ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ-ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΣΕΜΦΕ -ΣΗΜΜΥ -ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤ. ΜΗΧΑΝ.
08/07/2020
ΟΜΑΔΑ Α
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 90′

ΘΕΜΑ 1: (i) (1,5 μ.) Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + y, \quad x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $\mathrm{Re} f = u, \quad f(0) = 0$.

(ii) (1,5 μ.) Έστω $f = u + iv$ ολόμορφη στο πεδίο $U \subseteq \mathbb{C}$ τέτοια ώστε η συνάρτηση $u\overline{f}$ να είναι επίσης ολόμορφη. Υποθέτουμε ότι $f(z) \neq 0, \quad \forall\, z \in U$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 2: (i)(1 μ.) Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \dfrac{2}{z-2} + \dfrac{1}{z-1}$ γύρω από το σημείο $z_0 = 2$ στον ‘‘δακτύλιο’’ $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| > 1\}$.

(ii)(1,5 μ.) Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 4x^2 + 3} dx.$$

ΘΕΜΑ 3:(2,5 μ.) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z(1 - \cos z)} dz, \qquad \int_\gamma \sin\left(\frac{z}{1-z}\right) dz,$$

όπου $\gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$. [Δίνεται η ταυτότητα: $\sin(z - w) = \sin z \cos w - \sin w \cos z$.]

ΘΕΜΑ 4: Θέτουμε $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad \overline{D} = D \cup \partial D$ και θεωρούμε $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\overline{D} \subseteq U$.

(i) (1 μ.) Έστω $g : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με

$$|g(z)| = 1, \quad \forall\, z \in \partial D, \quad g(z) \neq 0,\ \forall\, z \in D.$$

Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή στον D.

(ii) (1 μ.) Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f(z) \in \mathbb{R},\ \forall\, z \in \partial D$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στον D.

ΟΜΑΔΑ Α

Θ.1.: (i) Έστω $f = u + iv$ η ζητούμενη.

• $v_y \overset{(C-R)}{=} u_x = 4x^3 - 12xy^2$

$\Rightarrow \underline{v = 4x^3y - 4xy^3 + c(x)}$ (1)

• $u_y = -v_x = -12x^2y + 4y^3 - c'(x)$

$\Rightarrow -12x^2y + 4y^3 + 1 = -12x^2y + 4y^3 + c'(x)$

$\Rightarrow c'(x) = 1 \Rightarrow \underline{c(x) = x + c_1}.$ (2)

Αλλά $0 = f(0) = u(0,0) + iv(0,0)$

$\overset{(1),(2)}{=} 0 + ic_1 \Rightarrow c_1 = 0$

$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \boxed{v = 4x^3y - 4xy^3 + x.}$

Άρα, $f = u + iv = \ldots$

(ii) $u\bar{f} = u^2 - iuv.$

- $(u^2)_x \overset{(C-R)}{=} -(u\cdot v)_y$

$\Rightarrow \quad 2uu_x = -u_y v - uv_y \overset{(C-R)}{=}$

$= v_x v - uu_x$

$\Rightarrow \quad \boxed{3uu_x - vv_x = 0} \quad (3)$

- $(u^2)_y \overset{(C-R)}{=} (u\cdot v)_x = u_x v + uv_x$

$\Rightarrow \quad 2uu_y = u_x v + uv_x$

$\overset{(C-R)}{\Rightarrow} \quad -2uv_x = u_x v + uv_x$

$\Rightarrow \quad \boxed{vu_x + 3uv_x = 0}. \quad (4)$

$\forall (x,y) \in U$, η ορίζουσα του συστήματος

$$\left.\begin{cases} 3u(x,y)\lambda - v(x,y)\mu = 0 \\ v(x,y)\lambda + 3u(x,y)\mu = 0 \end{cases}\right\} (\Sigma_{x,y})$$

(με αγνώστους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) είναι

$$D = \begin{vmatrix} 3u(x,y) & -v(x,y) \\ v(x,y) & 3u(x,y) \end{vmatrix}$$

$$= 9u^2(x,y) + v^2(x,y) > 0$$

(σημ. $f(x+iy) \neq 0$)

άρα το $\Sigma_{x,y}$ έχει μόνο τη μηδενική λύση. Επομένως,

$(3), (4) \Longrightarrow u_x = v_x = 0$, στο U

$\Rightarrow f' = u_x + i v_x = 0$, στο U=πεδίο

$\Rightarrow f =$ σταθερή.

Θ. 2. (i) Θέτουμε $w = \dfrac{1}{z-2}$.

Τότε, $|w| < 1$, για $z \in \Delta$ 5'

$$z = 2 + \frac{1}{w} \Rightarrow z - 1 = \frac{1+w}{w}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z-1} = w \cdot \frac{1}{1+w} = w \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-w)^n$$

$$= \frac{1}{z-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}, \quad \forall z \in \Delta$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{2}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}, \quad \forall z \in \Delta$$

$$= \frac{3}{z-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}, \quad \forall z \in \Delta.$$

(ii) Θέτουμε

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 4z^2 + 3} = \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)\cdot(z^2+3)}.$$

Ρίζες παρανομαστή: $\pm i$, $\pm i\sqrt{3}$.

Μόνο οι i, $i\sqrt{3}$ έχουν $Im > 0$.

Επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \left[Res(f, i) + Res(f, i\sqrt{3}) \right]$$

$$\forall p \in \{i, i\sqrt{3}\}, \quad Res(f, p) = \left. \frac{z^3 e^{iz}}{(z^4+4z^2+3)'} \right|_{z=p}$$

$$= \frac{p^3 e^{ip}}{4p^3 + 8p} = \frac{p^2 e^{ip}}{4p^2 + 8}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{p^2 e^{ip}}{p^2 + 2}$$

$$\Rightarrow Res(f, i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{-e^{-1}}{-1+2} = -\frac{1}{4e},$$

&

$$Res(f, i\sqrt{3}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{-3e^{-\sqrt{3}}}{-3+2} = \frac{3}{4e^{\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{3}{e^{\sqrt{3}}} - \frac{1}{e}\right) = J$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+4x^2+3}\,dx = \mathrm{Im}\,(J)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{e^{\sqrt{3}}} - \frac{1}{e}\right).$$

Θ. 3. Θέτουμε $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z(1-\cos z)}$.

$e^z - 1 = z\varphi(z)$, $\quad 1-\cos z = z^2\psi(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\varphi(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots, \ \forall z\in\mathbb{C}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

φ, ψ ολόμορφες στο $\mathbb{C}$ με

$\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = \dfrac{1}{2!}$, $\psi(0) = \dfrac{1}{2!}$,

$\psi'(0) = 0$.

Επειδή $\psi(0) \neq 0$, η $g = \varphi/\psi$

είναι ολόμορφη σε περιοχή U του 0

κ'

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2}, \quad \forall z \in U, \quad g(0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ 0 πόλος τάξης 2 της f

$$\Rightarrow \text{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} [z^2 f(z)]' = g'(0)$$

$$= \frac{\varphi'(0)\psi(0) - \varphi(0)\psi'(0)}{\psi(0)^2} = \frac{\varphi'(0)}{\psi(0)} = \frac{1/2!}{1/2!}$$

$$= 1.$$

Η εξίσωση $\cos z = 1$ έχει ρίζες $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

από τις οποίες μόνο το $0 \in \text{int}\,\gamma^*$.

Άρα, $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\text{Res}(f, 0)$

$$= 2\pi i.$$

$\forall z \neq 1,$

$$\sin\left(\frac{z}{1-z}\right) = \sin\left(\frac{1}{1-z} - 1\right)$$

$$= \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)\cos 1 - \cos\left(\frac{1}{1-z}\right)\sin 1$$

$$= \cos 1\left[\frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^3 \cdot 3!} + \frac{1}{(1-z)^5 \cdot 5!} - \cdots\right] -$$

$$- \sin 1\left[1 - \frac{1}{(1-z)^2 \cdot 2!} + \frac{1}{(1-z)^4 \cdot 4!} - \cdots\right]$$

Ο συντελεστής του $\frac{1}{z-1}$ στο παραπάνω ανάπτυγμα είναι $-\cos 1$

$$\Rightarrow \int_\gamma \underbrace{\sin\left(\frac{z}{1-z}\right)}_{h(z)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(h, 1)$$

$$= -\underline{2\pi i \cos 1}.$$

Θ.4. (i)

Αρχή Μεγίστου $\Rightarrow \max_{\overline{D}} |g| = \max_{\partial D} |g| = 1.$

Επειδή $g(z) \neq 0$, $\forall z \in D$,

Αρχή Ελαχίστου $\Rightarrow \min_{\overline{D}} |g| = \min_{\partial D} |g| = 1.$

Άρα, $\max_{\overline{D}} |g| = \min_{\overline{D}} |g| = 1$

$\Rightarrow |g| = 1$, στο $\overline{D} \Rightarrow g =$ σταθερή στο $\overline{D}$.

(ii) Θέτουμε $g(z) = e^{if(z)}$, $z \in U$.

Τότε, g ολόμορφη στο U κ' $\forall z \in \partial D$,

$f(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow |g(z)| = |e^{if(z)}| = 1$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow} g =$ σταθερή στο $D \Rightarrow$

$0 = g'(z) = if'(z) e^{if(z)}$, $\forall z \in D$

$\Rightarrow f'(z) = 0$, $\forall z \in D \Rightarrow f$ σταθερή στο D