ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 27 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΘΕΜΑ 1. (2 μον.) Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n$.

(i) (1 μον.) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει?

(ii) (1 μον.) Δείξτε ότι $f'(x) = \frac{1}{2-x}$ και υπολογίστε τον τύπο της $f(x)$ για κάθε $x \in (-R, R)$.

Απόδειξη. (i) Έχουμε $a_n = \frac{1}{2^n n}$ και άρα $\varrho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$. Συνεπώς, από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard, η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1/\varrho = 2$. Το κέντρο της δυναμοσειράς είναι το $x_0 = 0$ και άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < 2$ και αποκλίνει για $|x| > 2$. Ελέγχουμε τώρα τη σύγκλιση στα σημεία -2 και 2. Για $x = -2$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία είναι η εναλλάσσουσα αρμονική που ως γνωστόν συγκλίνει (κριτήριο Dirichlet). Για $x = 2$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική σειρά που ως γνωστόν αποκλίνει. Άρα το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-2, 2)$.

(ii) Για κάθε $x \in (-2, 2)$, από το Θεώρημα Παραγώγισης δυναμοσειράς, έχουμε $f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}$.

Για κάθε $x \in (-2, 2)$, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, έχουμε $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{2-t}\, dt = \ln 2 - \ln(2-x) = \ln \frac{2}{2-x}$. Επειδή $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n |_{x=0} = 0$, έχουμε $f(x) = \ln \frac{2}{2-x}$, για κάθε $x \in (-2, 2)$. □

ΘΕΜΑ 2. (2,5 μον.) (α) (i) (0,5 μον.) Συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$ και γιατί;

(ii) (0,5 μον.) Υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n) με $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ τέτοια ώστε η σειρά $a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ να μην συγκλίνει?

(β) (1,5 μον.) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)(0,5 μον.)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{(ii)(1 μον.)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

Απόδειξη. (α) (i) Γνωρίζουμε ότι αν μια σειρά συγκλίνει τότε οι όροι της τείνουν στο μηδέν. Επειδή το $\lim(-1)^n$ δεν υπάρχει η σειρά δεν συγκλίνει. Εναλλακτικά, τα μερικά αθροίσματα της σειράς είναι η ακολουθία (s_n) με $s_n = -1$ αν n περιττός και $s_n = 0$ αν n άρτιος. Άρα το $\lim s_n$ δεν υπάρχει αφού $\lim s_{2n} = 0$ και $\lim s_{2n-1} = -1$.

(ii) Η ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ικανοποιεί την συνθήκη $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ και δίνει την σειρά $a_1 - a_2 + a_3 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που δεν συγκλίνει.

(β) (i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει. Πράγματι, $\frac{\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1$ και επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

(ii) Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ συγκλίνει. Για να το δείξουμε αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy. Η ακολουθία $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$ είναι θετική και φθίνουσα και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο. Τώρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\ln 2^n}{(2^n)2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln 2}{2^n}$, με εφαρμογή του κριτηρίου λόγου, βλέπουμε ότι συγκλίνει.

Εναλλακτικά μπορούμε να εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό κριτήριο: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ είναι θετική και φθίνουσα για $x \geq 2$ (προκύπτει με παραγώγιση). Επίσης, για κάθε $a \geq 2$,

$$\int_2^a \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \int_2^a \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^a - \int_2^a (\ln x)' \left(-\frac{1}{x}\right) dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^a + \int_2^a \frac{1}{x^2}\, dx = -\left[\frac{\ln x}{x}\right]_2^a - \left[\frac{1}{x}\right]_2^a$$

και άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{a\to+\infty} \int_2^a \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \frac{1+\ln 2}{2}$ συγκλίνει. □

ΘΕΜΑ 3. (3 μον.) (α) (2 μον.) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$. Δείξτε τα επόμενα:

(i) (0,5 μον.) Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) (0,5 μον.) Για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$ η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ υπάρχει.

(iii) (1 μον.) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

(β) (1 μον.) Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). Αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = c$ για όλα τα $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, δείξτε ότι $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c = 0$.

(με $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x,y)$ συμβολίζουμε την παράγωγο της f στο σημείο (x,y) κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$)

Απόδειξη. (α) (i) Έχουμε

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot |y| \leq |y|$$

Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.

(ii) Από τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} u_1^2 u_2 = u_1^2 u_2$$

(iii) Από το (ii) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$ παίρνουμε $f_x(0,0) = 0$. Ομοίως για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$ παίρνουμε $f_y(0,0) = 0$. Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 = 0$$

για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Όμως από το (ii) έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = u_1^2 u_2 \neq 0$$

για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1, u_2 \neq 0$, άτοπο.

Εναλλακτικά, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Όμως για την ακολουθία $(x_n,y_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\to(0,0)$ έχουμε ότι $\lim f(x_n,y_n)=\frac{1}{2^{3/2}}\neq 0$, άτοπο.

(β) Θέτοντας $\mathbf{u}=\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ παίρνουμε $f_x(0,0)=f_y(0,0)=c$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(0,0)u_1+f_y(0,0)u_2=c(u_1+u_2)$ και άρα

$$c(u_1+u_2)=c$$

για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$. Θέτοντας $\mathbf{u}=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ έχουμε ότι $c\sqrt{2}=c$ και άρα $c=0$. □

ΘΕΜΑ 4. (3 μον.) (α) (1 μον.) Έστω C^2 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0,0)=1$, $f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=2$ και $f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)=f_{xy}(x,y)=4$, για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Βρείτε τον τύπο της f.

(β) (i) (1 μον.) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ με $f(x_0,y_0)=f(0,0)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f_x(\xi x_0,\xi y_0)x_0+f_y(\xi x_0,\xi y_0)y_0=0$.

(ii) (1 μον.) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f_x(x,y)x+f_y(x,y)y\geq 0$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι η f έχει στο $(0,0)$ ολικό ελάχιστο.

Απόδειξη. (α) Από τον Τύπο Taylor έχουμε ότι για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$ υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x,y)=T_1(x,y)+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(\xi x,\xi y)x^2+2f_{xy}(\xi x,\xi y)xy+f_{yy}(\xi x,\xi y)y^2\right]$$

όπου

$$T_1(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y$$

το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης με κέντρο το $(0,0)$. Άρα, αντικαθιστώντας τα δεδομένα, παίρνουμε ότι

$$f(x,y)=1+x+2y+\frac{1}{2}\left(4x^2+8xy+4y^2\right)=1+x+2y+2x^2+4xy+2y^2$$

(β) (i) Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0,y_0)-f(0,0)=\nabla f(\xi x_0,\xi y_0)\cdot(x_0,y_0)=f_x(\xi x_0,\xi y_0)x_0+f_y(\xi x_0,\xi y_0)y_0$$

Επειδή $f(x_0,y_0)=f(0,0)$ έπεται ότι $f_x(\xi x_0,\xi y_0)x_0+f_y(\xi x_0,\xi y_0)y_0=0$.

(ii) Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ με $(x_0,y_0)\neq(0,0)$. Όπως και στο (i), από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0,y_0)-f(0,0)=\nabla f(0+\xi(x_0-0),0+\xi(y_0-0))\cdot(x_0-0,y_0-0)=f_x(\xi x_0,\xi y_0)x_0+f_y(\xi x_0,\xi y_0)y_0$$

Θέτοντας

$$x=\xi x_0 \text{ και } y=\xi y_0$$

παίρνουμε

$$f(x_0,y_0)-f(0,0)=\frac{1}{\xi}\left(f_x(x,y)x+f_y(x,y)y\right)$$

και άρα από την υπόθεσή μας $f(x_0,y_0)-f(0,0)\geq 0$, δηλαδή $f(x_0,y_0)\geq f(0,0)$. Άρα η f έχει στο $(0,0)$ ολικό ελα΄χιστο. □

ΘΕΜΑ 5. (2,5 μον.) (α) (1,5 μον.) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y)=x^4+2x^2y+y^2+\frac{2}{3}y^3$$

(β) (1 μον.) Δείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:I\to\mathbb{R}$, όπου I ανοικτή περιοχή του 0 τέτοια ώστε

$$xe^{f(x)}+f(x)e^x=\cos\left(xf(x)\right).$$

Επίσης να υπολογίσετε την $f'(0)$.

Απόδειξη. (α) Έχουμε $f_x(x,y) = 4x^3+4xy$, $f_y(x,y) = 2x^2+2y+2y^2$. Επίσης $f_xx(x,y) = 12x^2+4y$, $f_{yy}(x,y) = 2+4y$, $f_{xy}(x,y) = 4y$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$. Έχουμε

$$f_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow x(x^2+y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } y = -x^2$$

Αν $x = 0$ τότε $f_y(x,y) = y + y^2 = 0 \Leftrightarrow y(1+y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = -1$.

Αν $y = -x^2$ τότε $f_y(x,y) = 2x^2 - 2x^2 + 4x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία $(0,0)$ και $(0,-1)$.

Επειδή $\Delta(0,-1) = (-4)^2 + 12 > 0$ και $f_{xx}(0,-1) - 4 < 0$ το $(0,-1)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Για το $(0,0)$ έχουμε ότι $\Delta(0,0) = 0$. Για να δούμε αν είναι τοπικό ακρότατο παρατηρούμε ότι

$$f(x,y) = (x^2+y)^2 + \frac{2}{3}y^3$$

Άρα για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ στην παραβολή $y = -x^2$ έχουμε $f(x,y) < 0$ ενώ για κάθε (x,y) στην ευθεία $y = 0$ έχουμε $f(x,y) = x^4 > 0$. Οπότε σε κάθε περιοχή του $(0,0)$ υπάρχουν σημεία με τιμές γνήσια μικρότερες αλλά και γνήσια μεγαλύτερες του $f(0,0) = 0$ και συνεπώς το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(β) Θέτοντας $y = f(x)$ παίρνουμε την εξίσωση $xe^y + ye^x = \cos(xy)$. Άρα αν $F(x,y) = xe^y + ye^x - \cos(xy)$ έχουμε την εξίσωση $F(x,y) = 0$. Έχουμε $F(0,y) = y - 1$ οπότε $F(0,1) = 0$. Επίσης $F_x(x,y) = e^y + ye^x + y\cos(xy) \Rightarrow F_x(0,1) = e+1$, $F_y(x,y) = xe^y + e^x + x\cos(xy) \Rightarrow F_y(0,1) = 1 \neq 0$. Άρα η F είναι C^1, $F(0,1) = 0$ και $F_y(0,1) \neq 0$. Από το Θεώρημα της Πεπλεγμένης συνάρτησης η F λύνεται ως προς y συναρτήσει του x σε μια περιοχή του $(0,1)$, δηλαδή υπάρχουν ανοικτά διαστήματα I και J με κέντρα τα $x_0 = 0$ και $y_0 = 1$ και μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \to J$ τέτοια ώστε για κάθε $(x,y) \in I \times J$, $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$. Επιπλέον $f'(0) = -\dfrac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)} = -1 - e$.

□