ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 22/2/2021

Οι απαντήσεις των θεμάτων μαζί με τις εκφωνήσεις και το ΟΝΟΜΑ-ΑΜ να σταλούν (σκαναρισμένες) στο mycources. Η αποστολή είναι δυνατή μέχρι τις **13 : 15**

Ονοματεπώνυμο και ΑΜ :

*Α. Τσεκάρετε **ΟΛΕΣ** τις **ΣΩΣΤΕΣ** απαντήσεις :*

Α1. (1,5 μον.) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(α) Αν $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ και οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης $f_{x_i}(\mathbf{a})$, $i = 1, \ldots, n$ της f στο $\mathbf{a}$ υπάρχουν τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$.

(β) Αν οι $f_{x_i}(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, n$ ορίζονται για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^n$.

(γ) Αν σε ένα σημείο $\mathbf{a}$ του $\mathbb{R}^n$ η f έχει παράγωγο $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$ κατά οποιαδήποτε μοναδιαία κατεύθυνση $\mathbf{u}$ του $\mathbb{R}^n$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$.

(δ) Έστω ότι σε ένα σημείο $\mathbf{a}$ του $\mathbb{R}^n$, οι $f_{x_i}(\mathbf{a})$, $i = 1, \ldots, n$ υπάρχουν. Έστω επίσης $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ μοναδιαίο. Τότε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a}) \cdot u_i$.

Α2. (1,5 μον.) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ κρίσιμο σημείο της f.
(α) Αν $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ και $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0).
(β) Αν $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ και $f(x, y) \neq 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της f.
(γ) Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0) τότε $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$.
(δ) Αν $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$ τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε γενικά αν η f έχει ή όχι τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0).

Β. Να γράψετε την λύση των επόμενων ασκήσεων :

Β1. (2 μον) Γράψτε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = e^x \cos y$ τάξης 2 με κέντρο το $(0, \pi/2)$.

Β2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \dfrac{x^5}{x^4 + y^6}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) (1 μον) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Βρείτε (*με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου*) την $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$.

(β) (2 μον) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Β3. (2 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ με $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Βρείτε το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{|x| + |y|}$$

ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 7 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΟΜΑΔΑ Α

Να απαντήσετε σε ακριβώς ΤΡΙΑ από τα παρακάτω τέσσερα θέματα. Μην ξεχάσετε Ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο γραπτό σας.

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) (0,5 μον) Δείξτε ότι $\dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{a^2+b^2}$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.

(ii) (1,5 μον) Για ποιές τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$ υπάρχει;

(β) (1,5 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ και τέτοια ώστε $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ell \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και $\ell = 0$.

ΘΕΜΑ 2. (α) (1 μον) Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0$ και $f_{xy}(0,0) = 1$. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

$$\text{(i)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} \qquad \text{(ii)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}.$$

(β) (1 μον.) Δίνεται C^1 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f_x(x,y) = 5x$ και $f_y(x,y) = 2y$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι $|f(x,y)| \leq 25x^2 + 4y^2$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(γ) (1,5 μον) Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα στο $(0,0)$ την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^4}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0) = 0$.

ΘΕΜΑ 3. (α) (1 μον.) Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με το $(0,0)$ σαγματικό σημείο και $f(0,0) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο ακολουθίες (x_n, y_n) και (x'_n, y'_n) στον $\mathbb{R}^2$ τέτοιες ώστε $\lim(x_n, y_n) = \lim(x'_n, y'_n) = (0,0)$ και $f(x'_n, y'_n) < 0 < f(x_n, y_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) (1 μον.) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$.

(γ) (1,5 μον.) Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες (i) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, (ii) $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) \geq 0$ και $f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = 0$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου για την f.

ΘΕΜΑ 4. (α) *Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή όχι, δικαιολογώντας την απάντησή σας*:

(i) (0,5 μον.) Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(a - a_n)$ συγκλίνει.

(ii) (0,5 μον) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε η ακολουθία $(n^2 a_n)$ είναι άνω φραγμένη. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(iii) (0,5 μον) Έστω $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x \in [-1, 1)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(β) (i) (1 μον.) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\sin\frac{1}{n}\right)$.

(ii) (1 μον.) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ συγκλίνει.

***ΛΗΞΗ ΕΞΕΤΑΣΗΣ*: 11.30′**
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 30 ΑΥΓΟΥΣΤΟΥ 2021
ΟΜΑΔΑ Α

1) Να απαντήσετε σε ακριβώς 3(ΤΡΙΑ) από τα παρακάτω 4 θέματα. 2) Να γράψετε Ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο γραπτό σας.

ΘΕΜΑ 1. (α) (1,5 μον) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}(x-1)^n$ συγκλίνει.

(β) (1 μον) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

(γ) (1 μον) Εξετάστε αν είναι σωστή ή λάθος η εξής πρόταση δικαιολογώντας την απάντησή σας: Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ συγκλίνει για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_n = -1, +1$.

ΘΕΜΑ 2. (α) (2 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0) = 0$.

(i) Αν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ βρείτε την παράγωγο της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $(0,0)$.

(ii) Είναι η f συνεχής στο $(0,0)$?

(β) (1,5 μον) Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα στο $(0,0)$ την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

ΘΕΜΑ 3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και τέτοια ώστε (i) υπάρχει $C > 0$ με $C \geq |f_{xx}(x,y)|, |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)|$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και (ii) $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Δείξτε ότι ισχύουν τα επόμενα:

(α) (2 μον) Για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f_x(x,y)| \leq C\,(|x|+|y|)$ και ομοίως $|f_y(x,y)| \leq C\,(|x|+|y|)$.

(β) (1,5 μον) Για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x,y)| \leq \dfrac{C}{2}\,(|x|+|y|)^2$.

ΘΕΜΑ 4. (α) (1,5 μον.) Εξετάστε ως προς τα τοπικά ακρότατα την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + y^3 - (x-y)^3$.

(β) (1,5 μον.) Εξετάστε αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \to (0, +\infty)$, όπου I ένα ανοικτό υποδιάστημα του $(0, +\infty)$ με κέντρο το $x_0 = 1$, με τις ιδιότητες $f(x) = x^{f(x)}$ για κάθε $x \in I$ και $f(1) = f'(1) = 1$.

***ΛΗΞΗ ΕΞΕΤΑΣΗΣ*: 11.30′**
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 22/1/2021

*Α. Τσεκάρετε **ΟΛΕΣ** τις **ΣΩΣΤΕΣ** απαντήσεις :*

Α1. (1,5 μον.) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(α) Αν $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ και οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης $f_{x_i}(\mathbf{a})$, $i = 1, \ldots, n$ της f στο $\mathbf{a}$ υπάρχουν τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$. **ΛΑΘΟΣ.**

(β) Αν οι $f_{x_i}(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, n$ ορίζονται για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^n$. **ΣΩΣΤΟ**

(γ) Αν σε ένα σημείο $\mathbf{a}$ του $\mathbb{R}^n$ η f έχει παράγωγο $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$ κατά οποιαδήποτε μοναδιαία κατεύθυνση $\mathbf{u}$ του $\mathbb{R}^n$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$. **ΛΑΘΟΣ**

(δ) Έστω ότι σε ένα σημείο $\mathbf{a}$ του $\mathbb{R}^n$, οι $f_{x_i}(\mathbf{a})$, $i = 1, \ldots, n$ υπάρχουν. Έστω επίσης $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ μοναδιαίο. Τότε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a}) \cdot u_i$. **ΛΑΘΟΣ**

Α2. (1,5 μον.) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ κρίσιμο σημείο της f.

(α) Αν $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ και $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0). **ΛΑΘΟΣ**

(β) Αν $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ τότε $\Delta(x_0, y_0) < 0$ και άρα το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της f. **ΛΑΘΟΣ**

(γ) Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0) τότε $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$. **ΣΩΣΤΟ**

(δ) Αν $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$ τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε γενικά αν η f έχει ή όχι τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0). **ΣΩΣΤΟ**

(*ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για το (β) θεωρείστε την σταθερή συνάρτηση* $f(x, y) = 1$)

Β. Να γράψετε την λύση των επόμενων ασκήσεων :

Β1. (2 μον) Γράψτε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = e^x \cos y$ τάξης 2 με κέντρο το $(0, \pi/2)$.

ΛΥΣΗ Έχουμε

$$f_x(x,y) = e^x \cos y, \quad f_y(x,y) = -e^x \sin y$$
$$f_{xx}(x,y) = e^x \cos y$$
$$f_{yy}(x,y) = -e^x \cos y$$
$$f_{xy}(x,y) = (f_x)_y = -e^x \sin y$$

Άρα

$$f_x(0,\pi/2) = 0, \quad f_y(0,\pi/2) = -1, \quad f_{xx}(0,\pi/2) = 0, \quad f_{yy}(0,\pi/2) = 0, \quad f_{xy}(0,\pi/2) = -1$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = e^x \cos y$ τάξης 2 με κέντρο το $(1, \pi)$ είναι το

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= f(0,\pi/2) + f_x(0,\pi/2)(x-0) + f_y(0,\pi/2)(y-\pi/2) + \\
&\frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,\pi/2)(x-0)^2 + 2f_{xy}(0,\pi/2)(x-0)(y-\pi/2) + f_{yy}(0,\pi/2)(y-\pi/2)^2\right) \\
&= 0 + 0x - (y-\pi/2) + \frac{1}{2}\left(0x^2 - 2x(y-\pi/2) + 0(y-\pi)^2\right) \\
&= -(y-\pi/2) - x(y-\pi/2) \\
&= \frac{\pi}{2}x - y - xy + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

B2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=\dfrac{x^5}{x^4+y^6}$ αν $(x,y)\neq(0,0)$ και $f(0,0)=0$.

(α) (1 μον) Έστω $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Βρείτε (*με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου*) την $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$.

(β) (2 μον) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

ΛΥΣΗ

(α) Έστω $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\|=1$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t\mathbf{u})-f(\mathbf{0})}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^5u_1^5}{t^4u_1^4+t^6u_2^6}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^5u_1^5}{t^5u_1^4+t^7u_2^6}=\lim_{t\to0}\frac{u_1^5}{u_1^4+t^2u_2^6}=u_1.$$

(β) Απο το (α) για $\mathbf{u}=\mathbf{e}_1=(1,0)$,

$$f_x(0,0)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0)=1,$$

και για $\mathbf{u}=\mathbf{e}_2=(0,1)$,

$$f_y(0,0)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0)=0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^5}{x^4+y^6}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=-\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^6}{(x^4+y^6)\sqrt{x^2+y^2}}=0\end{aligned}$$

Μετατρέποντας σε πολικές συντεταγμένες ($\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$) παίρνουμε

$$(1)\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^6}{(x^4+y^6)\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho\cos\theta\cdot\rho^6\sin^6\theta}{(\rho^4\cos^4\theta+\rho^6\sin^6\theta)\rho}=\lim_{\rho\to0}\left(\frac{\rho^2\cdot\sin^6\theta}{\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\right)=0$$

Πράγματι έστω $\epsilon>0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το θ: Αν $|\cos\theta|<\epsilon$ τότε

$$\left|\frac{\rho^2\cdot\sin^6\theta}{\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\right|\le\left|\frac{\rho^2\cdot\sin^2\theta}{\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}\cdot\sin^4\theta\cos\theta\right|\le|\sin^4\theta\cos\theta|\le|\cos\theta|<\epsilon$$

για οποιοδήποτε $\rho>0$, ενώ αν $|\cos\theta|\ge\epsilon$ τότε

$$\left|\frac{\rho^2\cdot\sin^6\theta}{\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\right|\le\frac{\rho^2\cdot\sin^6\theta}{\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}\le\frac{\rho^2}{\epsilon^4}<\epsilon$$

για $0<\rho<\epsilon^{5/2}$. Συνεπώς για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ($\delta=\epsilon^{5/2}$) τέτοιο ώστε αν $0<\rho<\delta$,

$$\left|\frac{\rho^2\cdot\sin^6\theta}{\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\right|<\epsilon$$

για κάθε $\theta>0$, δηλαδή η (10) όντως ισχύει. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

B3. (2 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ με $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Βρείτε το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{|x|+|y|}$$

ΛΥΣΗ Έχουμε

$$\left|\frac{f(x,y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{|x|+|y|}\right| \leq \left|\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}\right| \leq \left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \cdot \left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|}\right| \leq \left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \tag{2}$$

Τώρα από την παραγγισιμότητα της f στο $(0,0)$ και το ότι $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ έπεται

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

και άρα από την (4) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{|x|+|y|} = 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ II, ΣΕΜΦΕ, 7 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΟΜΑΔΑ Α

Να απαντήσετε σε ακριβώς ΤΡΙΑ από τα παρακάτω τέσσερα θέματα.

ΘΕΜΑ 1. *(α) Έστω* $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) (0,5 μον) Δείξτε ότι $\dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{a^2+b^2}$ *για κάθε* $(x,y) \neq (0,0)$.

(ii) (1,5 μον) Για ποιές τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ *το* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *υπάρχει;*

(β) (1,5 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *παραγωγίσιμη στο* $(0,0)$ *και τέτοια ώστε* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ell \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι* $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ *και* $\ell = 0$.

Λύση: (α) (i) Άμεσο από ανισότητα Cauchy–Schwarz:

$$\frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(a,b)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

(ii) Αν $a = b = 0$ τότε προφανώς το όριο υπάρχει και είναι ίσο με 0. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε άλλη τιμή των a και b το όριο δεν υπάρχει. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις ακολουθίες $(1/n, 0)$, $(0, 1/n)$ και $(1/n, 1/n)$ βλέπουμε εύκολα ότι αν υπήρχε το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$ τότε θα έπρεπε

$$a = b = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

και άρα $a = b = 0$.

(β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ θα έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \tag{3}$$

Επίσης η f είναι και συνεχής στο $(0,0)$ και άρα

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2} = \ell \cdot 0 = 0.$$

Αντικαθιστώντας στην (3) και λαμβάνοντας ψπόψην ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ell$ παίρνουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ell$$

Από το ερώτημα (α)(ii) (για $a = f_x(0,0)$ και $b = f_y(0,0)$) έπεται ότι $f_x(0,0) = f_y(0,0) = \ell = 0.\square$

ΘΕΜΑ 2. *(α) (1 μον) Έστω C^2 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=0$ και $f_{xy}(0,0)=1$. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια*

$$\text{(i)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} \qquad \text{(ii)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}.$$

(β) (1 μον.) Δίνεται C^1 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(0,0)=0$ και $f_x(x,y)=5x$ και $f_y(x,y)=2y$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι $|f(x,y)|\leq 25x^2+4y^2$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(γ) (1,5 μον) Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα στο $(0,0)$ την συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^4}$ αν $(x,y)\neq(0,0)$ και $f(0,0)=0$.

Λύση: (α) (i) Το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $(0,0)$ είναι το $T_1(x,y)=0$. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Άρα

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} = 0 \tag{4}$$

αφού $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|}\leq 1$, για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$.

((ii) Το δεύτερης τάξης είναι το $T_2(x,y)=xy$ και από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

Απο την σχέση αυτή παρατηρούμε ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει, αφού διαφορετικά θα έπρεπε να υπήρχε και το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ που όμως, όπως ελέγχεται εύκολα με τις ακολουθίες $(1/n,0)$ και $(1/n,1/n)$, δεν υπάρχει.

(β) Για $(x,y)=(0,0)$ η ανισότητα προφανώς ισχύει. Έστω $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $(x,y)\neq(0,0)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$f(x,y)-f(0,0)=f_x(\xi,\eta)(x-0)+f_y(\xi,\eta)(y-0)=5\xi\cdot x+2\eta\cdot y \tag{5}$$

Από την (5) και από την ανισότητα Cauchy–Schwarz παίρνουμε

$$|f(x,y)|=|f(x,y)-f(0,0)|=|5\xi x+2\eta y|\leq\sqrt{25\xi^2+4\eta^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} \tag{6}$$

Επειδή το (ξ,η) ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y), έπεται ότι $|\xi|\leq|x|$ και $|\eta|\leq|y|$ και άρα $\sqrt{25\xi^2+4\eta^2}\leq\sqrt{25x^2+4y^2}$ οπότε από την (6) $|f(x,y)|\leq\sqrt{25x^2+4y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=25x^2+4y^2$.

(γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ και επιπλέον

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Επίσης

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{xy^4}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$. Αν $x=0$ τότε προφανώς

$$\frac{xy^4}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \tag{7}$$

για κάθε $y\neq 0$. Διαφορετικά, από την ανισότητα $a^2+b^2 \geq 2ab \geq ab$, $a,b\geq 0$, (για $a=|x|, b=y^2$) έπεται ότι $x^2+y^4 \geq |x|y^2$ και άρα

$$\left|\frac{xy^4}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot|y| \leq |y| \tag{8}$$

Από τις (7) και (8) έπεται ότι

$$\left|\frac{xy^4}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |y|$$

για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$ και άρα, από το κριτήριο παρεμβολής,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.$\square$

ΘΕΜΑ 3. *(α) (1 μον.) Έστω C^2 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με το $(0,0)$ σαγματικό σημείο και $f(0,0)=0$. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο ακολουθίες (x_n,y_n) και (x'_n,y'_n) στον $\mathbb{R}^2$ τέτοιες ώστε $\lim(x_n,y_n)=\lim(x'_n,y'_n)=(0,0)$ και $f(x'_n,y'_n)<0<f(x_n,y_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

(β) (1 μον.) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2-10$.

(γ) (1,5 μον.) Έστω C^2 συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες (i) $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, (ii) $f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)\geq 0$ και $f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f^2_{xy}(x,y)=0$, για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου για την f.

Λύση: (α) Αφού το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο δεν είναι τοπικό ακρότατο και άρα σε κάθε περιοχή του $(0,0)$ υπάρχουν (x,y) και (x',y') με $f(x',y')<f(0,0)<f(x,y) \Leftrightarrow f(x'y')<0<f(x,y)$. Άρα για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε (x_n,y_n) και (x'_n,y'_n) στον ανοικτό δίσκο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $r_n=1/n$ με $f(x'_n,y'_n)<0<f(x_n,y_n)$. Επειδή $1/n\to 0$ έπεται ότι $\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n)=\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$.

(β) Έχουμε $f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$ και άρα

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4y, f_y(x,y) = -4x + 4y,$$
$$f_{xx}(x,y) = 12x^2,\ f_{xy}(x,y) = -4,\ f_{yy}(x,y) = 4$$

και άρα

(9) $$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = 48x^2 - 16$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$x^3 - y = 0$$
$$-x + y = 0$$

απ΄ όπου

$$y = x$$

και

$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x+1 \text{ ή } x = -1$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. Από την (9) έχουμε

$$\Delta(0,0) < 0, \quad \Delta(1,1) = \Delta(-1,-1) > 0$$

Επειδή $f_{xx}(1,1) = f_{xx}(-1,-1) > 0$ έχουμε ότι τα σημεία $(-1,-1)$ είναι τοπικά ελάχιστα για την f ενώ το $(0,0)$ σαγματικό.

(γ) Έστω $(x,y) \neq (0,0)$. Από τον Τύπο Taylor έχουμε ότι υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθ. τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \end{aligned}$$

Αφού $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) \geq 0$ και $f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) = f_{xy}^2(x,y)$, θέτοντας

$$a = f_{xx}(\xi,\eta) = f_{yy}(\xi,\eta)$$

έχουμε ότι $a \geq 0$ και $|f_{xy}(\xi,\eta)| = a$.

Διακρίνουμε τις επόμενες δυνατές περιπτώσεις:

(1) $a = 0$. Τότε $f_{xy}(\xi,\eta) = 0$ και

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) = f(0,0).$$

(2) $a > 0$ και $f_{xy}(\xi,\eta) = -a$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \frac{a}{2}\left(x^2 - 2xy + y^2\right) = f(0,0) + \frac{a}{2}(x-y)^2 \geq f(0,0) \end{aligned}$$

(3) $a > 0$ και $f_{xy}(\xi,\eta) = a$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= f(0,0) + \frac{a}{2}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) = f(0,0) + \frac{a}{2}(x+y)^2 \geq f(0,0) \end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπωση $f(x,y) \geq (0,0)$. Επειδή το (x,y) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^2$ διάφορο του $(0,0)$ έπεται ότι η f έχει στο $(0,0)$ ολικό ελάχιστο. $\square$

ΘΕΜΑ 4. *(α) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή όχι, δικαιολογώντας την απάντησή σας:*

(i) (0,5 μον.) Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(a-a_n)$ συγκλίνει.

(ii) (0,5 μον) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε η ακολουθία $(n^2 a_n)$ είναι άνω φραγμένη. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(iii) (0,5 μον) Έστω $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x \in [-1,1)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(β) (i) (1 μον.) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\sin\frac{1}{n}\right)$.

(ii) (1 μον.) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ συγκλίνει.

Λύση: (i) Αφού (a_n) αύξουσα με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η $b_n = a - a_n$ είναι φθίνουσα με $\lim b_n = 0$. Απο κριτήριο Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(a-a_n)$ συγκλίνει.

(ii) Έχουμε ότι υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $0 < n^2 a_n \leq M \Leftrightarrow a_n \leq \dfrac{M}{n^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(iii) Αφού η (a_n) είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία, η εναλλάσσουσα σειρά $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει (κριτήριο Leibniz). Άρα η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x = -1$ και συνεπώς, αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, θα πρέπει $R \geq 1$. Από την άλλη μεριά, $R \leq 1$, αφού από υπόθεση η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει που σημαίνει ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = 1$. Άρα $R = 1$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in [-1,1)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(β) (i) Έχουμε $\arctan\left(\sin\dfrac{1}{n}\right) > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\lim \frac{\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - \arctan 0}{x-0} = (\arctan x)'_{x=0} = \frac{1}{1+x^2}\ |_{x=0} = 1$$

και ομοίως

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει, από οριακό κριτ·ηριο σύγκλισης, έπεται και ότι και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ δεν συγκλίνει.

(ii) Θέτουμε $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \tag{10}$$

και άρα $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1/e$. Συνεπώς $R = e$ και αν $|x| < e$ η δυναμοσειρά συγκλίνει ενώ αν $|x| > e$ αποκλίνει. Μένει να εξετάσουμε την σύγκλιση στα σημεία $x = e$ και $x = -e$.

Στο $x = e$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, όπου $b_n = a_n e^n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \overset{(10)}{=} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n e = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

αφού $(1 + \dfrac{1}{n})^n < e$. Άρα η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ δεν συγκλίνει. Συνεπώς η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει για $x = e$.

Στο $x = -e$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n e^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ που πάλι δεν συγκλίνει. Πράγματι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ συνέκλινε θα έπρεπε $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n b_n = 0$. Αλλά τότε και $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, που είναι άτοπο, αφού η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα και άρα $b_n \geq b_1 = e$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in (-e, e)$ και αποκλίνει παντού αλλού.$\square$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 30 ΑΥΓΟΥΣΤΟΥ 2021

ΟΜΑΔΑ Α

1) Να απαντήσετε σε ακριβώς 3(ΤΡΙΑ) από τα παρακάτω 4 θέματα. 2) Να γράψετε Ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο γραπτό σας.

ΘΕΜΑ 1. (α) (1,5 μον) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}(x-1)^n$ συγκλίνει.

(β) (1 μον) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

(γ) (1 μον) Εξετάστε αν είναι σωστή ή λάθος η εξής πρόταση δικαιολογώντας την απάντησή σας: Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ συγκλίνει για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_n = -1, +1$.

ΛΥΣΗ: (α) Είναι $a_n = \dfrac{3^n}{n} \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}} = 3$ (αφού $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Άρα $R = 1/3$.

Αφού το κέντρο είναι $x_0 = 1$ και η ακτίνα σύγκλισης $R = 1/3$ η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \mathbb{R}$ με $|x-1| < 1/3 \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ και αποκλίνει για $x \in \mathbb{R}$ με $|x-1| > 1/3 \Leftrightarrow x < 2/3$ ή $x > 4/3$. Για $x = 2/3$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\frac{2}{3}-1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που συγκλίνει ως εναλλάσσουσα αρμονική. Αντίστοιχα για $x = 4/3$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\frac{4}{3}-1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική σειρά και αποκλίνει. Συνεπώς η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ και αποκλίνει για τα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$.

(β) Επειδή

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης ορίου λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ δεν συγκλίνει.

(γ) Έστω (ϵ_n) ακολουθία με $\epsilon_n \in \{-1, +1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$. Η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ είναι συγκλίνουσα επειδή είναι απολύτως συγκλίνουσα. Πράγματι, αφού $a_n > 0$ έχουμε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\epsilon_n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και από υπόθεση η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 2. (α) (2 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0) = 0$.

(i) Αν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ βρείτε την παράγωγο της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $(0,0)$.

(ii) Είναι η f συνεχής στο $(0,0)$?

(β) (1,5 μον) Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα στο $(0,0)$ την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

ΛΥΣΗ: (α) (i) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu_1, 0+tu_2) - f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^5u_1^2u_2^3}{t^4u_1^4+t^6u_2^6}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t^5u_1^2u_2^3}{t^5(u_1^4+t^2u_2^6)} = \lim_{t\to 0} \frac{u_1^2u_2^3}{u_1^4+t^2u_2^6}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να συμβεί $u_1 = u_2 = 0$ αφού $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

(α) $u_1 = 0$. Τότε $|u_2| = 1$ και $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$.

(β) $u_1 \neq 0$. Τότε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{u_1^2u_2^3}{u_1^4+t^2u_2^6} = \dfrac{u_1^2u_2^3}{u_1^4} = \dfrac{u_2^3}{u_1^2}$.

(ii) Για $x = t$ και $y = 0$ έχουμε $\lim\limits_{t\to 0} f(t,0) = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$ ενώ για $x = t > 0$ και $y^3 = x^2 \Leftrightarrow y = t^{2/3}$,

$$\lim_{t\to 0} f(t, t^{2/3}) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2t^2}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$$

και άρα το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(β) Έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

και ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}} = 0$$

Όμως το παραπάνω όριο δεν υπάρχει. Πράγματι, θέτοντας $g(x,y) = \sqrt{\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}}$ για $x = y = t \neq 0$ έχουμε

$$\lim_{t\to 0} g(x,y) = \lim_{t\to 0} \sqrt{\frac{|t\cdot t|}{t^2+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ενώ για $x = t$ και $y = 0$,

$$\lim_{t\to 0} g(t,0) = 0.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

ΘΕΜΑ 3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και τέτοια ώστε (i) υπάρχει $C > 0$ με $C \geq |f_{xx}(x,y)|, |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)|$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και (ii) $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Δείξτε ότι ισχύουν τα επόμενα:

(α) (2 μον) Για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f_x(x,y)| \leq C(|x|+|y|)$ και ομοίως $|f_y(x,y)| \leq C(|x|+|y|)$.

(β) (1,5 μον) Για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x,y)| \leq \dfrac{C}{2}(|x|+|y|)^2$.

ΛΥΣΗ: (α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τις συναρτήσεις f_x και f_y. Για την ανισότητα $|f_x(x,y)| \leq C(|x|+|y|)$ έχουμε τα εξής: Για $(x,y) = (0,0)$ η ανισότητα προφανώς ισχύει. Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x,y) \neq (0,0)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}
|f_x(x,y)| = |f_x(x,y) - f_x(0,0)| &= (f_x)_x(\xi,\eta)(x-0) + (f_x)_y(\xi,\eta)(y-0) \\
&= |f_{xx}(\xi,\eta)x + f_{xy}(\xi,\eta)y| \\
&\leq |f_{xx}(\xi,\eta)| \cdot |x| + |f_{xy}(\xi,\eta)| \cdot |y| \leq C(|x|+|y|).
\end{aligned}$$

Για την f_y εργαζόμαστε ομοίως χρησιμοποιώντας επιπλέον ότι $f_{xy} = f_{yx}$ που ισχύει λόγω συνέχειας των μερικών παραγώγων.

(β) Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Όπως στο (α) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(x,y) \neq (0,0)$. Από τον Τύπο Taylor υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right)
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
|f(x,y)| &\leq \frac{1}{2}\left(|f_{xx}(\xi,\eta)|x^2 + 2|f_{xy}(\xi,\eta)| \cdot |xy| + |f_{yy}(\xi,\eta)|y^2\right) \\
&\leq \frac{C}{2}\left(x^2 + 2|xy| + y^2\right) = \frac{C}{2}(|x|+|y|)^2
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4. (α) (1,5 μον.) Εξετάστε ως προς τα τοπικά ακρότατα την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + y^3 - (x-y)^3$.

(β) (1,5 μον.) Εξετάστε αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \to (0,+\infty)$, όπου I ένα ανοικτό υποδιάστημα του $(0,+\infty)$ με κέντρο το $x_0 = 1$, με τις ιδιότητες $f(x) = x^{f(x)}$ για κάθε $x \in I$ και $f(1) = f'(1) = 1$.

ΛΥΣΗ: (α) Η $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 - 3(x-y)^2 \\ f_y(x,y) &= 3y^2 + 3(x-y)^2 \\ f_{xx}(x,y) &= 6x - 6(x-y) \\ f_{yy}(x,y) &= 6y + 6(x-y) \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 6(x-y) \end{aligned}$$

όλες συνεχείς.

Βρίσκουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 - 3(x-y)^2 = 0 \\ f_y(x,y) &= 3y^2 + 3(x-y)^2 = 0 \end{aligned}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^2 + y^2 = 0$ και άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0,0)$.

Επειδή $\Delta(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - \left(f_{xy}(0,0)\right)^2 = 0$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

(α) $f(0,0) = 0$,

(β) για κάθε $x = y > 0$, είναι $f(x,y) = 2x^3 > 0$ και

(γ) για κάθε $x = y < 0$ είναι $f(x,y) = 2x^3 < 0$.

Συνεπώς σε κάθε περιοχή του $(0,0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που η τιμή της f στο ένα από αυτά να είναι μικρότερη του $f(0,0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $f(0,0)$, πράγμα που σημαίνει ότι το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο. Άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

(β) Θέτοντας $y = f(x)$ έχουμε $y = x^y \Leftrightarrow x^y - y = 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x,y) = x^y - y$ (όπου $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\} = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$). Είναι εύκολο να δούμε ότι η F είναι C^1. Πράγματι $F_x(x,y) = yx^{y-1}$ και $F_y(x,y) = \ln x \cdot x^y - 1$. Επίσης, $F(1,1) = 0$ και $F_y(1,1) = -1 \neq 0$. Από το Θεώρημα της Πεπλεγμένης συνάρτησης η F λύνεται τοπικά στο $(1,1)$ ως προς y. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I \subseteq (0,+\infty)$ και $J \subseteq (0,+\infty)$ με κέντρο το $x_0 = 1$ και μια C^1 συνάρτηση $f : I \to J$ τέτοια ώστε $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$, για κάθε $(x,y) \in I \times J$. Συνεπώς $f(1) = 1$ και $F(x, f(x)) = 0 \Leftrightarrow x^{f(x)} - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^{f(x)}$, για κάθε $x \in I$. Τέλος, $f'(1) = -\dfrac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = -\dfrac{1}{-1} = 1$.