ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΘΕΜΑ 1. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

(i)(**1 μον.**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n}$ (ii)(**0,5 μον.**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$, (iii)(**0,5 μον.**) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

ΘΕΜΑ 2. Δίνεται η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(i) (**1 μον.**) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R και το ακριβές διάστημα σύγκλισης.

(ii) (**1 μον.**) Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-R, R)$.

ΘΕΜΑ 3. Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) (**1 μον.**) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(2) (**1 μον.**) Δείξτε ότι η f έχει κατευθυνόμενες παραγώγους στο $(0,0)$ ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

(3) (**1 μον.**) Εξετάστε αν η f διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

ΘΕΜΑ 4. (α) (**1,5 μον.**) Μελετήστε ως προς τα τοπικά ακρότατα την συνάρτηση

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$$

(β) (**1,5 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και τέτοια ώστε (i) $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και (ii) Υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $|f_{xx}(x,y)|, |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)| \leq M$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι $|f(x,y)| \leq \dfrac{M}{2}(|x|+|y|)^2$.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 1 ώρα και 30′