Ασκήσεις (25/5/2021)

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

(5) $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια με $u^2 \leq v^2$. Να δ.ο.
f = σταθερή.

Λύση:

Θέτουμε $\underline{g = e^{f^2}}$. Η g είναι ακέραια κ'

$$|g| = e^{Re(f^2)} = e^{u^2 - v^2} \leq 1 \xRightarrow{[\Theta.\ \text{Liouville}]} g = \text{σταθερή}.$$

$$h = f^2, \quad g = e^h = c = \text{σταθερή} \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = g' = h' e^h \Rightarrow h' = 0, \text{ στο } \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad h = \text{σταθερή} \Rightarrow f^2 = \text{σταθερή} \Rightarrow$$

$|f^2| =$ σταθερή $\Rightarrow$ $|f|^2 =$ σταθερή $= c_1 \geq 0$

$\Rightarrow$ $|f| = \sqrt{c_1} =$ σταθερή

$\Rightarrow$ $f =$ σταθερή.

Θ. Liouville: Εάν $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια (δηλ. ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$) κ' $|f|$ φραγμένη σε όλο το $\mathbb{C}$, τότε $f =$ σταθερή.

④ Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια με $|f(z)| \geq 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
Να δ.ο. $f =$ σταθερή.

Λύση: $g = 1/f$ ακέραια $|g| \leq 1$ $\xRightarrow{\text{Θ. Liouville}}$ $g =$ σταθερή

$\Rightarrow$ $f =$ σταθερή.

(7) Ανάπτυγμα Laurent για την f στο "δακτύλιο" Δ γύρω από το z_0:

(i) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = -2$, $\Delta = \{z : 2 < |z+2| < 3\}$

Λύση:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

• $\dfrac{1}{z-1}$ Θέτω $w = \dfrac{z+2}{3} \Rightarrow z = 3w - 2$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{3w-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-w} \stackrel{(|w|<1)}{=}$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} w^n = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^n}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$$

• $\frac{1}{z}$ $\quad w = \frac{2}{z+2} \Rightarrow z+2 = \frac{2}{w} \Rightarrow z = \frac{2}{w} - 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\frac{w}{1-w} \overset{|w|<1}{=} \frac{w}{2}\sum_{n=0}^{\infty} w^n =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} w^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(z+2)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n}}{(z+2)^{n+1}}$$

(ii) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}, \quad z_0 = 0, \quad \Delta = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$= \frac{1-\cos(2z)}{2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\underbrace{\cos(2z)}_{\text{Taylor ανάπ}}\right) = \dots$$

(iii) $f(z) = \sin\left(\frac{z}{1-z}\right), \quad z_0 = 1, \quad \Delta = \mathbb{C} \setminus \{1\}$

Θέτουμε $w = 1 - z \Rightarrow z = 1 - w$

$$\Rightarrow f(z) = \sin\left(\frac{1-w}{w}\right) = \sin\left(\frac{1}{w} - 1\right) =$$

$$= \sin\frac{1}{w}\cos 1 - \cos\frac{1}{w}\sin 1$$

$$= \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/w)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/w)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(1-z)^{2n+1}} -$$

$$- \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{(1-z)^{2n}}$$

⑧ Έστω f ολόμορφη κ' φραγμένη στον $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ $(z_0 \in \mathbb{C},\ \delta > 0)$.

Να δ.ο. z_0 αιρόμενο ανώμαλο σημείο της f.

(Υπόδ: ολοκλ. τύποι για τους συντελ. Laurent)

<u>Λύση:</u>

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad a_k \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}$$

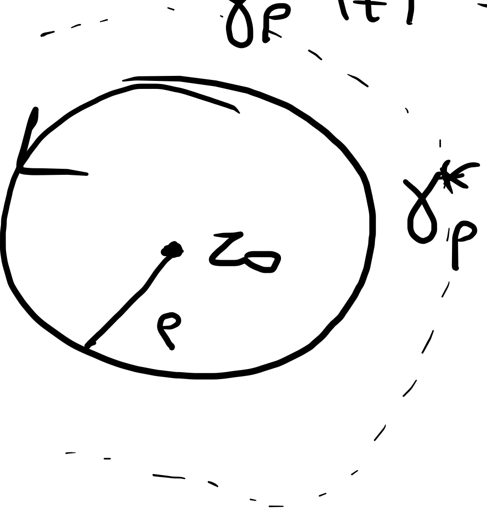
Θα δ.ο. $a_k = 0, \quad \forall\ k < 0.$

φραγμένη στο $D(z_0,\delta)\setminus\{z_0\} \Rightarrow \exists\ M > 0 \,|$

$$|f(z)| \leq M, \text{ για } 0 < |z-z_0| < \delta.$$

Έστω $0<\rho<\delta$. Θεωρούμε τον κύκλο

$$\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$



$\forall\, k \in \mathbb{Z}$,

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz$$

$$\forall\, z \in \gamma_\rho^*, \quad \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \right| \le \frac{M}{\rho^{k+1}}$$

$$\xRightarrow{ML} \quad |a_k| \le \frac{1}{2\pi}\, 2\pi\rho\, \frac{M}{\rho^{k+1}} = \frac{M}{\rho^k}$$

$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, \rho \in (0,\delta)$

Για $k<0$, $\rho^{-k} \xrightarrow{\rho \to 0} 0$ δηλ. $\dfrac{M}{\rho^{k}} \xrightarrow{\rho \to 0} 0$

$\Rightarrow$ $\underline{a_k = 0}$.

11 $\underline{(i)}$ Να βρείτε ολόμορφη $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ |

$\sin z = (\pi - z)\,\varphi(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\varphi(\pi) = 1$, $\varphi'(\pi) = 0$

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - 1}{\sin^2 z}\,dz = ?$, $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Λύση: (i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sin z = \sin(\pi - z) =$

$$= (\pi - z) - \frac{(\pi - z)^3}{3!} + \frac{(\pi - z)^5}{5!} - \cdots$$

$$= (\pi - z)\Big[\underbrace{1 - \frac{(\pi - z)^2}{3!} + \frac{(\pi - z)^4}{5!} - \cdots}_{\varphi(z)}\Big]$$

Η φ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$

$\varphi(\pi) = 1$, $\varphi'(\pi) = 0$

(ii) Ανώμαλα σημεία της $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{\sin^2 z}$
εντός της γ^* είναι
$0, \ \pm\pi$

$$\Rightarrow \int_\gamma f = 2\pi i \left[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\pi) + \mathrm{Res}(f,-\pi) \right]$$

- Res(f,0)

$$f(z) = \frac{z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots}{\left(z - z^3/3! + z^5/5! - \cdots\right)^2}$$

$$= \frac{1 + z/2! + z^2/3! + \cdots}{z\left(1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots\right)^2} = \frac{1}{z}\psi(z)$$

όπου $\psi = A/B^2$,

$$A(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots, \quad B(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\psi(z)$$

$B(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \psi$ αναλυτική σε περιοχή του 0

κ' $\psi(0) = 1 \neq 0 \xRightarrow{\text{Πρότ. } (\dots)}$ 0 = απλός πόλος

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0}[z f(z)] = 1$$

(Αλλιώς: $z f(z) = \left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 \frac{e^z - 1}{z} \xrightarrow{z\to 0} 1$)

$\underline{\operatorname{Res}(f, \pi)}$ $\qquad \sin z = (\pi - z)\varphi(z)$

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{(\pi - z)^2 \varphi(z)^2} = \frac{1}{(\pi - z)^2} h(z)$$

$$h(z) = \frac{e^z - 1}{\varphi(z)^2}$$ ολόμορφη σε περιοχή του π

κ' $h(\pi) \neq 0$

$\Longrightarrow \quad \pi =$ διπλός πόλος

$\Longrightarrow \operatorname{Res}(f, \pi) = h'(\pi) \overset{(!)}{=} \ldots \ldots$

$\underline{k \to \pi}$ όμοια και για το $\operatorname{Res}(f, -\pi)$

$$\sin z = -\sin(\pi + z) =$$

$$= -\left[(\pi + z) - \frac{(\pi+z)^3}{3!} + \dots\right]$$

$$= (\pi + z)\,\Phi(z)$$

$\Phi(-\pi) = \dots,\qquad \Phi'(-\pi) = \dots$