ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 22/1/2021

*Α. Τσεκάρετε **ΟΛΕΣ** τις **ΣΩΣΤΕΣ** απαντήσεις* :

Α1. (1,5 μον.) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(α) Αν $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ και οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης $f_{x_i}(\mathbf{a})$, $i = 1, \dots, n$ της f στο $\mathbf{a}$ υπάρχουν τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$. **ΛΑΘΟΣ**.

(β) Αν οι $f_{x_i}(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, n$ ορίζονται για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^n$. **ΣΩΣΤΟ**

(γ) Αν σε ένα σημείο $\mathbf{a}$ του $\mathbb{R}^n$ η f έχει παράγωγο $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$ κατά οποιαδήποτε μοναδιαία κατεύθυνση $\mathbf{u}$ του $\mathbb{R}^n$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$. **ΛΑΘΟΣ**

(δ) Έστω ότι σε ένα σημείο $\mathbf{a}$ του $\mathbb{R}^n$, οι $f_{x_i}(\mathbf{a})$, $i = 1, \dots, n$ υπάρχουν. Έστω επίσης $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ μοναδιαίο. Τότε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a}) \cdot u_i$. **ΛΑΘΟΣ**

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για τα (a), (γ) και (δ) θεωρείστε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *με* $f(0,0) = 0$ *και* $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ *αν* $(x,y) \neq (0,0)$ *(δείτε πχ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.10 σελ. 45 των ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ)*

Α2. (1,5 μον.) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ κρίσιμο σημείο της f.

(α) Αν $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ και $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0). **ΛΑΘΟΣ**

(β) Αν $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ και $f(x,y) \neq 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της f. **ΛΑΘΟΣ**

(γ) Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0) τότε $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$. **ΣΩΣΤΟ**

(δ) Αν $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$ τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε γενικά αν η f έχει ή όχι τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0). **ΣΩΣΤΟ**

(ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για το (β) θεωρείστε την σταθερή συνάρτηση $f(x,y) = 1$*)*

Β. Να γράψετε την λύση των επόμενων ασκήσεων :

Β1. (2 μον) Γράψτε το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y) = e^x \cos y$ τάξης 2 με κέντρο το $(0, \pi/2)$.

ΛΥΣΗ Έχουμε

$$f_x(x,y) = e^x \cos y, \quad f_y(x,y) = -e^x \sin y$$
$$f_{xx}(x,y) = e^x \cos y$$
$$f_{yy}(x,y) = -e^x \cos y$$
$$f_{xy}(x,y) = (f_x)_y = -e^x \sin y$$

Άρα

$$f_x(0,\pi/2) = 0, \quad f_y(0,\pi/2) = -1, \quad f_{xx}(0,\pi/2) = 0, \quad f_{yy}(0,\pi/2) = 0, \quad f_{xy}(0,\pi/2) = -1$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y) = e^x \cos y$ τάξης 2 με κέντρο το $(1, \pi)$ είναι το

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= f(0,\pi/2) + f_x(0,\pi/2)(x-0) + f_y(0,\pi/2)(y-\pi/2) + \\
&\frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,\pi/2)(x-0)^2 + 2f_{xy}(0,\pi/2)(x-0)(y-\pi/2) + f_{yy}(0,\pi/2)(y-\pi/2)^2\right) \\
&= 0 + 0x - (y-\pi/2) + \frac{1}{2}\left(0x^2 - 2x(y-\pi/2) + 0(y-\pi)^2\right) \\
&= -(y-\pi/2) - x(y-\pi/2) \\
&= \frac{\pi}{2}x - y - xy + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

B2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=\dfrac{x^5}{x^4+y^6}$ αν $(x,y)\neq(0,0)$ και $f(0,0)=0$.

(α) (1 μον) Έστω $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Βρείτε (*με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου*) την $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$.

(β) (2 μον) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

ΛΥΣΗ

(α) Έστω $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\|=1$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\mathbf{u})-f(\mathbf{0})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^5u_1^5}{t^4u_1^4+t^6u_2^6}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^5u_1^5}{t^5u_1^4+t^7u_2^6}=\lim_{t\to 0}\frac{u_1^5}{u_1^4+t^2u_2^6}=u_1.$$

(β) Απο το (α) για $\mathbf{u}=\mathbf{e}_1=(1,0)$,

$$f_x(0,0)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0)=1,$$

και για $\mathbf{u}=\mathbf{e}_2=(0,1)$,

$$f_y(0,0)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0)=0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^5}{x^4+y^6}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=-\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^6}{(x^4+y^6)\sqrt{x^2+y^2}}=0\end{aligned}$$

Μετατρέποντας σε πολικές συντεταγμένες ($\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho sin\theta$) παίρνουμε

$$(1)\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^6}{(x^4+y^6)\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\cos\theta\cdot\rho^6\sin^6\theta}{(\rho^4\cos^4\theta+\rho^6\sin^6\theta)\rho}=\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\rho^2\cdot\sin^6\theta}{\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\right)=0$$

Πράγματι έστω $\epsilon>0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το θ: Αν $|\cos\theta|<\epsilon$ τότε

$$\left|\frac{\rho^2\cdot\sin^6\theta}{\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\right|\leq|\cos\theta|<\epsilon$$

για οποιοδήποτε $\rho>0$, ενώ αν $|\cos\theta|\geq\epsilon$ τότε

$$\left|\frac{\rho^2\cdot\sin^6\theta}{\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\right|\leq\frac{\rho^2\cdot\sin^6\theta}{\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}\leq\frac{\rho^2}{\epsilon^4}<\epsilon$$

για $0<\rho<\epsilon^{5/2}$. Συνεπώς για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta=\epsilon^{5/2}$ τέτοιο ώστε για $0<\rho<\epsilon^{5/2}$ και για κάθε $\theta>0$,

$$\left|\frac{\rho^2\cdot\sin^6\theta}{\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\right|<\epsilon$$

δηλαδή η (1) όντως ισχύει. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

B3. (2 μον) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ με $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Βρείτε το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{|x|+|y|}$$

ΛΥΣΗ Έχουμε

$$\left|\frac{f(x,y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{|x|+|y|}\right|\le\left|\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}\right|\le\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\cdot\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|}\right|\le\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \tag{2}$$

Τώρα από την παραγγισιμότητα της f στο $(0,0)$ και το ότι $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ έπεται

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

και άρα από την (2) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{|x|+|y|}=0$$