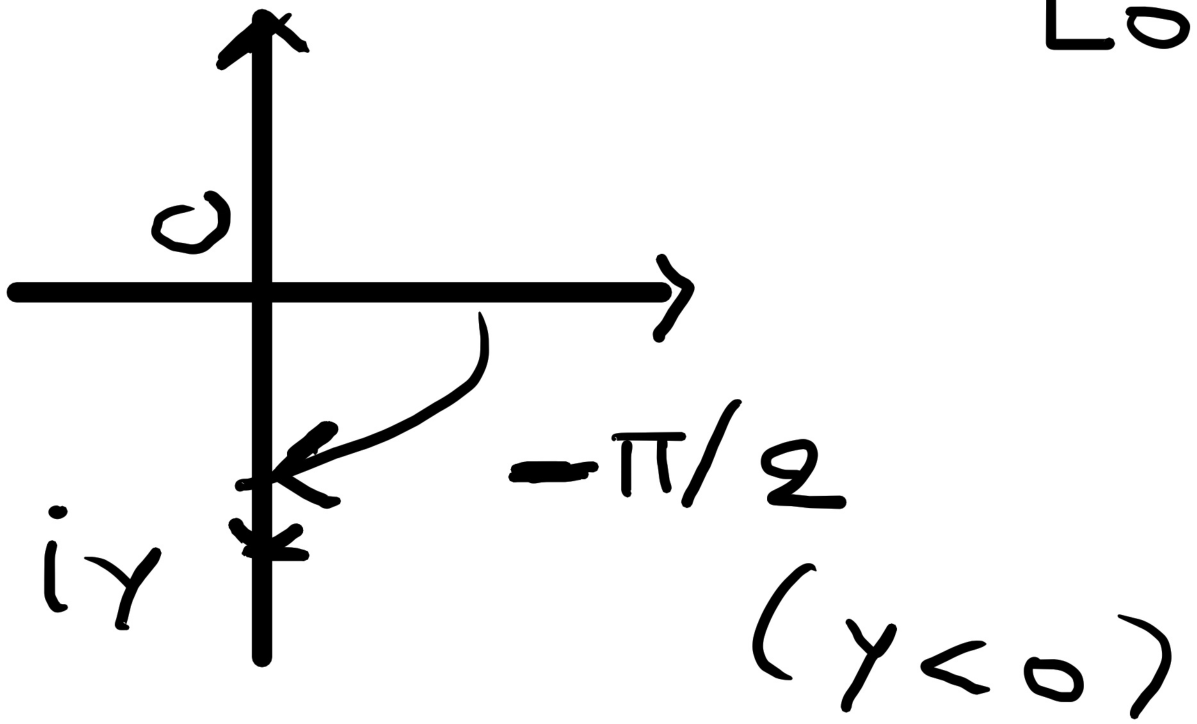
(β) Εάν $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε $\mathrm{Log}(iy) =$

$$= \begin{cases} \ln y + i\pi/2, & y > 0 \\ \ln|y| - i\pi/2, & y < 0. \end{cases}$$

π.χ.

$$\mathrm{Log}\, i = i\pi/2.$$





(γ) $\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i) = ?$ $\quad |\sqrt{3}+i| = 2,$

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}+i) = \pi/6$ (σημ. ότι $\frac{\pi}{6} \in (-\pi, \pi]$)

$$\Longrightarrow \underline{\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{6}}.$$

Σχόλιο: Δεν ισχύει πάντα η σχέση

"$\mathrm{Log}(e^{z}) = z$".

π.χ. $\mathrm{Log}(e^{2\pi i}) = \mathrm{Log}\,1 = 0$

Ισχύει μόνο για $z \in A$ δηλ. με $-\pi < \mathrm{Im}z \leq \pi$.

Αντίθετα, ισχύει $e^{\log w} = w, \quad \forall w \neq 0.$

Επιπλέον, $\forall\, w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ισχύει:

→ Αν $\operatorname{Arg} w_1 + \operatorname{Arg} w_2 \in (-\pi, \pi]$, τότε

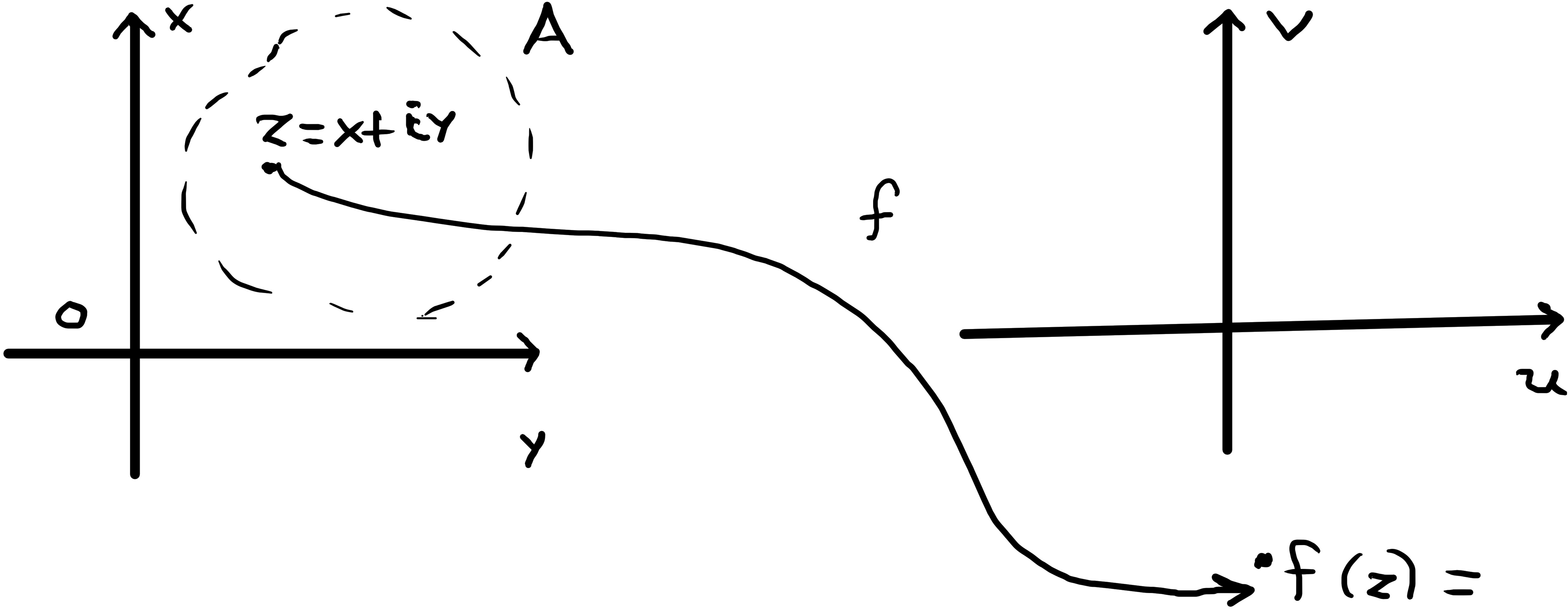
$$\operatorname{Log}(w_1 \cdot w_2) = \operatorname{Log} w_1 + \operatorname{Log} w_2 .$$

→ Αν $\operatorname{Arg} w_1 - \operatorname{Arg} w_2 \in (-\pi, \pi]$, τότε

$$\operatorname{Log}\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \operatorname{Log} w_1 - \operatorname{Log} w_2 .$$

4. ΜΙΓΑΔ. ΣΥΝΑΡΤ. – ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορισμός 4.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$. **Συνάρτηση** $f : A \to \mathbb{C}$ είναι ένας μηχανισμός που απεικονίζει σε κάθε $z \in A$, έναν κι μοναδικό $w = f(z) \in \mathbb{C}$.



$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

Εάν $f: A \to \mathbb{C}$ συνάρτηση, ορίζονται δύο συναρτήσεις $u, v: A \to \mathbb{R}$ με

$$u(x,y) = \mathrm{Re}[f(x+iy)], \quad v(x,y) = \mathrm{Im}[f(x+iy)]$$

$\forall\, x+iy \in A$.

Γράφουμε $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$,

$$f = u + iv.$$

π.χ.

(α) $f(z)=z^2$. $\forall\, z=x+iy\in\mathbb{C}$,

$$f(z)=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy,$$

$$u(x,y)=x^2-y^2,\quad v(x,y)=2xy.$$

(β) $f(z)=e^z$. $\forall\, z=x+iy\in\mathbb{C}$,

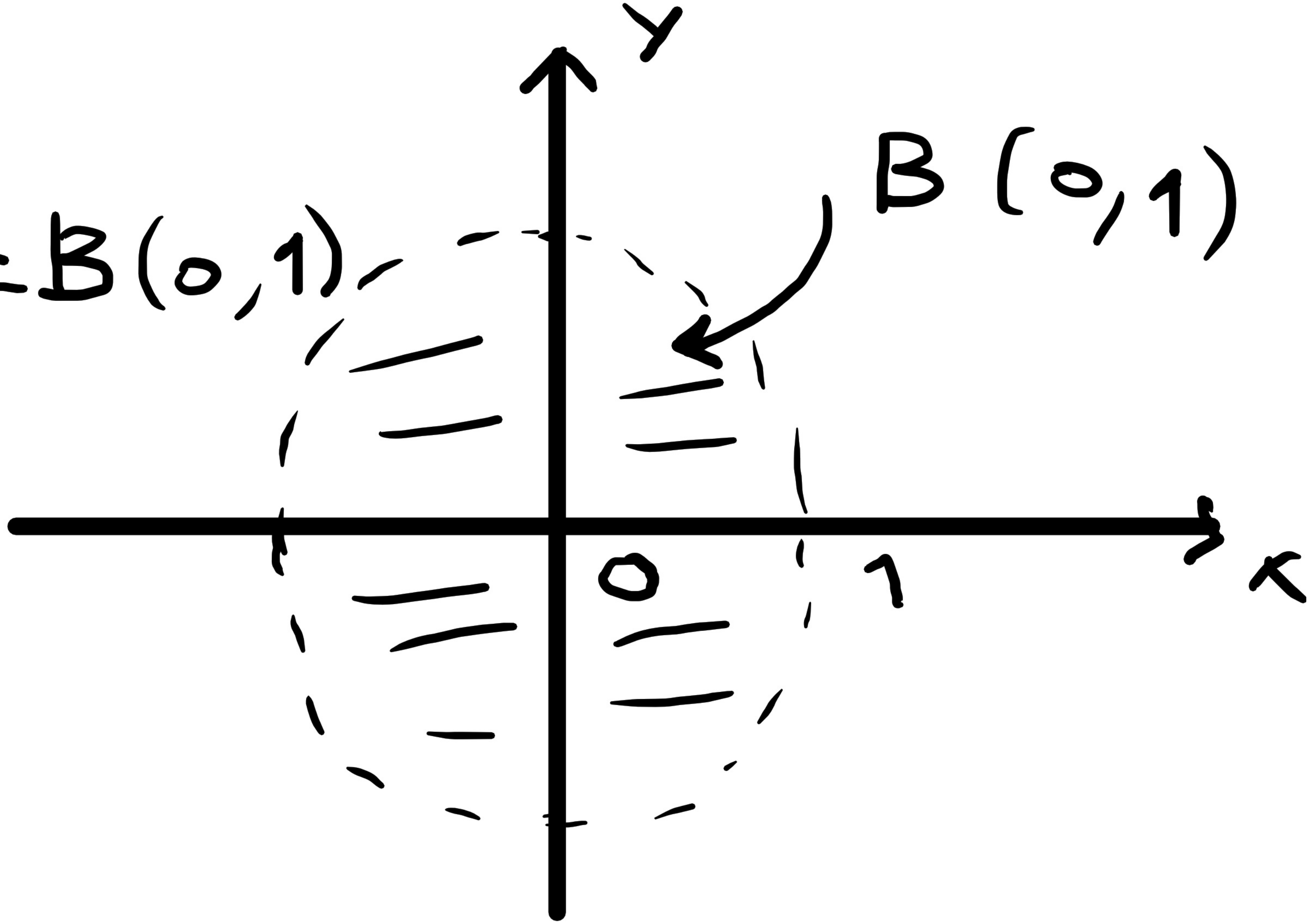
$$f(z)=(e^x\cos y)+i(e^x\sin y)$$

$$u(x,y)=e^x\cos y$$

$$v(x,y)=e^x\sin y$$

(γ) $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-|z|}}$ Πεδίο ορισμού = ?

$A_f = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \} = B(0,1)$



Όριο στο z_0

Ορισμός 4.2 Έστω $A \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

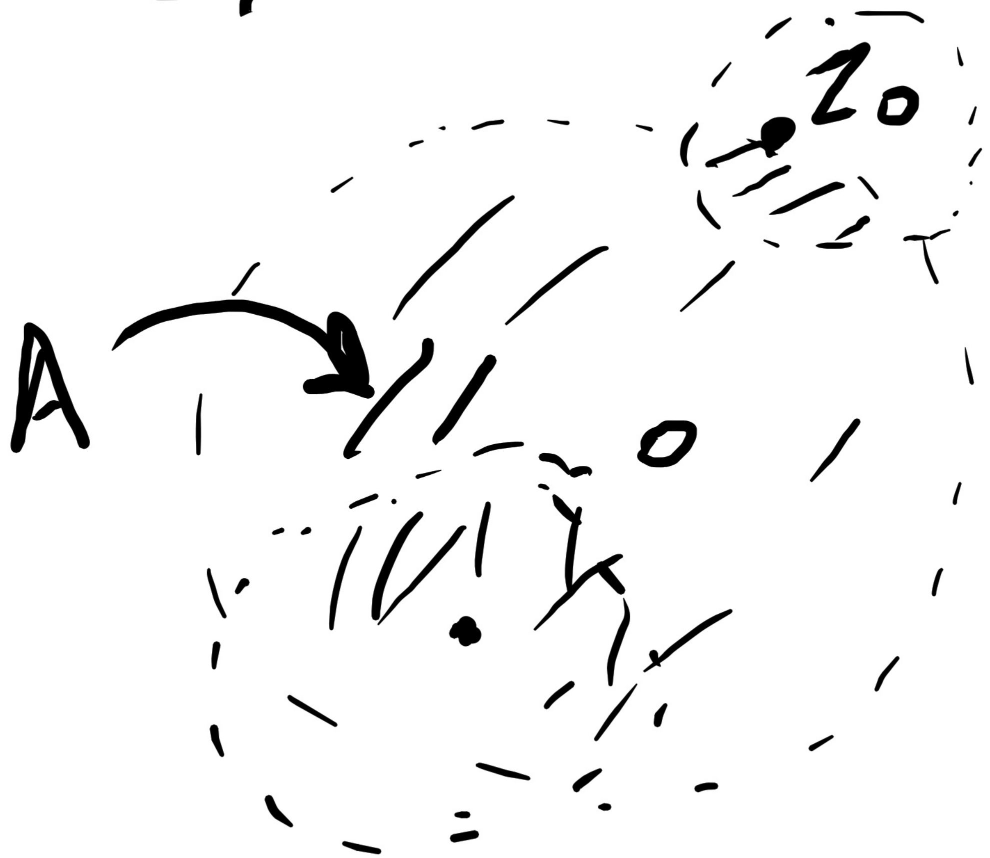
Το z_0 λέγεται **σημείο συσσώρευσης** (σ.σ.) του A

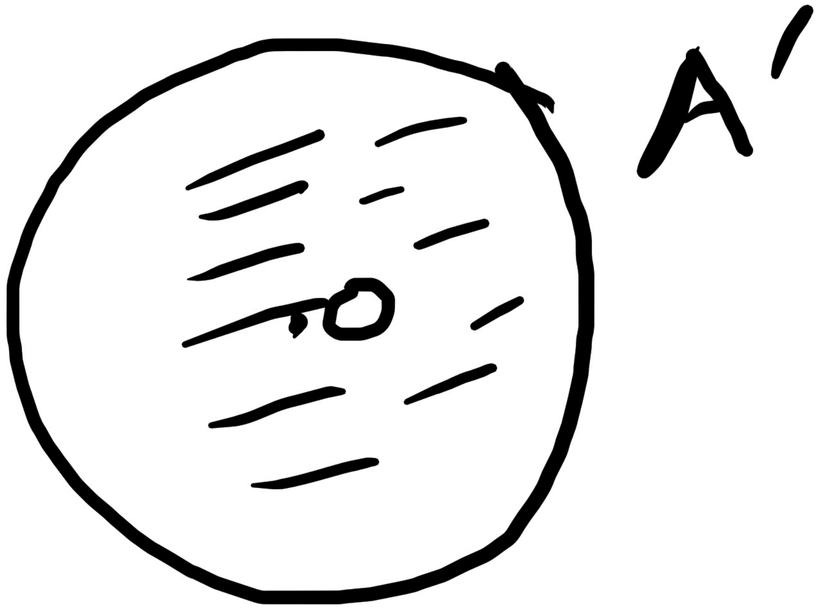
αν $\forall r > 0$, $B(z_0, r) \cap (A \setminus \{z_0\}) \neq \emptyset$.

[$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ = ανοικτός δίσκος κέντρου z_0 κ' ακτίνας r.]

<u>π.χ.</u> Εάν $A = B(0,1)$, τα σ.σ. του A είναι ο $B[0,1] = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$.

<u>Συμβολ.</u> $A' = \{$τα σ.σ. του $A\}$.





π.χ.

$z_n \to z_0$ $\quad (z_n)$ μη σταθερή

$A = \{z_1, z_2, \dots, \}$

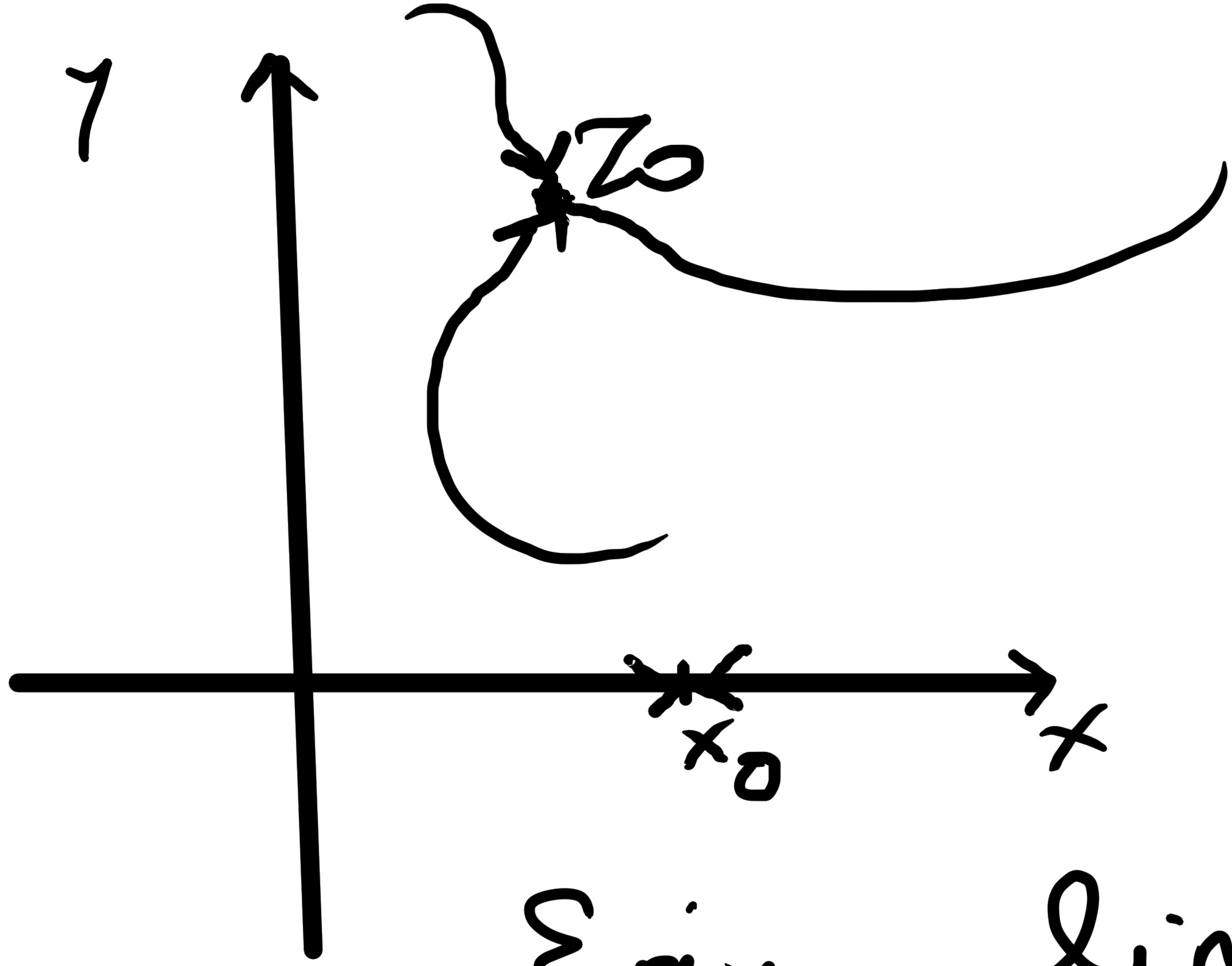
$A' = \{z_0\}$

Ορισμός 4.3. Έστω $f: A \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A'$.

Θα λέμε ότι $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$ αν

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \mid$ $\forall z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$,

ισχύει $|f(z) - L| < \varepsilon$.



Υπάρχουν άπειρες διαδρομές κατά μήκος των οποίων το $z \to z_0$.

Εάν $\lim_{z \to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$, τότε

$f(z) \to L$, καθώς $z \to z_0$ κατά μήκος της τυχαίας διαδρομής!

Παράδειγμα: Το $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$ δεν υπάρχει.

Πράγματι:

$\rightarrow \lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathbb{R}}} \dfrac{\bar{z}}{z} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{z} = 1$

$\rightarrow \lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in I}} \dfrac{\bar{z}}{z} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{-z}{z} = -1$

$I = \{ i\beta \mid \beta \in \mathbb{R} \}$

$1 \neq -1$ άρα το όριο δεν υπάρχει!

Πρόταση 4.4. Έστω $f = u + iv : A \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in A'$ κ' $L \in \mathbb{C}$. Τότε:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = \operatorname{Re} L \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = \operatorname{Im} L. \end{cases}$$

Ορισμός 4.5: Έστω $f : A \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$. Η f είναι συνεχής στο z_0 αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \,|\, \forall z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$, ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Πρόταση 4.6: Έστω $f = u + iv : A \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + i y_0 \in A$. Τότε, f συνεχής στο z_0 αν u, v συνεχείς στο (x_0, y_0).

$\underline{\pi.\chi.}$ $f(z)=e^z$, $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$.

u, v συνεχείς στο $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ συνεχής στο $\mathbb{C}$.

Συνέχεια μιγαδικού λογαρίθμου.

Υπενθύμιση: Έστω $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$.

Η f είναι *συνεχής* στο $z_0 \in A$ ανν:

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ ώστε $\forall\ z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$, ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Ας υποθέσουμε ότι η f **δεν** είναι συνεχής στο z_0.

Τότε,

$\exists\ \varepsilon > 0$ με την παρακάτω ιδιότητα:

$\forall\ \delta > 0$, $\exists\ z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$, $\quad |f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon$.

Τότε, $\forall\ n \geq 1$, $\exists\ z_n \in A$, ώστε

$$|z_n - z_0| < 1/n, \quad |f(z_n) - f(z_0)| \geq \varepsilon. \tag{1}$$

Λήμμα: Έστω $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) f συνεχής στο z_0.

(β) για κάθε ακολουθία $(z_n) \subset A$ με $z_n \to z_0$, ισχύει $f(z_n) \to f(z_0)$.

(γ) για κάθε ακολουθία $(z_n) \subset A$ με $z_n \to z_0$, υπάρχει υπακολουθία (z_{k_n}) με $f(z_{k_n}) \to f(z_0)$.

Απόδειξη: [Μόνο το (γ) $\Rightarrow$ (α).]

Υποθέτουμε ότι η f **δεν** είναι συνεχής στο z_0. Τότε,

$\exists\, \varepsilon > 0$ και ακολουθία $(z_n) \subset \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει η (1).

Έπεται ότι $z_n \to z_0$. Λόγω της υπόθεσης, υπάρχει υπακολουθία (z_{k_n}) με $f(z_{k_n}) \to f(z_0)$, **άτοπο!** [βλ. (1)]. $\square$

Πρόταση: Το σύνολο σημείων συνέχειας της συνάρτησης $w \mapsto Arg(w)$ είναι το $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Απόδειξη: Έστω $w_0 \in A$ και $\varphi_0 = Arg(w_0)$.
Τότε, $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$.

Θεωρούμε ακολουθία $(w_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $w_n \to w_0$.

Τότε και $|w_n| \to |w_0|$.

Θέτουμε $\varphi_n = Arg(w_n) \in (-\pi, \pi],\ \ n \geq 1$.

Η πραγματική ακολουθία (φ_n) είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει υπακολουθία (φ_{k_n}) που συγκλίνει.

Έστω $\lim \varphi_{k_n} = \theta \in [-\pi, \pi]$.

Τότε, $e^{i\varphi_{k_n}} \to e^{i\theta} \ \Rightarrow\ w_{k_n} = |w_{k_n}| e^{i\varphi_{k_n}} \to |w_0| e^{i\theta}$.

Άρα, $w_0 = |w_0| e^{i\theta} \ \Rightarrow\ \theta - \varphi_0 = 2k\pi,$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$.

Επειδή $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, έπεται ότι $\varphi_0 = \theta$.

Επομένως, $Arg(w_{k_n}) = \varphi_{k_n} \to \theta = \varphi_0 = Arg(w_0)$.

Από το παραπάνω λήμμα [(γ) $\Rightarrow$ (α)] προκύπτει ότι η $w \mapsto Arg(w)$ είναι συνεχής στο w_0.

Τέλος, θα δείξουμε ότι η $w \mapsto Arg(w)$ είναι *ασυνεχής* σε κάθε $x_0 \in (-\infty, 0)$.

Πράγματι, έστω $x_0 \in (-\infty, 0)$. Θέτουμε

$$w_n = |x_0| e^{i\varphi_n}, \quad \varphi_n = -\pi + 1/n, \ n \geq 1.$$

Τότε, $\varphi_n \in (-\pi, \pi)$, για $n > 1/2\pi$.

Έχουμε

$$w_n \to |x_0| e^{-i\pi} = -|x_0| = x_0 \ ,$$

ενώ

$$Arg(w_n) = \varphi_n \ \to \ -\pi \ \neq \ \pi = Arg(x_0).$$

Από το παραπάνω λήμμα [(α) ⇒ (β)] προκύπτει ότι η $w \mapsto Arg(w)$ δεν είναι συνεχής στο x_0.

$\square$

Πόρισμα: Το σύνολο σημείων συνέχειας της συνάρτησης $w \mapsto \text{Log} w$ είναι το $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Απόδειξη: Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της Log είναι αντίστοιχα οι συναρτήσεις

$$w \mapsto \ln|w|, \quad w \mapsto Arg(w), \ \ w \neq 0$$

που είναι ταυτόχρονα συνεχείς μόνο στα σημεία του A. $\square$