ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 7 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΟΜΑΔΑ Β

Να απαντήσετε σε ακριβώς ΤΡΙΑ από τα παρακάτω τέσσερα θέματα.

ΘΕΜΑ 1. *(α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$.*

(i) (0,5 μον) Δείξτε ότι $\dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{a^2+b^2}$ *για κάθε* $(x,y) \neq (0,0)$.

(ii) (1,5 μον) Για ποιές τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *υπάρχει;*

(β) (1,5 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ και τέτοια ώστε $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ell \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και $\ell = 0$.*

Λύση: (α) (i) Άμεσο από ανισότητα Cauchy–Schwarz:

$$\frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(a,b)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

(ii) Αν $a = b = 0$ τότε προφανώς το όριο υπάρχει και είναι ίσο με 0. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε άλλη τιμή των a και b το όριο δεν υπάρχει. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις ακολουθίες $(1/n, 0)$, $(0, 1/n)$ και $(1/n, 1/n)$ βλέπουμε εύκολα ότι αν υπήρχε το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$ τότε θα έπρεπε

$$a = b = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

και άρα $a = b = 0$.

(β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ θα έχουμε ότι

(1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Επίσης η f είναι και συνεχής στο $(0,0)$ και άρα

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2} = \ell \cdot 0 = 0.$$

Αντικαθιστώντας στην (1) και λαμβάνοντας ψπόψην ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ell$ παίρνουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ell$$

Από το ερώτημα (α)(ii) (για $a = f_x(0,0)$ και $b = f_y(0,0)$) έπεται ότι $f_x(0,0) = f_y(0,0) = \ell = 0.\square$

ΘΕΜΑ 2. *(α) (1,5 μον) Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα στο $(0,0)$ την συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=\dfrac{y^3}{x^4+y^2}$ αν $(x,y)\neq(0,0)$ και $f(0,0)=0$.*

(β) (1 μον) Έστω C^2 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=0$ και $f_{xy}(0,0)=2$. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

$$\text{(i)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}\qquad \text{(ii)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}.$$

(γ) (1 μον.) Δίνεται C^1 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(0,0)=0$ και $f_x(x,y)=2x$ και $f_y(x,y)=3y$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι $|f(x,y)|\leq 4x^2+9y^2$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Λύση: (α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ και επιπλέον

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

Έχουμε

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{y\to0}\frac{0}{x}=\lim_{x\to0}0=0$$

και

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{y^3}{y^2}}{y}=\lim_{y\to0}\frac{y^3}{y^3}=\lim_{y\to0}1=1$$

Επίσης

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$. Αν $y=0$ τότε προφανώς

(2)
$$\frac{x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

για κάθε $y\neq0$. Διαφορετικά, από την ανισότητα $a^2+b^2\geq 2ab\geq ab$, αν $a,b\geq0$, (για $a=|x|^2, b=|y|$) έπεται ότι $x^4+y^2\geq x^2|y|$ και άρα

(3)
$$\left|\frac{x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot|x|\leq|x|$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι

$$\left|\frac{x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq|x|$$

για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$ και άρα, από το κριτήριο παρεμβολής,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

(β) (i) Το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $(0,0)$ είναι το $T_1(x,y)=0$. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Άρα

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} = 0 \tag{4}$$

αφού $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \leq 1$, για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.

((ii) Το δεύτερης τάξης είναι το $T_2(x,y) = 2xy$ και από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-2xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

Απο την σχέση αυτή παρατηρούμε ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει, αφού διαφορετικά θα έπρεπε να υπήρχε και το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ που όμως, όπως ελέγχεται εύκολα με τις ακολουθίες $(1/n,0)$ και $(1/n,1/n)$, δεν υπάρχει.

(γ) Για $(x,y)=(0,0)$ η ανισότητα προφανώς ισχύει. Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x,y) \neq (0,0)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$f(x,y)-f(0,0) = f_x(\xi,\eta)(x-0) + f_y(\xi,\eta)(y-0) = 2\xi \cdot x + 3\eta \cdot y \tag{5}$$

Από την (5) και από την ανισότητα Cauchy–Schwarz παίρνουμε

$$|f(x,y)| = |f(x,y)-f(0,0)| = |2\xi x + 3\eta y| \leq \sqrt{4\xi^2+9\eta^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \tag{6}$$

Επειδή το (ξ,η) ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y), έπεται ότι $|\xi| \leq |x|$ και $|\eta| \leq |y|$ και άρα $\sqrt{4\xi^2+9\eta^2} \leq \sqrt{4x^2+9y^2}$ οπότε από την (6) $|f(x,y)| \leq \sqrt{4x^2+9y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = 4x^2+9y^2$.

ΘΕΜΑ 3. *(α) (1 μον.) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = 2x^4 - 8xy + 4y^2 + 7$.*

(β) (1 μον.) Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με το $(0,0)$ σαγματικό σημείο και $f(0,0) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο ακολουθίες (x_n,y_n) και (x_n',y_n') στον $\mathbb{R}^2$ τέτοιες ώστε $\lim(x_n,y_n) = \lim(x_n',y_n') = (0,0)$ και $f(x_n',y_n') < 0 < f(x_n,y_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) (1,5 μον.) Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες (i) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, (ii) $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) \leq 0$ και $f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = 0$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου για την f.

Λύση: (α) Έχουμε $f(x,y) = 2x^4 - 8xy + 4y^2 + 7$ και άρα

$$f_x(x,y) = 8x^3 - 8y,\ f_y(x,y) = -8x + 8y,$$
$$f_{xx}(x,y) = 24x^2,\ f_{xy}(x,y) = -8,\ f_{yy}(x,y) = 8$$

και άρα

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = 192x^2 - 64 \tag{7}$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$x^3 - y = 0$$
$$-x + y = 0$$

απ΄ όπου

$$y = x$$

και

$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x + 1 \text{ ή } x = -1$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. Από την (7) έχουμε

$$\Delta(0,0) < 0, \quad \Delta(1,1) = \Delta(-1,-1) > 0$$

Επειδή $f_{xx}(1,1) = f_{xx}(-1,-1) > 0$ έχουμε ότι τα σημεία $(-1,-1)$ είναι τοπικά ελάχιστα για την f ενώ το $(0,0)$ σαγματικό.

(α) Αφού το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο δεν είναι τοπικό ακρότατο και άρα σε κάθε περιοχή του $(0,0)$ υπάρχουν (x,y) και (x',y') με $f(x',y') < f(0,0) < f(x,y) \Leftrightarrow f(x'y') < 0 < f(x,y)$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε (x_n, y_n) και (x'_n, y'_n) στον ανοικτό δίσκο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $r_n = 1/n$ με $f(x'_n, y'_n) < 0 < f(x_n, y_n)$. Επειδή $1/n \to 0$ έπεται ότι $\lim_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$.

(γ) Έστω $(x,y) \neq (0,0)$. Από τον Τύπο Taylor έχουμε ότι υπάρχει (ξ, η) στο ανοικτό ευθ. τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \end{aligned}$$

Αφού $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) \leq 0$ και $f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) = f^2_{xy}(x,y)$, θέτοντας

$$a = f_{xx}(\xi,\eta) = f_{yy}(\xi,\eta)$$

έχουμε ότι $a \leq 0$ και $f_{xy}(\xi,\eta) = \pm a$.

Διακρίνουμε τις επόμενες δυνατές περιπτώσεις:

(1) $a = 0$. Τότε $f_{xy}(\xi,\eta) = 0$ και

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) = f(0,0).$$

(2) $a < 0$ και $f_{xy}(\xi,\eta) = -a$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \frac{a}{2}\left(x^2 - 2xy + y^2\right) = f(0,0) + \frac{a}{2}(x-y)^2 \leq f(0,0) \end{aligned}$$

(3) $a > 0$ και $f_{xy}(\xi,\eta) = a$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \frac{a}{2}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) = f(0,0) + \frac{a}{2}(x+y)^2 \leq f(0,0) \end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπωση $f(x,y) \leq (0,0)$. Επειδή το (x,y) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^2$ διάφορο του $(0,0)$ έπεται ότι η f έχει στο $(0,0)$ ολικό μέγιστο. $\square$

__ΘΕΜΑ 4.__ (α) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή όχι, δικαιολογώντας την απάντησή σας:

(i) (0,5 μον.) Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(a_n - a)$ συγκλίνει.

(ii) (0,5 μον) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε η ακολουθία (na_n) είναι κάτω φραγμένη. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(iii) (0,5 μον) Έστω $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών και έστω R η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Τότε $R \geq 1$.

(β) (i) (1 μον.) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$.

(ii) (1 μον.) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ συγκλίνει.

Λύση: (i) Αφού (a_n) φθίνουσα με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η $b_n = a_n - a$ είναι φθίνουσα με $\lim b_n = 0$. Απο κριτήριο Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(a_n - a)$ συγκλίνει.

(ii) Λάθος, πχ. $a_n = \frac{1}{n}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει αλλά $na_n = 1$.

(iii) Αφού η (a_n) είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία, η εναλλάσσουσα σειρά $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει (κριτήριο Leibniz). Άρα η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x = -1$ και συνεπώς, αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, θα πρέπει $R \geq 1$.

(β) (i) Έχουμε $\arctan\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\lim \frac{\arctan\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0$$

αφού

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = (\arctan x)'_{x=0} = \frac{1}{1+x^2}\ |_{x=0} = \frac{1}{2}$$

και από κανόνα De l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από οριακό κριτ·ηριο σύγκλισης, έπεται και ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

(ii) Θέτουμε $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \tag{8}$$

και άρα $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/e$. Συνεπώς $R = e$ και αν $|x| < e$ η δυναμοσειρά συγκλίνει ενώ αν $|x| > e$ αποκλίνει. Μένει να εξετάσουμε την σύγκλιση στα σημεία $x = e$ και $x = -e$.

Στο $x = e$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, όπου $b_n = a_n e^n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \stackrel{(8)}{=} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n e = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

αφού $(1+\frac{1}{n})^n < e$. Άρα η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ δεν συγκλίνει. Συνεπώς η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει για $x = e$.

Στο $x = -e$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n e^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ που πάλι δεν συγκλίνει. Πράγματι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ συνέκλινε θα έπρεπε $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n b_n = 0$. Αλλά τότε και $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, που είναι άτοπο, αφού η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα και άρα $b_n \geq b_1 = e$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in (-e, e)$ και αποκλίνει παντού αλλού.$\square$