Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής & Υπολογιστών

ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΚΑΙ ΕΥΦΥΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ
ΔΙΚΤΥΟ SOM

Άσκηση 1

α) Να δειχθεί ότι, όταν τα διανύσματα βαρών $\boldsymbol{w}$ στον κανόνα ανταγωνιστικής μάθησης δεν είναι κανονικοποιημένα ($||\boldsymbol{w}|| = 1$), είναι δυνατόν το διάνυσμα βαρών που είναι πλησιέστερο προς το πρότυπο εισόδου $\boldsymbol{x}$ με την ευκλείδεια απόσταση να μην επιλεγεί ως νικητής αν χρησιμοποιηθεί ως μέτρο σύγκρισης το εσωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}$ των διανυσμάτων.

β) Θεωρούμε ένα δίκτυο ανταγωνιστικής μάθησης με 3 κόμβους εξόδου και 4 κόμβους εισόδου. Τα διανύσματα βαρών για τους κόμβους εξόδου είναι

$\boldsymbol{w}_1 = [0{,}8,\ 0{,}6,\ 0{,}4,\ 0{,}2]$, $\boldsymbol{w}_2 = [0{,}2,\ 0{,}6,\ 0{,}8,\ 1{,}0]$ και $\boldsymbol{w}_3 = [1{,}0,\ 0{,}4,\ 1{,}0,\ 0{,}8]$.

Θεωρώντας ως κριτήριο επιλογής του νικητή κόμβου (i) την ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση και (ii) το μέγιστο εσωτερικό γινόμενο, να βρεθεί ο νικητής για το πρότυπο εισόδου

$\boldsymbol{x} = [0{,}5,\ 1{,}0,\ 0{,}6,\ 0{,}0]$

και να ενημερωθούν τα βάρη του νικητή με συντελεστή μάθησης α=0,2.

Απάντηση

α) Έστω το πρότυπο εισόδου $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]$ και τα διανύσματα βαρών $\boldsymbol{w}_1 = [w_{11}, w_{21}]$ και $\boldsymbol{w}_2 = [w_{12}, w_{22}]$.

Ας υποθέσουμε ότι με την ευκλείδεια απόσταση θα επιλεγεί το $\boldsymbol{w}_2$:

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_1||^2 > ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_2||^2 \Rightarrow$$
$$(x_1 - w_{11})^2 + (x_2 - w_{21})^2 > (x_1 - w_{12})^2 + (x_2 - w_{22})^2 \Rightarrow$$
$$- 2x_1 w_{11} + w_{11}^2 - 2x_2 w_{21} + w_{21}^2 > - 2x_1 w_{12} + w_{12}^2 - 2x_2 w_{22} + w_{22}^2 \Rightarrow$$
$$- 2 (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_1) + ||\boldsymbol{w}_1||^2 > - 2 (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_2) + ||\boldsymbol{w}_2||^2$$

Αν τα βάρη είναι κανονικοποιημένα $||\boldsymbol{w}_1|| = ||\boldsymbol{w}_2|| = 1$ παίρνουμε $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_1 < \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_2$, δηλαδή και με το εσωτερικό γινόμενο επιλέγεται το διάνυσμα $\boldsymbol{w}_2$ **.**

Αν τα βάρη δεν είναι κανονικοποιημένα, ξαναγράφουμε την τελευταία σχέση ως εξής:

$$||\boldsymbol{w}_2||^2 - ||\boldsymbol{w}_1||^2 < 2 (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_1)$$

Αν ισχύει $||\boldsymbol{w}_1|| > ||\boldsymbol{w}_2||$, τότε είναι δυνατόν να έχουμε $2 (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_1) < 0$, δηλαδή $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_1 > \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_2$. Επομένως, το κριτήριο του εσωτερικού γινομένου θα δώσει αντίθετο αποτέλεσμα.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω $\boldsymbol{x} = [1, 1]$, $\boldsymbol{w}_1 = [5, 1]$ και $\boldsymbol{w}_2 = [1, 1]$.
Έχουμε $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_1 = 6$ και $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_2 = 2$, δηλαδή σύμφωνα με το εσωτερικό γινόμενο νικητής είναι το $\boldsymbol{w}_1$ παρόλο που τα $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{w}_2$ ταυτίζονται.

β) (i) Ανταγωνισμός:

$d_1 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_1||^2 = 0{,}33 \Leftarrow$ νικητής
$d_2 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_2||^2 = 1{,}29$
$d_3 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_3||^2 = 1{,}41$

Ενημέρωση:

$\boldsymbol{w}_1(t+1) = \boldsymbol{w}_1(t) + \alpha(t)\,(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{w}_1(t)) = [0{,}74,\ 0{,}68,\ 0{,}44,\ 0{,}16]$

(ii) Ανταγωνισμός:

$s_1 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_1 = 1{,}24$
$s_2 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_2 = 1{,}18$
$s_3 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}_3 = 1{,}50 \Leftarrow$ νικητής

Ενημέρωση:

$\boldsymbol{w}_3(t+1) = \boldsymbol{w}_3(t) + \alpha(t)\,(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{w}_3(t)) = [0{,}90,\ 0{,}52,\ 0{,}92,\ 0{,}64]$

Άσκηση 2

Θεωρούμε δίκτυο ανταγωνιστικής μάθησης, στο οποίο η ενημέρωση των βαρών του νικητή *i* για το πρότυπο εισόδου $\vec{x}$ γίνεται σύμφωνα με τον κανόνα:

$$w'_{ij} = w_{ij} + \eta\left(\frac{x_j}{\sum_j x_j} - w_{ij}\right), \forall j.$$

Να δειχθεί ότι ο κανόνας αυτός εξασφαλίζει την κανονικοποίηση $\sum_j w'_{ij} = 1$, σε κάθε βήμα. (Υποθέτουμε ότι οι αρχικές τιμές των βαρών είναι κανονικοποιημένες.)

Άσκηση 3

Θεωρούμε έναν μονοδιάστατο χάρτη Kohonen με 5 κόμβους εξόδου και 2 κόμβους εισόδου. Τα διανύσματα βαρών για τους κόμβους εξόδου είναι:

$\boldsymbol{w}_1 = [0{,}3,\ 0{,}7]$, $\boldsymbol{w}_2 = [0{,}6,\ 0{,}9]$, $\boldsymbol{w}_3 = [0{,}1,\ 0{,}5]$, $\boldsymbol{w}_4 = [0{,}4,\ 0{,}3]$, $\boldsymbol{w}_5 = [0{,}8,\ 0{,}2]$

Χρησιμοποιώντας την ευκλείδεια απόσταση να βρεθεί ο κόμβος εξόδου (νικητής) που είναι πλησιέστερος στο πρότυπο εισόδου $\boldsymbol{x} = [0{,}5,\ 0{,}2]$. Υποθέτουμε ότι ενημερώνεται (με τον ίδιο συντελεστή) η γειτονιά του νικητή, η οποία αποτελείται από τους δύο διπλανούς του -εφ'όσον υπάρχουν- σύμφωνα με την παραπάνω αρίθμηση των κόμβων. Ζητούνται τα νέα διανύσματα βαρών του νικητή και της γειτονιάς του αν ο συντελεστής μάθησης είναι α=0,2.

Απάντηση

Ανταγωνισμός:

$d_1 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_1||^2 = (0{,}5 - 0{,}3)^2 + (0{,}2 - 0{,}7)^2 = 0{,}29$
$d_2 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_2||^2 = (0{,}5 - 0{,}6)^2 + (0{,}2 - 0{,}9)^2 = 0{,}50$
$d_3 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_3||^2 = (0{,}5 - 0{,}1)^2 + (0{,}2 - 0{,}5)^2 = 0{,}25$
$d_4 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_4||^2 = (0{,}5 - 0{,}4)^2 + (0{,}2 - 0{,}3)^2 = 0{,}02 \Leftarrow$ νικητής
$d_5 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_5||^2 = (0{,}5 - 0{,}8)^2 + (0{,}2 - 0{,}2)^2 = 0{,}09$

Ενημέρωση:

$$\mathbf{w}_k\,(t+1) = \mathbf{w}_k(t) + \alpha(t)\,(\mathbf{x}(t) - \mathbf{w}_k(t)), \qquad k = 3, 4, 5$$

$\mathbf{w}_3$ = [0,1, 0,5] + 0,2 [0,5 - 0,1, 0,2 - 0,5] = [0,18, 0,44]
$\mathbf{w}_4$ = [0,4, 0,3] + 0,2 [0,5 - 0,4, 0,2 - 0,3] = [0,42, 0,28]
$\mathbf{w}_5$ = [0,8, 0,2] + 0,2 [0,5 - 0,8, 0,2 - 0,2] = [0,74, 0,2]

Άσκηση 4

Θεωρούμε έναν μονοδιάστατο χάρτη Kohonen με 2 κόμβους εξόδου και 4 κόμβους εισόδου και θέλουμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο μάθησης για τα πρότυπα εισόδου

$\mathbf{x}_1$ = [1, 1, 0, 0], $\mathbf{x}_2$ = [0, 0, 0, 1], $\mathbf{x}_3$ = [1, 0, 0, 0], $\mathbf{x}_4$ = [0, 0, 1, 1].

Να πραγματοποιηθεί μια επανάληψη του αλγορίθμου (παρουσίαση των προτύπων εισόδου με την σειρά αρίθμησης) θεωρώντας αρχικά διανύσματα βαρών για τους κόμβους εξόδου

$\mathbf{w}_1$ = [0,2, 0,6, 0,5, 0,9] , $\mathbf{w}_2$ = [0,8, 0,4, 0,7, 0,3]

και (σταθερό) συντελεστή μάθησης α=0,6. Θεωρούμε ευκλείδεια απόσταση και υποθέτουμε ότι σε κάθε βήμα μόνο ο νικητής ενημερώνει τα βάρη του.

Απάντηση

- Πρότυπο εισόδου $\mathbf{x}$ = [1, 1, 0, 0]

  Ανταγωνισμός:

  $d_1 = ||\mathbf{x} - \mathbf{w}_1||^2 =$ 1,86
  $d_2 = ||\mathbf{x} - \mathbf{w}_2||^2 =$ 0,98 $\Leftarrow$ νικητής

  Ενημέρωση:

  $\mathbf{w}_2 =$ [0,92, 0,76, 0,28, 0,12]

- Πρότυπο εισόδου $\mathbf{x}$ = [0, 0, 0, 1]

  Ανταγωνισμός:

  $d_1 = ||\mathbf{x} - \mathbf{w}_1||^2 =$ 0,66 $\Leftarrow$ νικητής
  $d_2 = ||\mathbf{x} - \mathbf{w}_2||^2 =$ 2,2768

  Ενημέρωση:

  $\mathbf{w}_1 =$ [0,08, 0,24, 0,20, 0,96]

- Πρότυπο εισόδου $\mathbf{x}$ = [1, 0, 0, 0]

  Ανταγωνισμός:

  $d_1 = ||\mathbf{x} - \mathbf{w}_1||^2 =$ 1,8656
  $d_2 = ||\mathbf{x} - \mathbf{w}_2||^2 =$ 0,6768 $\Leftarrow$ νικητής

  Ενημέρωση:

  $\mathbf{w}_2 =$ [0,968, 0,304, 0,112, 0,048]

- Πρότυπο εισόδου $\mathbf{x}$ = [0, 0, 1, 1]

  Ανταγωνισμός:

  $d_1 = ||\mathbf{x} - \mathbf{w}_1||^2 =$ 0,7056 $\Leftarrow$ νικητής

$d_2 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_2||^2 = 2{,}724$

Ενημέρωση:

$\boldsymbol{w}_2 =$ [0,032, 0,096, 0,680, 0,984]

Άσκηση 5

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο LVQ για 5 πρότυπα εισόδου που ανήκουν σε 2 κατηγορίες:

$\boldsymbol{x}_i$	Κατηγορία
[1, 1, 0, 0]	1
[0, 0, 0, 1]	2
[0, 0, 1, 1]	2
[1, 0, 0, 0]	1
[0, 1, 1, 0]	2

Θα θεωρήσουμε δύο κόμβους εξόδου, έναν για κάθε κατηγορία. Τα πρώτα δύο πρότυπα εισόδου θα χρησιμοποιηθούν ως αρχικές τιμές για τα διανύσματα βαρών. Έτσι, ο κόμβος εξόδου 1 αντιπροσωπεύει την κατηγορία 1 και ο κόμβος εξόδου 2 την κατηγορία 2. Τα υπόλοιπα τρία πρότυπα εισόδου θα χρησιμοποιηθούν για την εκπαίδευση του δικτύου.

Ζητείται να πραγματοποιηθεί μια επανάληψη του αλγορίθμου (παρουσίαση των προτύπων εισόδου) με συντελεστή μάθησης α=0,1,

Απάντηση

Αρχικοποίηση βαρών: $\boldsymbol{w}_1$ = [1, 1, 0, 0] , $\boldsymbol{w}_2$ = [0, 0, 0, 1]

Σε κάθε παρουσίαση προτύπου, η φάση του ανταγωνισμού είναι όπως στην απλή ανταγωνιστική μάθηση και στον αλγόριθμο SOM. Κατά τη φάση ενημέρωσης, λαμβάνεται υπόψη κατά πόσον η κατηγορία του νικητή είναι σωστή ή όχι:

$$\Delta \boldsymbol{w}_k(t) = \begin{cases} +\,\eta(t)\,(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{w}_k(t)) & \text{αν η κατηγορία του νικητή είναι σωστή} \\ -\,\eta(t)\,(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{w}_k(t)) & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε την συνήθη ενημέρωση του νικητή, ενώ στη δεύτερη έχουμε απομάκρυνση του νικητή από το διάνυσμα εισόδου.

- Πρότυπο εισόδου $\boldsymbol{x}$ = [0, 0, 1, 1] (Κατηγορία 2)

  Ανταγωνισμός:

  $d_1 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_1||^2 = (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (1 - 0)^2 + (1 - 0)^2 = 4$
  $d_2 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_2||^2 = (0 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (1 - 0)^2 + (1 - 1)^2 = 1$ $\Leftarrow$ νικητής (Κατηγορία 2)

  Ενημέρωση (σωστή κατηγορία νικητή):

  $\boldsymbol{w}_2 =$ [0, 0, 0, 1] + 0,1 [0 - 0, 0 - 0, 1 - 0, 1 - 1] = [0, 0, 0,1, 1]

- Πρότυπο εισόδου $\boldsymbol{x}$ = [1, 0, 0, 0] (Κατηγορία 1)

  Ανταγωνισμός:

  $d_1 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_1||^2 = (1 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - 0)^2 = 1$ $\Leftarrow$ νικητής (Κατηγορία 1)
  $d_2 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_2||^2 = (1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 – 0{,}1)^2 + (0 - 1)^2 = 2.01$

Ενημέρωση (σωστή κατηγορία νικητή):

$\boldsymbol{w}_1 =$ [1, 1, 0, 0] + 0,1 [1 - 1, 0 - 1, 0 - 0, 0 - 0] = [1, 0,9, 0, 0]

- Πρότυπο εισόδου $\boldsymbol{x}$ = [0, 1, 1, 0] (Κατηγορία 2)

  Ανταγωνισμός:

  $d_1 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_1||^2 = (0 - 1)^2 + (1 – 0,9)^2 + (1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 = 2,01$ ⇐ νικητής (Κατηγορία 1)
  $d_2 = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_2||^2 = (0 - 0)^2 + (1 - 0)^2 + (1 – 0,1)^2 + (0 - 1)^2 = 2,81$

  Ενημέρωση (*λάθος* κατηγορία νικητή):

  $\boldsymbol{w}_1 =$ [1, 0,9, 0, 0] - 0,1 [0 - 1, 1 - 0,9, 1 - 0, 0 - 0] = [1,1, 0,89, -0,1, 0]

Άσκηση 6

Έχουμε τα παρακάτω πρότυπα εισόδου
$\boldsymbol{x}_1$ = [1, 1, 1, 1, 1], $\boldsymbol{x}_2$ = [0, 1, 1, 1, 0], $\boldsymbol{x}_3$ = [1, 0, 1, 0, 1], $\boldsymbol{x}_4$ = [0, 0, 1, 1, 0], $\boldsymbol{x}_5$ = [1, 0, 0, 0, 0].

- Θεωρούμε έναν μονοδιάστατο χάρτη Kohonen με 4 κόμβους εξόδου και 5 κόμβους εισόδου. Αν τα αρχικά διανύσματα βαρών των κόμβων εξόδου είναι $\boldsymbol{w}_1$ = [0,9, 0,8, 0,8, 1,0, 0,9], $\boldsymbol{w}_2$ = [0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0], $\boldsymbol{w}_3$ = [0,9, 0,7, 0,1, 1,0, 0,3] και $\boldsymbol{w}_4$ = [0,8, 0,3, 0,1, 0,2, 0,1], να πραγματοποιηθεί εφαρμογή του αλγορίθμου μάθησης για τα πρότυπα εισόδου $\boldsymbol{x}_1$ και $\boldsymbol{x}_5$, με συντελεστή μάθησης α=0,4. Θα χρησιμοποιήσουμε ως μέτρο σύγκρισης το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων. Υποθέτουμε ότι ενημερώνεται η γειτονιά του νικητή, η οποία αποτελείται από τους δύο διπλανούς του (modulo 4).
- Υποθέτοντας ότι τα πρότυπα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ ανήκουν στην κατηγορία 1 και τα πρότυπα $\boldsymbol{x}_4$, $\boldsymbol{x}_5$ ανήκουν στην κατηγορία 2, θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο LVQ για ταξινόμηση. Θα θεωρήσουμε δύο κόμβους εξόδου, που θα αντιπροσωπεύουν τις κατηγορίες 1 και 2 αντίστοιχα. Τα πρότυπα $\boldsymbol{x}_1$ και $\boldsymbol{x}_4$ θα χρησιμοποιηθούν ως αρχικές τιμές για τα διανύσματα βαρών και τα υπόλοιπα πρότυπα θα χρησιμοποιηθούν για την εκπαίδευση του δικτύου. Ζητείται να πραγματοποιηθεί μια επανάληψη του αλγορίθμου (παρουσίαση των προτύπων εισόδου), χρησιμοποιώντας ευκλείδεια απόσταση και συντελεστή μάθησης α=0,3.

Απάντηση

- Χάρτης Kohonen

Πρότυπο εισόδου $\boldsymbol{x}_1$ = [1, 1, 1, 1, 1]

Ανταγωνισμός:

$d_1 = \boldsymbol{w}_1 \,.\, \boldsymbol{x}_1 = 4,4$ ⇐ νικητής
$d_2 = \boldsymbol{w}_2 \,.\, \boldsymbol{x}_1 = 3,0$
$d_3 = \boldsymbol{w}_3 \,.\, \boldsymbol{x}_1 = 3,0$
$d_4 = \boldsymbol{w}_4 \,.\, \boldsymbol{x}_1 = 1,5$

Ενημέρωση:

$\boldsymbol{w}_1$ = [0,94, 0,88, 0,88, 1,0, 0,94]
$\boldsymbol{w}_2$ = [0,52, 0,64, 0,76, 0,88, 1,0]
$\boldsymbol{w}_4$ = [0,88, 0,58, 0,46, 0,52, 0,46]

Πρότυπο εισόδου $\boldsymbol{x}_5$ = [1, 0, 0, 0, 0]

Ανταγωνισμός:

$d_1 = \boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{x}_5 = 0{,}94 \quad \Leftarrow$ νικητής
$d_2 = \boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{x}_5 = 0{,}52$
$d_3 = \boldsymbol{w}_3 \cdot \boldsymbol{x}_5 = 0{,}90$
$d_4 = \boldsymbol{w}_4 \cdot \boldsymbol{x}_5 = 0{,}88$

Ενημέρωση:

$\boldsymbol{w}_1 = [0{,}964,\ 0{,}528,\ 0{,}528,\ 0{,}6,\ 0{,}564]$
$\boldsymbol{w}_2 = [0{,}712,\ 0{,}384,\ 0{,}456,\ 0{,}528,\ 0{,}6]$
$\boldsymbol{w}_4 = [0{,}928,\ 0{,}348,\ 0{,}276,\ 0{,}312,\ 0{,}276]$

- Αλγόριθμος LVQ

Αρχικοποίηση βαρών: $\boldsymbol{w}_1 = [1, 1, 1, 1, 1]$, $\boldsymbol{w}_2 = [0, 0, 1, 1, 0]$

Πρότυπο εισόδου $\boldsymbol{x}_2 = [0, 1, 1, 1, 0]$ (Κατηγορία 1)

Ανταγωνισμός:

$d_1 = \|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{w}_1\|^2 = 2$
$d_2 = \|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{w}_2\|^2 = 1 \quad \Leftarrow$ νικητής (Κατηγορία 2)

Ενημέρωση (λάθος κατηγορία νικητή):

$\boldsymbol{w}_2 = [0, -0{,}3, 1, 1, 0]$

Πρότυπο εισόδου $\boldsymbol{x}_3 = [1, 0, 1, 0, 1]$ (Κατηγορία 1)

Ανταγωνισμός:

$d_1 = \|\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{w}_1\|^2 = 2 \quad \Leftarrow$ νικητής (Κατηγορία 1)
$d_2 = \|\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{w}_2\|^2 = 3{,}09$

Ενημέρωση (σωστή κατηγορία νικητή):

$\boldsymbol{w}_1 = [1, 0{,}7, 1, 0{,}7, 1]$

Πρότυπο εισόδου $\boldsymbol{x}_5 = [1, 0, 0, 0, 0]$ (Κατηγορία 2)

Ανταγωνισμός:

$d_1 = \|\boldsymbol{x}_5 - \boldsymbol{w}_1\|^2 = 2{,}98 \quad \Leftarrow$ νικητής (Κατηγορία 1)
$d_2 = \|\boldsymbol{x}_5 - \boldsymbol{w}_2\|^2 = 3{,}09$

Ενημέρωση (λάθος κατηγορία νικητή):

$\boldsymbol{w}_1 = [1, 0{,}91, 1{,}3, 0{,}91, 1{,}3]$

Άσκηση 7

Έστω μονοδιάστατος χάρτης Kohonen σε μονοδιάστατο χώρο εισόδου. Υποθέτουμε ότι η ενημέρωση γίνεται με ενιαίο τρόπο για όλους τους κόμβους που περιέχονται στη γειτονιά του νικητή (συντελεστής μάθησης η<1). Θεωρούμε πρότυπο εισόδου x και δύο κόμβους i, j που ανήκουν στη γειτονιά του νικητή. Αν η απόσταση του βάρους w_i από το x είναι μικρότερη από την απόσταση του βάρους w_j από το x, να δειχθεί ότι αυτό ισχύει και μετά την ενημέρωση των βαρών.

Απάντηση

Ισχύει $w_i^{t+1} = w_i^t + \eta(t)[x - w_i^t]$ ή $w_i^{t+1} - x = (1 - \eta(t))[w_i^t - x]$,

άρα $|w_i^{t+1} - x| = (1 - \eta(t))\ |w_i^t - x|$. Ομοίως, $|w_j^{t+1} - x| = (1 - \eta(t))\ |w_j^t - x|$.

Συνεπώς, $|w_i^t - x| < |w_j^t - x| \Rightarrow |w_i^{t+1} - x| < |w_j^{t+1} - x|$

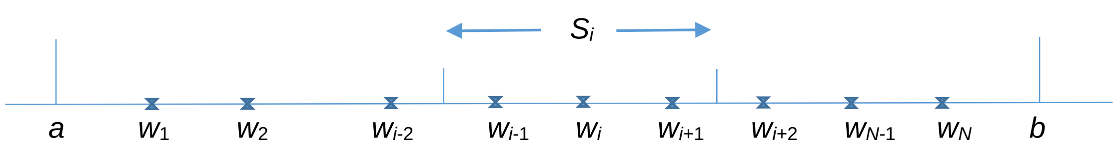
Άσκηση 8

Θεωρούμε την εκπαίδευση μονοδιάστατου ανοικτού χάρτη Kohonen με N νευρώνες και μονοδιάστατο χώρο εισόδου. Τα δεδομένα εισόδου x –και τα βάρη w των νευρώνων- λαμβάνουν τιμές στο διάστημα S=[a, b]. Υποθέτουμε ότι έχει ολοκληρωθεί η φάση της διάταξης και τα βάρη w_i, i=1,2,…,N, είναι τοποθετημένα σε αύξουσα σειρά. (Όπως γνωρίζουμε, η διάταξη αυτή δεν θα αλλάξει στη συνέχεια της εκπαίδευσης.)

Σε κάθε βήμα (εκπαιδευτικό πρότυπο x) ορίζουμε το διάστημα S_i ως την περιοχή του χώρου εισόδου με την ιδιότητα: αν το x ανήκει στο S_i, τότε κατά την ενημέρωση επηρεάζεται η τιμή του βάρους w_i (περιοχή επιρροής). Ζητείται να προσδιοριστούν τα S_i συναρτήσει των a, b και w, αν ενημερώνονται ο νικητής c και οι δύο διπλανοί του c-1 και c+1. (Οι κόμβοι 1 και N έχουν από έναν μόνο διπλανό.)

Απάντηση

Εφόσον κάθε κόμβος μπορεί να επηρεάσει μόνο τους δύο διπλανούς του, ένα δεδομένο βάρος w_i θα επηρεαστεί αν νικητής είναι ο ίδιος ο κόμβος i ή κάποιος από τους διπλανούς του:



$3 \le i \le N\text{-}2$: $\quad S_i = [\ \tfrac{1}{2}(w_{i-2} + w_{i-1}),\ \tfrac{1}{2}(w_{i+1} + w_{i+2})\ ]$

$i = 1$: $\quad S_i = [\ a,\ \tfrac{1}{2}(w_2 + w_3)\ ]$

$i = 2$: $\quad S_i = [\ a,\ \tfrac{1}{2}(w_3 + w_4)\ ]$

$i = N\text{-}1$: $\quad S_i = [\ \tfrac{1}{2}(w_{N-3} + w_{N-2}),\ b\ ]$

$i = N$: $\quad S_i = [\ \tfrac{1}{2}(w_{N-2} + w_{N-1}),\ b\ ]$