ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 26/06/2017

Θέμα 1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(i) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. (0,5 μον)

(ii) Αν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου, να βρεθεί η παράγωγος της f στο $(0,0)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$. (0,5 μον)

(iii) Δείξτε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. (1,5 μον)

ΛΥΣΗ: (i) Για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = |x| + |y|$$

Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ και άρα η f είναι συνεχής.

(ii) Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3u_1^3+t^3u_2^3}{t^2u_1^2+t^2u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3+u_2^3}{u_1^2+u_2^2} = u_1^3 + u_2^3.$$

αφού $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$ ($\mathbf{u}$ μοναδιαίο).

(iii) Απο το (ii) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$,

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0) = 1,$$

και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$,

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0) = 1.$$

Γνωρίζουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

ισοδύναμα,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Αλλά τότε αν $x = y = t$ θα πρέπει

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^3}{\sqrt{2}|t|^3} = 0 \text{ ή } \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} = 0,$$

που βέβαια δεν ισχύει.

Θέμα 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει $M > 0$ με $\|\nabla f(\mathbf{x})\| \le M$, για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, δείξτε ότι η f είναι M-Lipschitz, δηλαδή

$$|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})| \le M\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|,$$

για όλα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. (1 μον)

(β) Έστω $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις. Αν για κάθε n συνευθειακά σημεία $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ του $\mathbb{R}^n$, όχι απαραίτητα διαφορετικά μεταξύ τους, ο πίνακας $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_i)\right)$ είναι αντιστρέψιμος, δείξτε ότι η $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι $1-1$. (1,5 μον)

ΛΥΣΗ: (α) Αρκεί να δειχθεί ότι

$$|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})| \le M\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

για $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ (Όταν $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ και τα δύο μέλη μηδενίζονται). Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^n$. Απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής για συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχουμε ότι υπάρχει $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ με

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Απο την ανισότητα Cauchy–Schwarz παίρνουμε

$$|\nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})| \le \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \le M\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

και το ζητούμενο έπεται.

(β) Έστω $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^n$. Απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής για συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\forall 1 \le i \le n$ υπάρχει $\mathbf{x}_i \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ με

$$f_i(\mathbf{b}) - f_i(\mathbf{a}) = \nabla f_i(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = [\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}_i) \ldots \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}_i)] \cdot [b_1 - a_1 \ldots b_n - a_n]^\top.$$

Θέτοντας $A = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_i)\right)$ να είναι ο $n \times n$ πίνακας με γραμμές τα $\nabla f_i(\mathbf{x}_i)$, $1 \le i \le n$, έχουμε συνεπώς,

$$[f_1(\mathbf{b}) - f_1(\mathbf{a}), \ldots, f_n(\mathbf{b}) - f_n(\mathbf{a})]^\top = A \cdot [b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n]^\top$$

ή ταυτίζοντας τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ με πίνακες στήλες,

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = A \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Αφού $\mathbf{x}_i \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, για όλα τα $1 \le i \le n$, έχουμε ότι τα $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ ειναι συνευθειακά και άρα απο την υπόθεσή μας ο A είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς

$$A^{-1} \cdot \big(f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\big) = \mathbf{b} - \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

που σημαίνει ότι $f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b})$.

Θέμα 3. (α) Έστω $\tau \in \mathbb{R}$ με $\tau > 0$ και $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0 \text{ και } x+y < \tau\}$, το εσωτερικό του τριγώνου του επιπέδου με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(\tau,0)$ και $(0,\tau)$. Έστω επίσης η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x,y) = xy(\tau - x - y)$, για κάθε $(x,y) \in A$.

(i) Δείξτε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό ακρότατο που είναι τοπικό μέγιστο στο σημείο $(\tau/3, \tau/3)$. (1,5 μον)

(ii) Δείξτε η f έχει ολικό μέγιστο στο σημείο $(\tau/3, \tau/3)$. (0,5 μον)

(β) Δείξτε ότι απο όλα τα τρίγωνα με την ίδια περίμετρο το ισόπλευρο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό. Δίνεται ότι το εμβαδό ενός τριγώνου με πλευρές α, β, γ δίνεται απο τον τύπο $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ όπου $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου. (0,5 μον)

ΛΥΣΗ: (i) Έχουμε $f(x,y) = xy(\tau - x - y) = \tau xy - x^2y - xy^2$ και άρα

$$f_x(x,y) = \tau y - 2xy - y^2 = y(\tau - 2x - y) \text{ και } f_y(x,y) = \tau x - x^2 - 2xy = x(\tau - x - 2y).$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος $f_x = f_y = 0$ που επειδή $x, y \neq 0$ γράφεται

$$\begin{aligned} \tau - 2x - y &= 0 \\ \tau - x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς $x = y = \tau/3$. Άρα η f αν έχει τοπικό ακρότατο αυτό θα είναι μοναδικό και θα είναι στο σημείο $(\tau/3, \tau/3)$. Θα δείξουμε τώρα ότι όντως η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $(\tau/3, \tau/3)$. Έχουμε $f_{xx}(x,y) = -2y$, $f_{yy}(x,y) = -2x$, $f_{xy}(x,y) = \tau - 2x - 2y$ και άρα $f_{xx}(\tau/3, \tau/3) = -2\tau/3$, $f_{yy}(\tau/3, \tau/3) = -2\tau/3$ και $f_{xy}(\tau/3, \tau/3) = -\tau/3$. Συνεπώς

$$f_{xx}(\tau/3, \tau/3) < 0 \text{ και } \Delta(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 4\tau^2/9 - \tau^2/9 = \tau^2/3 > 0$$

και άρα το $(\tau/3, \tau/3)$ είναι τοπικό μέγιστο.

(ii) **α'τρόπος**: Έστω $\tilde{f}$ η επέκταση της f σε όλο το κλειστό τρίγωνο (εσωτερικό και σύνορο μαζί). Επειδή η $\tilde{f}$ είναι συνεχής και ορίζεται σε ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ θα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Επειδή $\tilde{f}(x,y) = 0$ αν το (x,y) είναι στο σύνορο του τριγώνου και $\tilde{f}(x,y) > 0$ αν (x,y) είναι στο εσωτερικό του, θα έχουμε ότι η μέγιστη τιμή της $\tilde{f}$ θα λαμβάνεται στο εσωτερικό του τριγώνου, οπότε θα είναι και μέγιστη τιμή της f. Επειδή όμως όπως αποδείξαμε η f έχει μόνο ένα τοπικό μέγιστο στο $(\tau/3, \tau/3)$ θα πρέπει το $(\tau/3, \tau/3)$ να είναι και το σημείο όπου η f λαμβάνει μέγιστη τιμή.

Ένας πιο γρήγορος τρόπος είναι και ο εξής:
β'τρόπος: Από την ανισότητα γεωμετρικού και αριθμητικού μέσου παίρνουμε ότι

$$f(x,y) = xy(\tau - x - y) \leq \left(\frac{x + y + (\tau - x - y)}{3}\right)^3 = \left(\frac{\tau}{3}\right)^3 = f(\tau/3, \tau/3)$$

και άρα το σημείο $(\tau/3, \tau/3)$ είναι ολικό μέγιστο της f.

(β) Στον τύπο $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ όπου $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ ημιπερίμετρος του τριγώνου, θέτουμε $x = \tau - \alpha$ και $y = \tau - \beta$. Είναι $x + y = 2\tau - \alpha - \beta = \gamma$ οπότε και $\tau - \gamma = \tau - x - y$.

Επίσης έχουμε $x = \tau - \alpha = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} > 0$ απο τριγωνική ανισότητα. Ομοίως $y = \tau - \beta > 0$ και $\tau - x - y = \tau - \gamma > 0 \Leftrightarrow x + y < \tau$. Συνεπώς $(x, y) \in A$ και

$$E = \sqrt{\tau xy(\tau - x - y)} = \sqrt{\tau}\sqrt{f(x, y)}.$$

Συνεπώς η μεγιστοποίηση του E είναι ισοδύναμη με την μεγιστοποίηση της f. Απο το (α) ερώτημα έχουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο μοναδικό σημείο $(\tau/3, \tau/3)$. Άρα $\alpha = \tau - x = 2\tau/3$, $\beta = \tau - y = 2\tau/3$ και $\gamma = x + y = 2\tau/3$, ισοδύναμα το εμβαδό γίνεται μέγιστο όταν και μόνον όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Θέμα 4. Δίνεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x, y, z) = z^5 + z - x^2 - y^2$.

(i) Δείξτε ότι η F είναι κλάσης C^2 και ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ ορίζει μια μοναδική συνάρτηση $z = z(x, y) : U \to \mathbb{R}$ (επίσης κλάσης C^2) σε μια περιοχή U του σημείου $(0, 0)$ με $z(0, 0) = 0$. (0,5 μον)

(ii) Υπολογίστε τις πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της $z = z(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$. (1 μον)

(iii) Δώστε το πολυώνυμο Taylor της $z = z(x, y)$ δεύτερης τάξης στο $(0, 0)$. (0,5 μον)

(iv) Βρείτε το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{z(x, y)}{x^2 + y^2}$. (0,5 μον)

ΛΥΣΗ: (i) Έχουμε $F_x(x, y, z) = -2x$, $F_y(x, y, z) = -2y$, $F_z(x, y, z) = 5z^4+1$ $F_{xx}(x, y, z) = -2$, $F_{yy}(x, y, z) = -2$, $F_{zz}(x, y, z) = 20z^3$, $F_{xy} = F_{yx} = 0$, $F_{yz} = F_{yz} = 0$ και $F_{zx} = F_{xz} = 0$. Άρα η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης, δηλαδή είναι C^2. Επειδή $F_z(x, y, z) = 5z^4+1 \neq 0$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ έχουμε (Θεώρημα των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων) ότι σε κάθε (x_0, y_0, z_0) με $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ υπάρχει κατάλληλη περιοχή του (x_0, y_0, z_0) όπου η εξίσωση $F(x, y, z)$ λύνεται ως προς $z = z(x, y)$. Επειδή $F(0, 0, 0) = 0$ το ζητούμενο έπεται. $F_z(x, y, z) = 5z^4 + 1 \neq 0$

(ii) Είναι

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y)}{F_z(x, y)} = \frac{2x}{5z^4(x, y) + 1}, \quad z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y)}{F_z(x, y)} = \frac{2y}{5z^4(x, y) + 1}$$

$$z_{xx}(x, y) = \frac{2(5z^4(x, y) + 1) - 40xz^3 z_x(x, y)}{(5z^4(x, y) + 1)^2}$$

$$z_{yy}(x, y) = \frac{2(5z^4(x, y) + 1) - 40yz^3 z_y(x, y)}{(5z^4(x, y) + 1)^2}$$

$$z_{xy}(x, y) = \frac{-40xz^3 z_y(x, y)}{(5z^4(x, y) + 1)^2}$$

Άρα $z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$, $z_{xx}(0, 0) = z_{yy}(0, 0) = 2$ και $z_{xy}(0, 0) = 0$.

(iii) Όπως γνωρίζουμε το πολυώνυμο Taylor της $z = z(x, y)$ δεύτερης τάξης στο σημείο $(0, 0)$ δίνεται απο τον τύπο

$$T(x, y) = z(0, 0) + z_x(0, 0)x + z_y(0, 0)y + \frac{1}{2}\left[z_{xx}(0, 0)x^2 + 2z_{xy}(0, 0)xy + z_{yy}(0, 0)y^2\right]$$

και άρα αντικαθιστώντας τις τιμές των μερικών παραγώγων παίρνουμε ότι $T(x, y) = x^2 + y^2$.

(iv) Απο το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι

$$\lim_{x,y)\to(0,0)} \frac{z(x, y) - T(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

Απο το (iii) έχουμε

$$\frac{z(x, y) - T(x, y)}{x^2 + y^2} = \frac{z(x, y) - (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{z(x, y)}{x^2 + y^2} - 1$$

και συνεπώς

$$\lim_{x,y)\to(0,0)} \frac{z(x, y)}{x^2 + y^2} = 1.$$