ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ
(1/7/ 2013)

ΘΕΜΑ 1. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$, αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Εξετάστε αν υπαρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

Λύση. (α) Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε

$$|y| \leq |x| + |y|.$$

Άρα για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$\frac{|y|}{|x| + |y|} \leq 1,$$

οπότε

$$0 \leq |f(x, y)| = |x| \frac{|y|}{|x| + |y|}| \leq |x|.$$

Έστω $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ με $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$. Απο τα παραπάνω έχουμε

$$0 \leq |f(x_n, y_n)| \leq |x_n|,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα απο θεώρημα παρεμβολής για πραγματικές ακολουθίες παίρνουμε ότι $f(x_n, y_n) \to 0$. Συνεπώς αφού αυτό ισχύει για *κάθε* ακολουθία $\big((x_n, y_n)\big)$ που τείνει στο $(0, 0)$ με $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$, απο γνωστό θεώρημα συμπεραίνουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Έστω $(x_n, y_n) = (1/n, 0)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $f(1/n, 0) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $\lim f(1/n, 0) = 0$. Έστω τώρα $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $f(1/n, 1/n) = 1/2$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και άρα $\lim f(1/n, 1/n) = 1/2$. Άρα το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ δεν υπάρχει.

Θέμα 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $\vec{e}$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Δώστε τον ορισμό της κατα την κατεύθυνση $\vec{e}$ μερικής παραγώγου της f, $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0)$, στο σημείο (x_0, y_0). Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0), τότε με τι ισούται η $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0)$;

(β) Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$. Βρείτε τη κατευθύνση $\vec{e}$ για την οποία η $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1, 2)$ γίνεται μέγιστη.

Λύση. (α) Αν $\vec{e} = (e_1, e_2)$, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_1, y_0 + te_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε αποδεικνύεται ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x_0, y_0) =< \nabla f(x_0, y_0), \vec{e} >,$$

όπου $\nabla f(x_0, y_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$.

(β) Για τη συνάρτηση $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{x^2+y^2}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Άρα η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και συνεπώς απο γνωστό θεώρημα είναι παραγωγίσιμη στον $\mathbb{R}^2$. Άρα απο το (α) ερώτημα, για κάθε $\vec{e}$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1,2) =< \nabla f(1,2), \vec{e} > .$$

Αρα (απο ανισότητα Cauchy-Schwartz) η κατεύθυνση $\vec{e}$ για την οποία η $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1,2)$ μεγιστοποιείται είναι η

$$\vec{e} = \frac{\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|} = \frac{(2e^5, 4e^5)}{\sqrt{4e^{10}+16e^{10}}} = \big(2/\sqrt{20}, 4/\sqrt{20}\big).$$

Θέμα 3. (α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3+y^3+z^3-3xyz-4=0$ ορίζει πεπλεγμένα μια μοναδική συνάρτηση $z=f(x,y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(1,1,2)$. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της επιφάνειας στο σημείο αυτό. Επίσης υπολογίστε τις $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ και$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

(β) Γράψτε τον τύπο του Taylor 2ου βαθμού της συνάρτησης $f(x,y)=e^x cosy$ στο σημείο $(0,0)$.

Λύση. (α) $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz-4$. Έχουμε

$$F_x(x,y,z)=3x^2-3yz, \quad F_y(x,y,z)=3y^2-3xy, \quad F_z(x,y,z)=3z^2-3xy.$$

Άρα η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 1ης τάξης. Επιπλέον $F(1,1,2)=0$ και $F_z(1,1,2)=12-3=9\neq 0$. Άρα απο το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων, υπάρχει περιοχή X του $(1,1)$ και περιοχή Z του $z=2$, ώστε για κάθε $(x,y)\in X$ υπάρχει μοναδικό $z=f(x,y)\in Z$ τέτοιες ώστε $F(x,y,f(x,y))=0$. Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $F(x,y,z)=0$ στο σημείο $(1,1,2)$ δίδεται απο τον τύπο

$$< \nabla F(1,1,2), (x-1, y-1, z-2) >= 0$$

Έχουμε

$$F_x(1,1,2)=-3, \; F_y(1,1,2)=-3, \; F_z(1,1,2)=9.$$

Άρα

$$\begin{aligned} &< \nabla F(1,1,2), (x-1,y-1,z-2) >= 0 \Leftrightarrow \\ &F_x(1,1,2)(x-1)+F_y(1,1,2)(y-1)+F_z(1,1,2)(z-2)=0 \\ &\Leftrightarrow -3(x-1)-3(y-1)+9(z-2)=0 \Leftrightarrow \\ &x+y-3z+4=0. \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε

$$f_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}|_{z=f(x,y)}, \; f_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}|_{z=f(x,y)}$$

και άρα (αφού $f(1,1)=2$),

$$f_x(1,1) = -\frac{-3}{9} = 1/3, \; f_u(1,1) = -\frac{-3}{9} = 1/3.$$

(β) Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(0,0) \\ &+ [f_x(0,0)x + f_y(0,0)y] \\ &+ \frac{1}{2}[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2] \\ &+ R(x,y) \end{aligned}$$

όπου

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|^2} = 0.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} &f_x(x,y) = e^x cosy,\ f_y(x,y) = -e^x siny, \\ &f_{xx}(x,y) = e^x cosy,\ f_{xy}(x,y) = -e^x siny,\ f_{yy}(x,y) = -e^x cosy, \end{aligned}$$

και άρα

$$f_x(0,0) = 1,\ f_y(0,0) = 0, f_{xx}(0,0) = 1, f_{xy}(0,0) = 0,\ f_{yy}(0,0) = -1.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού της συνάρτησης $f(x,y) = e^x cosy$ στο σημείο $(0,0)$ είναι το εξής

$$1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}.$$

ΘΕΜΑ 4. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = x^3+y^3+3xy$. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ υπο την συνθήκη $G(x,y,z) = x+y+z+1 = 0$ έχει ενα ακριβώς τοπικό ακρότατο που ειδικότερα είναι ολικό ελάχιστο. Τι εκφράζει γεωμετρικά το σημείο αυτό;

Λύση. (α) Βρίσκουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της f. Έχουμε

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y, \quad f_y(x,y) = 3y^2 + 3x$$

Έχουμε $3x^2 + 3y = 0 \Rightarrow y = -x^2$ και αντικαθιστώντας στην $3y^2 + 3x = 0$ παίρνουμε

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, -1.$$

Για $x = 0 \Rightarrow y = -x^2 = 0$ και για $x = -1 \Rightarrow y = -x^2 = -1$. Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα εξής δύο: $(0,0)$ και $(-1,-1)$.

Είναι

$$f_{xx}(x,y) = 6x \quad f_{yy}(x,y) = 6y \quad f_{xy}(x,y) = 3$$

και άρα

$$\Delta(x,y) = 36xy - 9.$$

Έχουμε $\Delta(0,0) = -9 < 0$ και άρα το $(0,0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο. Επίσης, $\Delta(-1,-1) = 36 - 9 > 0$ και $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$ και άρα το $(-1,-1)$ είναι τοπικό μέγιστο.

(β) Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ τοπικό ακρότατο της F υπο την συνθήκη $G = 0$. Έχουμε $\nabla G(\mathbf{x}_0) = (1,1,1) \neq 0$ και

$$\nabla F(\mathbf{x}_0) = (\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0)) = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$$

Απο το Θεώρημα Lagrange θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\nabla F(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla G(\mathbf{x}_0)$$

ισοδύναμα

$$2x_0 = 2y_0 = 2z_0 = \lambda$$

και άρα

$$x_0 = y_0 = z_0. \tag{1}$$

Επειδή

$$G(x_0, y_0, z_0) = x_0 + y_0 + z_0 + 1 = 0$$

έχουμε ότι

$$x_0 + y_0 + z_0 = -1. \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε $\mathbf{x}_0 = -(1/3, 1/3, 1/3)$. Συνεπώς αν η F έχει τοπικό ακρότατο τότε αυτό θα ειναι μοναδικό και θα είναι το σημείο $\mathbf{x}_0 = -(1/3, 1/3, 1/3)$. Ισχυριζόμαστε ότι όντως το $\mathbf{x}_0$ είναι τοπικό ακρότατο και μάλιστα ολικό ελάχιστο. Για να το δείξουμε αυτό παρατηρούμε πρώτα ότι

$$F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Τώρα απο την ανισότητα Cauchy–Schwartz έχουμε,

$$|x + y + z| = | < (x, y, z), (1, 1, 1) > | \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|(1, 1, 1)\| = (F(x, y, z)^{1/2} 3^{1/2},$$

και άρα

$$\frac{|x + y + z|^2}{3} \leq F(x, y, z), \tag{3}$$

για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Έστω $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $G(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = -1$. Απο την (3) έπεται ότι

$$1/3 \leq F(\mathbf{x})$$

και επειδή $F(\mathbf{x}_0) = 1/9 + 1/9 + 1/9 = 1/3$ έχουμε τελικά ότι

$$F(\mathbf{x}_0) \leq F(\mathbf{x}),$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ με $G(\mathbf{x}) = 0$. Συνεπώς το $\mathbf{x}_0$ είναι ολικό ελάχιστο της F υπο την συνθήκη $G = 0$.

Γεωμετρικά, το σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι το πλησιέστερο στο $(0, 0, 0)$ σημείο του επιπέδου $x + y + z - 1 = 0$ (η τιμή $\sqrt{F(\mathbf{x})}$ εκφράζει την νόρμα του σημείου $\mathbf{x}$ δηλαδή την απόστασή του σημείου $\mathbf{x}$ απο το $(0, 0, 0)$).

ΘΕΜΑ 5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))$, όπου $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Για κάθε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε τον πίνακα $A_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}$ ως εξής:

$$A_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} \tag{4}$$

(α) Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (όπου $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ το εσωτερικό του ευθ. τμήματος με άκρα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$) τέτοια ώστε

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = A_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} \cdot \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

(β) Έστω B ένας ανοικτός δίσκος του $\mathbb{R}^2$. Αν $|A_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}| \neq 0$ για κάθε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B$, δείξτε ότι ο περιορισμός της f στον B είναι $1-1$ (όπου με $|A_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}|$ συμβολίζουμε την ορίζουσα του $A_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}$).

(γ) Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Αν $|A_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0)}| \neq 0$ δείξτε ότι υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε $|A_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}| \neq 0$ για κάθε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{x}_0, r_0)$ (όπου με $B(\mathbf{x}_0, r_0)$ συμβολίζουμε τον ανοικτό δίσκο κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας r_0).

(δ) Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Αν η ορίζουσα του πίνακα $A_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0)}$ είναι διάφορη του μηδενός, δείξτε ότι υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε ο περιορισμός της f στον $B(\mathbf{x}_0, r_0)$ είναι $1-1$.

Λύση. (α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την συναρτηση f_1 στον ανοικτό δίσκο B. Έχουμε ότι υπάρχει $\mathbf{x}_1 \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{b}) - f_1(\mathbf{a}) &= < \nabla f_1(\mathbf{x}_1), (\mathbf{b} - \mathbf{a}) > \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_1)(b_1 - a_1) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_1)(b_2 - a_2) \\ &= \Big[\frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_1) \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_1)\Big] \cdot \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Ομοίως εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την συναρτηση f_2 έχουμε ότι υπάρχει $\mathbf{x}_2 \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ τέτοιο ώστε

$$f_2(\mathbf{b}) - f_2(\mathbf{a}) = \Big[\frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_1) \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_1)\Big] \cdot \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Απο (6) και (7) το ζητούμενο έπεται.

(β) Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B$ με

$$f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b}).$$

Θα δείξουμε ότι τότε $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, οπότε η f είναι $1-1$. Πράγματι,απο το (α) μέρος της άσκησης, υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ τέτοια ώστε

$$A_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)} \cdot \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Επειδή $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B$ έπεται ότι $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq B$ οπότε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B$. Αρα $|A_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}| \neq 0$ δηλαδή ο πίνακας $A_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}$ είναι αντιστρέψιμος και άρα απο την (8) θα πρέπει

$$\begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

δηλαδή $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

(γ) Κάθε στοιχείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ το συμβολίζουμε ως $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, όπου $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$. Θεωρούμε την συνάρτηση $\Delta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$\Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \big|A_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}\big| = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_1)\frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_2) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}_2)\frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_1),$$

για κάθε $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^4$. Απο την συνέχεια των μερικών παραγώγων των f_1, f_2 έχουμε ότι η Δ είναι επίσης συνεχής συνάρτηση. (Πράγματι, η συνάρτηση $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \to \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_1)$ είναι συνεχής αφού

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_1) = \big(\frac{\partial f_1}{\partial x} \circ \pi_1\big)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

όπου $\pi_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1$. Ομοίως οι συναρτήσεις $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \to \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_1)$, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \to \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}_2)$, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \to \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_2)$ είναι συνεχείς).

Απο την υπόθεσή μας έχουμε $\Delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) \neq 0$. Επειδή η Δ είναι συνεχής θα υπάρχει μια ανοικτή μπάλλα του $\mathbb{R}^4$, με κέντρο το $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$ και ακτίνα $r > 0$, έστω $B\big((\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0), r\big)$, ώστε

$$\Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left|A_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}\right| \neq 0, \tag{9}$$

για κάθε $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in B\big((\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0), r\big)$.

Έστω $r_0 = r/2$. Θέτουμε $B = B(\mathbf{x}_0, r/2)$ να είναι ο ανοικτός δίσκος του $\mathbb{R}^2$, με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα $r_0 > 0$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι $\left|A_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}\right| \neq 0$, για κάθε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B$. Πράγματι, καταρχάς είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\|(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 \tag{10}$$

για κάθε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$, όπου στην παραπάνω ισότητα, δεξιά έχουμε την ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^4$ και αριστερά τις ευκλείδειες νόρμες στον $\mathbb{R}^2$ (ουσιαστικά είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα). Έστω λοιπόν, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B$. Τότε $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| < r_0$, $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| < r_0$ και άρα απο την (10) παίρνουμε ότι

$$\|(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)\|^2 = \|(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)\|^2 = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|^2 + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|^2 < 2r_0^2 < r^2$$

Άρα $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in B\big((\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0), r\big)$, οπότε απο την (9), έχουμε $\left|A_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}\right| \neq 0$.

(δ) Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ με $\left|A_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}\right| \neq 0$. Απο το ($\gamma$) υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε $|A_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}| \neq 0$ για κάθε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{x}_0, r_0)$. Τώρα απο το (β) η f στον ανοικτό δίσκο $B(\mathbf{x}_0, r_0)$ είναι $1 - 1$.