ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ-ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΣΕΜΦΕ -ΣΗΜΜΥ -ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤ. ΜΗΧΑΝ.
08/07/2020
ΟΜΑΔΑ Β
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 90′

ΘΕΜΑ 1: (i) (1,5 μ.) Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5$, $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $\mathrm{Re} f = u$, $f(0) = 0$.

(ii) (1 μ.) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f, g : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφες τέτοιες ώστε

$$f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}, \quad g(z) \neq 0, \quad \forall\, z \in U.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f(z) = \lambda g(z)$, $\forall\, z \in U$.

ΘΕΜΑ 2: (i)(1 μ.) Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \dfrac{2}{z} - \dfrac{1}{z+1}$ γύρω από το σημείο $z_0 = -1$ στον ''δακτύλιο'' $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 1\}$.

(ii)(1,5 μ.) Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 6} dx.$$

ΘΕΜΑ 3:(2,5 μ.) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z^2(e^z - 1)} dz, \qquad \int_\gamma \cos\left(\frac{z}{2\pi - z}\right) dz,$$

όπου $\gamma(t) = 8e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. [Δίνεται η ταυτότητα: $\cos(z - w) = \cos z \cos w + \sin z \sin w$.]

ΘΕΜΑ 4: Έστω $r \in (0,1)$, $D[0,r] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ και $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $D[0,r] \subseteq U$. Θεωρούμε ολόμορφη συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ με

$$|f(z^2)| \;\geq\; |f(z)|, \quad \forall\, z \in D[0,r].$$

Να δείξετε ότι:
(i) (1 μ.) $\max\{\, |f(z)| : |z| \leq r^2 \,\} = \max\{\, |f(z^2)| : |z| \leq r \,\}$.

(ii) (1,5 μ.) Η f είναι σταθερή στο $D[0,r]$.

ΟΜΑΔΑ Β

Θ.1.(i) Έστω $f = u + iv$ η ζητούμενη.

- $v_y \overset{(C-R)}{=} u_x = 20x^3y - 20xy^3$

$\Rightarrow \underline{v = 10x^3y^2 - 5xy^4 + c(x)}$ (1)

- $u_y = -v_x = -30x^2y^2 + \quad y^4 + c'(x)$

$\Rightarrow 5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4 = -30x^2y^2 + 5y^4 + c'(x)$

$\Rightarrow c'(x) = 5x^4 \Rightarrow \underline{c(x) = x^5 + c_1}$ (2)

Αλλά, $0 = f(0) = u(0,0) + iv(0,0)$

$= ic_1 \Rightarrow c_1 = 0$

$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} v = 10x^3y^2 - 5xy^4 + x^5$

$\Rightarrow f = u + iv = \ldots$

(ii) Θέτουμε $h = f/g$. Επειδή $g(z) \neq 0, \forall z \in U$, η h είναι ολόμορφη στο U.

$\forall z \in U$, $f(z)\overline{g(z)} = \overline{f(z)\overline{g(z)}}$

$$= \overline{f(z)}\, g(z)$$

$\Rightarrow \quad h(z) = \overline{h(z)}$

$\Rightarrow \quad h, \overline{h}$ ολόμορφες στο U

$\Rightarrow \quad h =$ σταθερή $= \lambda \in \mathbb{C}$.

Αλλά, $\overline{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα, $f(z) = \lambda g(z), \forall z \in U \ (\lambda \in \mathbb{R})$.

Θ.2. (i) Θέτουμε $w = \frac{1}{z+1}$. Τότε, $|w| < 1$, $\forall z \in \Delta$ κ'

$$z = \frac{1}{w} - 1 = \frac{1-w}{w} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{w}{1-w}$$

$$= w \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^n}$$

$\Rightarrow \forall z \in \Delta$,

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^n}$$

$$= 2 + \frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^n}.$$

(ii) Θέτουμε
$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+5z^2+6} = \frac{z^2}{(z^2+2)(z^2+3)}$$
Ρίζες παρανομαστή: $\pm i\sqrt{2}, \pm i\sqrt{3}$
Μόνο οι $i\sqrt{2}, i\sqrt{3}$ έχουν $\mathrm{Im} > 0$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f, i\sqrt{2}) + \mathrm{Res}(f, i\sqrt{3})\right].$$
$\forall p \in \{i\sqrt{2}, i\sqrt{3}\}$, $\mathrm{Res}(f,p) =$
$$= \left.\frac{z^2}{(z^4+5z^2+6)'}\right|_{z=p} = \frac{p^2}{4p^3+10p} =$$
$$= \frac{p}{4p^2+10}$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\left(\frac{i\sqrt{2}}{-8+10} + \frac{i\sqrt{3}}{-12+10}\right)$$
$$= 2\pi i \cdot i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

Θ.3. Θέτουμε $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(e^z-1)}$.

Ανώμαλα σημεία: $0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$

Μόνο $0, \pm 2\pi i \in \operatorname{int}\gamma^*$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,2\pi i)+ + \operatorname{Res}(f,-2\pi i)\right]$$

$\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots = z\varphi(z),$$

$$e^z-1 = z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots = z\psi(z),$$

όπου

$$\varphi(z) = 1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\dots;$$

$$\psi(z) = 1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\dots$$

Οι φ, ψ είναι ολόμορφες στο $\mathbb{C}$ με

$$\varphi(0)=1, \varphi'(0)=0, \psi(0)=1, \psi'(0)=\frac{1}{2!}$$

$\psi(0) \neq 0 \Rightarrow$ η $g = \varphi/\psi$ είναι ⑥

ολόμορφη σε περιοχή U του 0

κ' $\forall z \in U$,

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2}, \quad g(0) \neq 0$$

$\Rightarrow 0 =$ διπλός πόλος της f

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} [z^2 f(z)]' = g'(0)$$

$$= \frac{\varphi'(0)\psi(0) - \varphi(0)\psi'(0)}{\psi(0)^2}$$

$$= \frac{0 - 1 \cdot 1/2!}{(1/2!)^2} = -1/2$$

Επιπλέον, αν $A(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$,

$B(z) = e^z - 1$, τότε

$B(\pm 2\pi i) = 0$, $B'(\pm 2\pi i) \neq 0$, $A(\pm 2\pi i) \neq 0$

$\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Res}(f, \pm 2\pi i) = \operatorname{Res}\left(\frac{A}{B}, \pm 2\pi i\right)$$

$$= \frac{A(\pm 2\pi i)}{B'(\pm 2\pi i)} = A(\pm 2\pi i)$$

$$= \underline{\pm A(2\pi i)}$$

Άρα,

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \left[-\frac{1}{2} + \cancel{A(2\pi i) + A(-2\pi i)} \right]$$

$$= \underline{-\pi i}$$

$$\forall z \neq 2\pi, \quad \cos\left(\frac{z}{2\pi - z}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{2\pi - z} - 1\right)$$

$$= \cos 1 \cos\left(\frac{2\pi}{2\pi - z}\right) + \sin 1 \sin\left(\frac{2\pi}{2\pi - z}\right) =$$

$$= \cos 1 \left[1 - \left(\frac{2\pi}{2\pi - z} \right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left(\frac{2\pi}{2\pi - z} \right)^4 \cdot \frac{1}{4!} - \cdots \right]$$

$$+ \sin 1 \left[\frac{2\pi}{2\pi - z} - \left(\frac{2\pi}{2\pi - z} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \cdots \right]$$

Ο συντελεστής του $\frac{1}{z - 2\pi}$ στο

παραπάνω ανάπτυγμα είναι $-2\pi \sin 1$.

Άρα, $\operatorname{Res}\left(\cos\left(\frac{z}{2\pi - z} \right), 2\pi \right) = -2\pi \sin 1$.

Επειδή $2\pi \in \operatorname{int} \gamma^*$, έχουμε

$$\int_\gamma \cos\left(\frac{z}{2\pi - z} \right) dz = -(4\pi^2 i) \sin 1.$$

(ii) Επιλέγουμε $z_0 \in \mathbb{C}$ /

$|z_0| = r^2$, $|f(z_0)| = \max\limits_{|z|=r^2} |f(z)|$.

Αρχή Μεγίστου $\Rightarrow$

$$|f(z_0)| = \max_{|z|\le r^2} |f(z)| \overset{(i)}{=}$$

$$= \max_{|z|\le r} |f(z^2)| \overset{(\text{Υπόθεση})}{\geq}$$

$$\geq \max_{|z|\le r} |f(z)|.$$

Αλλά, $\underline{r^2 < r}$ $\Rightarrow$ $|z_0| < r$

οπότε $\max\limits_{|z|\le r} |f(z)| = |f(z_0)|$

ς' z_0 <u>εσωτερικό σημείο</u> του $D[0,r]$

$\xrightarrow[\text{Μεγίστου}]{\text{Αρχή}}$ f = σταθερή στο $D[0,r]$.

Θ. 4. (i) Είναι (9)

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r^2\} = \{z^2 \mid |z| = r\}. \quad (3)$$

Πράγματι· έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = r^2$.
Τότε, $z = r^2 e^{i\varphi}$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$

$$\Rightarrow \quad z = (re^{i\varphi/2})^2 = w^2, \quad w = re^{i\varphi/2}$$

κ' $|w| = r$.

Επιπλέον, αν $|z| = r$, τότε $|z^2| = r^2$.
Τώρα έχουμε (από Αρχή Μεγίστου)

$$\max_{|z| \leq r^2} |f(z)| = \max_{|z| = r^2} |f(z)| \overset{(3)}{=}$$

$$= \max_{|z| = r} |f(z^2)|$$

$$= \max_{|z| \leq r} |f(z^2)|.$$