ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ
ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΣΕΜΦΕ
26/09/2022

Θέμα 1. (2,5 μον.) *Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι Σωστές και ποιές είναι Λάθος* *δικαιολογώντας την απάντησή σας.*

(1) (0,5 μον.) Κάθε φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών συγκλίνει.

(2) (0,5 μον.) Υπάρχουν φραγμένες ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ που δεν συγκλίνουν.

(3) (0,5 μον.) Η ακολουθία $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^n}$ συγκλίνει στο 1.

(4) (0,5 μον.) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(5) (0,5 μον.) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(\mathbb{R}) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Απάντηση:

(1) ΣΩΣΤΟ : Μια ακολουθία θετικών αριθμών είναι κάτω φραγμένη, πχ από το 0. Άρα από γνωστό θεώρημα για την σύγκλιση μονότονων και φραγμένων ακολουθιών έχουμε ότι κάθε φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών συγκλίνει (στο infimum των όρων της).

(2) ΣΩΣΤΟ : Πχ. η $a_n = (-1)^n$.

(3) ΛΑΘΟΣ: συγκλίνει στον e αφού $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(4) ΛΑΘΟΣ : Από το Θεώρημα Bolzano αν η f παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές τότε αναγκαστικά παίρνει και την τιμή μηδέν.

(5) ΛΑΘΟΣ : Από το Θεώρημα Darboux η παράγωγος μια συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα των Ενδιάμεσων Τιμών (παρόλο που μπορεί να μην είναι συνεχής συνάρτηση).

Θέμα 2. (3 μον.) (α) (1 μον.) Βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$.

(β) (1 μον.) Βρείτε τα σημεία συνέχειας της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -1 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

(γ) (1 μον.) Δείξτε ότι το $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ δεν υπάρχει.

Απάντηση: (α) Έχουμε $7^n \leq 3^n + 5^n + 7^n \leq 7^n + 7^n + 7^n$ και άρα

$$7 \leq \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} \leq \sqrt[n]{3} \cdot 7$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ από το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών έπεται ότι

$$\sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} \to 7$$

(β) Η f είναι μια παραλλαγή της γνωστής συνάρτησης Dirichlet και δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας. Πράγματι, έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το x_0 είναι ρητός (η απόδειξη για x_0 άρρητο είναι ανάλογη). Από πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$ μπορούμε να επιλέξουμε ακολουθία (a_n) από άρρητους με $a_n \to x_0$, πχ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε a_n άρρητο με $x_0 - \dfrac{1}{n} < a_n < x_0 + \dfrac{1}{n}$. Έχουμε ότι $f(a_n) = -1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οπότε $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = -1 \neq f(x_0) = 1$. Συνεπώς, από Αρχή Μεταφοράς η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

(γ) Από Αρχή Μεταφοράς αρκεί να βρούμε δυο ακολουθίες (x_n) και (x'_n) με όριο το $+\infty$ των οποίων οι τιμές δεν συγκλίνουν σε κοινό όριο. Πράγματι, αν $x_n = 2\pi n$ και $x'_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ τότε $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = +\infty$ ενώ $\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \sin(x'_n)$.

Θέμα 3. (2,5 μον.) (α) (1 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η f'' είναι συνεχής στο x_0 δείξτε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$$

(*Υπόδειξη: Τύπος Taylor*)

(β) Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις.

(1) (0,5 μον.) Θέτουμε $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ και $G(x) = \displaystyle\int_x^b g(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι οι F και G είναι παραγωγίσιμες και υπολογίστε την παράγωγό τους.

(2) (1 μον.) Θεωρώντας την συνάρτηση $H(x) = F(x)G(x)$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi)\int_\xi^b g(t)\,dt = g(\xi)\int_a^\xi f(t)\,dt.$$

Απάντηση: (α) Έστω $h \neq 0$. Από τον Τύπο Taylor υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x_0+h τέτοιο ώστε

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2$$

Ομοίως υπάρχει ξ' μεταξύ των x_0 και $x_0 - h$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0-h) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(\xi')}{2!}h^2$$

Άρα

$$\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = \frac{f''(\xi) + f''(\xi')}{2!}$$

Επειδή $\lim_{h\to 0}\xi = \lim_{h\to 0}\xi' = x_0$ και η f'' είναι συνεχής στο x_0 έπεται ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f''(\xi) + f''(\xi')}{2!} = \frac{f''(x_0) + f''(x_0)}{2} = f''(x_0)$$

Σημείωση: Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα de L' Hopital: Θέτουμε $g_1(h) = f(x_0 + h)$, $g_2(h) = f(x_0 - h)$ για κάθε $h \neq 0$. Από τον κανόνα Αλυσίδας, $g_1'(h) = f'(x_0+h)(x_0+h)' = f'(x_0+h)$ και ομοίως $g_2'(h) = f'(x_0-h)(x_0-h)' = -f(x_0-h)$ (η παραγώγιση γίνεται ως προς h). Άρα

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)]'}{(h^2)'} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)+f'(x_0)-f'(x_0-h)}{2h} \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f''(x_0)+f''(x_0)\right) = f''(x_0)
\end{aligned}
$$

Παρατήρηση: *Παρατηρείστε ότι με τον παραπάνω τρόπο ουσιαστικά αποδείξαμε* ***ισχυρότερο αποτέλεσμα*** *αφού το μόνο που χρειασθήκαμε είναι απλά η ύπαρξη της δεύτερης παραγώγου της f στο x_0. Δείξαμε δηλαδή το εξής: Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$$

(β) (1) Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Για την G παρατηρούμε ότι

$$G(x) = \int_x^b g(t)\ dt = \int_a^b g(t)\ dt - \int_a^x g(t)\ dt$$

Άρα, πάλι από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (για την συνάρτηση $\int_a^x g(t)\ dt$), παίρνουμε

$$G'(x) = \left(\int_a^b g(t)\ dt - \int_a^x g(t)\ dt\right)' = -\left(\int_a^x g(t)\ dt\right)' = -g(x)$$

για κάθε $x \in [a,b]$.

(2) Η συνάρτηση H είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η παράγωγός της δίνεται από τον κανόνα παραγώγισης γινομένου,

$$H'(x) = (F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x) \int_x^b g(t)\ dt - g(x) \int_a^x f(t)\ dt$$

Επίπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι $H(a) = H(b) = 0$. Άρα, από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) \int_\xi^b g(t)\ dt = g(\xi) \int_a^\xi f(t)\ dt$.

Θέμα 4. (2 μον.) (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Θέτουμε $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\phi(0) = f(0)$ και $\phi(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)\ dt}{x}$ για $x \in (0,1]$.

(1) (0.5 μον.) Δείξτε ότι η ϕ είναι συνεχής.

(2) (0.5 μον.) Δείξτε ότι η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και υπολογίστε την $\phi'(x)$ για κάθε $x \in (0,1)$.

(β) (1 μον.) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = 0$ και $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f(\xi) = \dfrac{\int_0^\xi f(t)\ dt}{\xi}$.

Απάντηση: (α) Θέτουμε $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι οι F είναι παραγωγίσιμη (και άρα και συνεχής) με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(1) Έχουμε $\phi(x) = F(x)/x$ και άρα η ϕ είναι συνεχής σε κάθε $x \in (0,1]$ ως πηλίκο συνεχών. Επιπλέον, είναι συνεχής και στο 0 αφού

$$\lim_{x\to 0} \phi(x) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0) = \phi(0)$$

(2) Έστω $x \in (0,1)$. Τότε

$$\phi'(x) = \left(\frac{F(x)}{x}\right)' = \frac{F'(x)\cdot x - F(x)\cdot (x)'}{x^2} = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2}$$

(β) Έστω $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\phi(0) = f(0)$ και $\phi(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)\ dt}{x}$ για $x \in (0,1]$. Τότε $\phi(0) = \phi(1) = 0$ και από το (α) η ϕ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $\phi'(\xi) = 0$. Από το (α) έχουμε ότι $\phi'(x) = \dfrac{xf(x) - F(x)}{x^2}$ για κάθε $x \in (0,1)$ και άρα

$$\phi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f(\xi) - F(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(\xi)}{\xi} = \frac{\int_0^\xi f(t)\ dt}{\xi}$$