## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ ΣΕΜΦΕ 13/06/2018

**Θέμα 1.** Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^6 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(i) Δείξτε ότι για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει η παράγωγος της $f$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο $(0,0)$. ( 1 μον)

(ii) Δείξτε ότι η $f$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. (1 μον)

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**: (i) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ μοναδιαίο διάνυσμα. Η παράγωγος της $f$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο $\mathbf{0} = (0,0)$, είναι το

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2 u_1 t u_2}{t^6 u_1^6 + t^2 u_2^2}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u_1 u_2}{t^4 u_1^6 + u_2^2}. \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

(1) $u_2 = 0$. Τότε $u_1 \neq 0$ (αφού $u_1^2 + u_2^2 = 1$) και για κάθε $t \neq 0$ έχουμε

$$\frac{u_1 u_2}{t^4 u_1^6 + u_2^2} = \frac{0}{t^4 u_1^6} = 0.$$

Οπότε, απο τα παραπάνω, η παράγωγος της $f$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο $\mathbf{0} = (0,0)$, είναι ίση με το 0.

(2) $u_2 \neq 0$. Τότε η παράγωγος της $f$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο $\mathbf{0} = (0,0)$, είναι

$$\lim_{t\to 0} \frac{u_1 u_2}{t^4 u_1^6 + u_2^2} = \frac{u_1 u_2}{u_2^2} = \frac{u_1}{u_2}.$$

(ii) Το (i) συνεπάγεται ότι ο περιορισμός της $f$ σε κάθε ευθεία που διέρχεται απο το $(0,0)$ είναι συνεχής στο $(0,0)$. Όμως αυτό δεν σημαίνει ότι η $f$ είναι συνεχής στο $(0,0)$. Πράγματι, αν ήταν θα έπρεπε κατά μήκος *κάθε καμπύλης* $y = y(x)$ με $0 = y(0)$ να είχαμε $\lim_{x\to 0} f(x, y(x)) = f(0,0) = 0$. Όμως για την καμπύλη $y = x^2$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 x^2}{x^6 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^6 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2 + 1} = 1 \neq 0$$

και άρα η $f$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

**Θέμα 2.** Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $C^2-$συνάρτηση, $\mathbf{x}_0, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \neq (0, 0)$. Ορίζουμε $\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ με $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$ και $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την ειδική μορφή του κανόνα αλυσίδας $(F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t))$ βρείτε τους τύπους

(i) Της $F'(t)$ συναρτήσει των $f_x, f_y$ (0,5 μον).

(ii) Της $F''(t)$ συναρτήσει των $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$. (1,5 μον)

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**: (i) Άμεση εφαρμογή του τύπου $F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$):

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = f_x(\mathbf{r}(t))h_1 + f_y(\mathbf{r}(t))h_2 = f_x(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_1 + f_y(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_2$$

(ii) Εφαρμόζοντας τον τύπο της ειδικής μορφής για τις $f_x$ και $f_y$ στην θέση της $f$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $f_{xy} = f_{yx}$ (λόγω συνέχειας των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης), έχουμε

$$\begin{aligned}
F''(t) = (F')'(t) &= \Big(f_x(\mathbf{r}(t))h_1 + f_y(\mathbf{r}(t))h_2\Big)' \\
&= \Big(f_x(\mathbf{r}(t))h_1\Big)' + \Big(f_y(\mathbf{r}(t))h_2\Big)' \\
&= \Big(f_x(\mathbf{r}(t))\Big)'h_1 + \Big(f_y(\mathbf{r}(t))\Big)'h_2 \\
&= \Big(\nabla f_x(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\Big)h_1 + \Big(\nabla f_y(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\Big)h_2 \\
&= \Big((f_x)_x(\mathbf{r}(t))h_1 + (f_x)_y(\mathbf{r}(t))h_2\Big)h_1 + \Big((f_y)_x(\mathbf{r}(t))h_1 + (f_y)_y(\mathbf{r}(t))h_2\Big)h_2 \\
&= \Big(f_{xx}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_2\Big)h_1 + \Big(f_{yx}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2\Big)h_2 \\
&= f_{xx}(\mathbf{r}(t))h_1^2 + f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_2h_1 + f_{yx}(\mathbf{r}(t))h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2^2 \\
&= f_{xx}(\mathbf{r}(t))h_1^2 + f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_2h_1 + f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2^2 \\
&= f_{xx}(\mathbf{r}(t))h_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2^2 \\
&= f_{xx}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_2^2.
\end{aligned}$$

**Θέμα 3.** (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x+h, y) = f(x, y+h) = f(x, y)$, για όλα τα $h \in (-\delta, \delta)$. Δείξτε ότι η $f$ είναι σταθερή συνάρτηση. (1 μον)

(β) Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις. Αν υπάρχουν $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ με $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ και $g(\mathbf{a}) = g(\mathbf{b})$, δείξτε ότι τότε υπάρχουν $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ τέτοια ώστε

$$f_x(\boldsymbol{\xi})g_y(\boldsymbol{\eta}) - f_y(\boldsymbol{\xi})g_x(\boldsymbol{\eta}) = 0$$

(1,5 μον)

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**: (α) Από γνωστή συνέπεια του θεωρήματος Μέσης Τιμής, αρκεί να δειχθεί ότι η $f$ έχει μηδενικές μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο $(x, y)$. Πράγματι, έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Απο υπόθεση υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x+h, y) = f(x, y+h) = f(x, y)$, για όλα τα $h \in (-\delta, \delta)$ και άρα $f(x+h, y) - f(x, y) = f(x, y+h) - f(x, y) = 0$ για $h$ αρκετά κοντά στο 0. Συνεπώς,

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

και ομοίως

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

(β) Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^2$. Απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έχουμε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ με

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = f_x(\boldsymbol{\xi})(b_1 - a_1) + f_y(\boldsymbol{\xi})(b_2 - a_2).$$

Ομοίως για την $g$ υπάρχει $\boldsymbol{\eta} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ με

$$g(\mathbf{b}) - g(\mathbf{a}) = \nabla g(\boldsymbol{\eta}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = g_x(\boldsymbol{\eta})(b_1 - a_1) + g_y(\boldsymbol{\eta})(b_2 - a_2).$$

Αφού $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ και $g(\mathbf{a}) = g(\mathbf{b})$ οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν ότι

$$f_x(\boldsymbol{\xi})(b_1 - a_1) + f_y(\boldsymbol{\xi})(b_2 - a_2) = 0$$

και

$$g_x(\boldsymbol{\eta})(b_1 - a_1) + g_y(\boldsymbol{\eta})(b_2 - a_2) = 0$$

και άρα επειδή $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, το σύστημα

$$f_x(\boldsymbol{\xi})x + f_y(\boldsymbol{\xi})y = 0$$
$$g_x(\boldsymbol{\eta})x + g_y(\boldsymbol{\eta})y = 0$$

έχει μη μηδενική λύση. Οπότε, ως ομογενές, θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι μηδέν, δηλαδή

$$f_x(\boldsymbol{\xi})g_y(\boldsymbol{\eta}) - f_y(\boldsymbol{\xi})g_x(\boldsymbol{\eta}) = 0.$$

**Θέμα 4.** Βρείτε (αν υπάρχουν) τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$F(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^4.$$

(1,5 μον)

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**: Έχουμε

$$F_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)^3, \quad F_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)^3,$$
$$F_{xx}(x, y) = 12x^2 - 12(x - y)^2, \; F_{yy}(x, y) = 12y^2 - 12(x - y)^2$$

και

$$F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y) = 12(x - y)^2.$$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία. Το σύστημα $F_x(x, y) = F_y(x, y) = 0$, με πρόσθεση των εξισώσεων, δίνει ότι $x^3 + y^3 = 0$ ισοδύναμα $y = -x$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι το μοναδικό πιθανό τοπικό ακρότατο είναι το σημείο $(0, 0)$. Έχουμε $\Delta(0, 0) = 0$ ( $\Delta = F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2$) και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε απο αυτό για το αν το $(0, 0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι (1) $F(0, 0) = 0$, (2) για κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ διάφορο του $(0, 0)$, είναι $F(x, x) = 2x^4 > 0$ και (3) για κάθε σημείο της ευθείας $y = -x$ διάφορο του $(0, 0)$, είναι $F(x, -x) = 2x^4 - 16x^4 < 0$. Άρα όσο κοντά θέλουμε στο $(0, 0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που η τιμή της $F$ στο ένα να είναι μικρότερη του $F(0, 0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $F(0, 0)$, πράγμα που σημαίνει ότι η $F$ δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $(0, 0)$.

Άρα η $F$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.

**Θέμα 5.** Δίνεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x, y, z) = z^3 + z - x^2 - y^2 - 2$.

(i) Βρείτε $z_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(0, 0, z_0) = 0$ και δείξτε ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ ορίζει μια μοναδική συνάρτηση $z = z(x, y) : U \to \mathbb{R}$ κλάσης $C^2$ σε μια περιοχή $U \subseteq \mathbb{R}^2$ του σημείου $(0, 0)$ με $z(0, 0) = z_0$. (0,5 μον)

(ii) Υπολογίστε τις πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της $z = z(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$ και δείξτε ότι η $z(x, y)$ παρουσιάζει τοπικό ελαχιστο στο $(0, 0)$. (1 μον)

(iii) Γράψτε το πολυώνυμο Taylor $T_2(x, y)$ της $z = z(x, y)$ δεύτερης τάξης στο $(0, 0)$ και υπολογίστε το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x, y) - z(0, 0)}{x^2 + y^2}$. (0,5 μον)

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**: (i) Έχουμε

$$F(0,0,z) = z^3 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z^3 - 1 + z - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+2) = 0$$

και άρα $z_0 = 1$. Επίσης η $F$ είναι $C^2$ (ως πολυωνυμική), και $F_z(x,y,z) = 3z^2+1 \neq 0$, οπότε και ειδικότερα $F(0,0,1) \neq 0$. Άρα από το Θεώρημα των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων, η εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ ορίζει μια μοναδική συνάρτηση $z = z(x,y) : U \to \mathbb{R}$ κλάσης $C^2$ σε μια περιοχή $U \subseteq \mathbb{R}^2$ του σημείου $(0,0)$ με $z(0,0) = 1$.

(ii) Έχουμε $F_x(x,y,z) = -2x$, $F_y(x,y,z) = -2y$ και όπως είδαμε $F_z(x,y,z) = 3z^2+1$. Απο το Θεώρημα των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων είναι

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y)}{F_z(x,y)} = \frac{2x}{3z^2+1}, \quad z_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y)}{F_z(x,y)} = \frac{2y}{3z^2+1}$$

και άρα

$$z_{xx}(x,y) = \frac{2(3z^2+1) - 2x \cdot 6z \cdot z_x}{(3z^2+1)^2}$$

$$z_{yy}(x,y) = \frac{2(3z^2+1) - 2y \cdot 6z \cdot z_y}{(3z^2+1)^2}$$

$$z_{xy}(x,y) = \frac{-2x \cdot 6z \cdot z_y}{(3z^2+1)^2}$$

Άρα , επειδή $z(0,0) = 1$, $z_x(0,0) = z_y(0,0) = 0$. Οπότε το $(0,0)$ είναι στάσιμο σημείο για την $z = z(x,y)$. Επιπλέον, $z_{xx}(0,0) = z_{yy}(0,0) = 8/16 = 1/2$ και $z_{xy}(0,0) = 0$. Άρα $z_{xx}(0,0) > 0$ και $\Delta = z_{xx}(0,0) \cdot z_{yy}(0,0) - z_{xy}(0,0)^2 = 1/4 > 0$, οπότε η $z(x,y)$ παρουσιάζει τοπικό ελαχιστο στο $(0,0)$.

(iii) Όπως γνωρίζουμε το πολυώνυμο Taylor της $z = z(x,y)$ δεύτερης τάξης στο σημείο $(0,0)$ δίνεται απο τον τύπο

$$T_2(x,y) = z(0,0) + z_x(0,0)x + z_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left[z_{xx}(0,0)x^2 + 2z_{xy}(0,0)xy + z_{yy}(0,0)y^2\right]$$

και άρα αντικαθιστώντας τις τιμές των μερικών παραγώγων παίρνουμε ότι

$$T_2(x,y) = 1 + \frac{1}{4}(x^2+y^2).$$

Απο το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - 1 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{z(x,y)-1}{x^2+y^2} - \frac{1}{4}\right] = 0$$

και συνεπώς αφού $z(0,0) = 1$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - z(0,0)}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}.$$