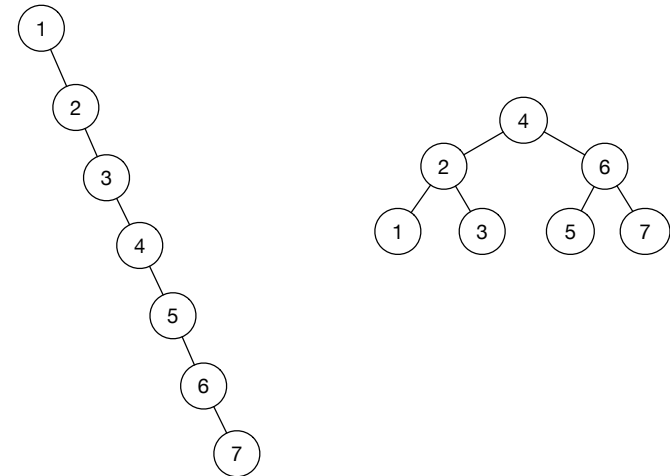


Δένδρα αναζήτησης AVL

Γιώργος Στάμου

Εργαστήριο Συστημάτων Τεχνητής Νοημοσύνης και Μάθησης
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Συνθήκες ισορροπίας για BST

- Ποια είναι τα χαρακτηριστικά μίας καλής συνθήκης ισορροπίας;
- Μία καλή συνθήκη ισορροπίας εξασφαλίζει ότι το ύψος ενός δένδρου με n κόμβους είναι της τάξης $O(\log n)$.
- Η καλή συνθήκη ισορροπίας πρέπει να μπορεί να διατηρηθεί αποδοτικά.
- Δηλαδή η πρόσθετη δουλειά η οποία είναι απαραίτητη προκειμένου να ισορροπήσει το δένδρο, όταν ένα στοιχείο εισάγεται ή διαγράφεται, πρέπει να είναι της τάξης $O(\log n)$.

AVL δένδρα – Ορισμός

Ένα δυαδικό δένδρο αναζήτησης $T = \{r; T_L, T_R\}$ είναι δένδρο AVL (Adelson-Velsky and Landis) αν είναι κενό ή:

- $|h_L - h_R| \leq 1$, όπου h_L είναι το ύψος του T_L και h_R είναι το ύψος του T_R
- τα T_L και T_R είναι δένδρα AVL

Δένδρα AVL – Ιδιότητες

- Προφανώς, όλα τα τέλεια δυαδικά δένδρα είναι AVL.
- Αυτό που δεν είναι τόσο προφανές είναι ότι τα ύψη όλων των δένδρων που ικανοποιούν την AVL συνθήκη ισορροπίας είναι λογαριθμικά ως προς τον αριθμό των εσωτερικών κόμβων.
- Ισχύει ότι το ύψος h ενός AVL ισορροπημένου δένδρου με n εσωτερικούς κόμβους ικανοποιεί τη συνθήκη:
$$\log_2(n + 1) < h \leq 1,440 \log(n + 2) - 0,328$$

Εισαγωγή στοιχείων σε δένδρα AVL

- Η εισαγωγή ενός στοιχείου σε ένα AVL δένδρο είναι μία διαδικασία που ολοκληρώνεται σε δύο φάσεις.
 - Πρώτον, το αντικείμενο εισάγεται στο δένδρο χρησιμοποιώντας την συνηθισμένη μέθοδο εισαγωγής σε δυαδικά δένδρα αναζήτησης.
 - Αφού έχει εισαχθεί το αντικείμενο, είναι απαραίτητο να ελεγχθεί ότι το δένδρο που προκύπτει συνεχίζει να είναι AVL ισορροπημένο και να ισορροπήσουμε το δένδρο στην περίπτωση που δεν είναι.

Εισαγωγή στοιχείων σε δένδρα AVL

- Ακριβώς όπως και σε ένα συνηθισμένο δυαδικό δένδρο αναζήτησης, τα στοιχεία εισάγονται στα AVL δένδρα συνδέοντάς τα ως φύλλα.
- Για να βρούμε τη σωστή θέση εισαγωγής υποθέτουμε ότι το στοιχείο υπάρχει ήδη στο δένδρο και ακολουθούμε το μονοπάτι που διασχίζει η αναζήτηση για να προσδιορίσουμε το σημείο στο οποίο που θα πρέπει να εισαχθεί αυτό το στοιχείο.
- Υποθέτοντας ότι το στοιχείο δεν υπάρχει ήδη στο δένδρο, η αναζήτηση είναι ανεπιτυχής και τερματίζει σε έναν εξωτερικό, κενό κόμβο, οπότε το στοιχείο που θέλουμε να εισάγουμε στο δένδρο, τοποθετείται σε αυτόν τον εξωτερικό κόμβο.

Εισαγωγή στοιχείων σε δένδρα AVL

- Η εισαγωγή ενός στοιχείου σε έναν δοθέντα εξωτερικό κόμβο μπορεί να επηρεάσει τα ύψη όλων των κόμβων που βρίσκονται κατά μήκος του μονοπατιού πρόσβασης, δηλαδή του μονοπατιού από την ρίζα σε αυτόν τον κόμβο.
- Φυσικά, όταν ένα αντικείμενο εισάγεται σε ένα δένδρο, το ύψος κάποιου υποδένδρου μπορεί να αυξηθεί κατά 1.
- Επομένως, για να εξασφαλίσουμε ότι το δένδρο που προκύπτει είναι ακόμα AVL ισορροπημένο, τα ύψη όλων των κόμβων κατά μήκος του μονοπατιού πρόσβασης πρέπει να υπολογιστούν εκ νέου και η AVL συνθήκη ισορροπίας πρέπει να ελεγχθεί.

Διαγραφή στοιχείων από δένδρα AVL

- Ακολουθούμε το μονοπάτι αναζήτησης, προκειμένου να προσδιορίσουμε το στοιχείο (εάν υπάρχει στο δένδρο).
- Αν το στοιχείο υπάρχει στο δένδρο, η αναζήτηση θα είναι **επιτυχής** τερματίζοντας στον **κόμβο** που θα πρέπει να διαγραφεί.
- Αν ο κόμβος είναι **φύλλο** τον διαγράφουμε, μετατρέποντάς τον σε κενό υποδένδρο.
- Αν ο κόμβος αυτός έχει **ένα παιδί** τον διαγράφουμε, αντικαθιστώντας τον με το μη κενό παιδί του.
- Αν έχει **δύο παιδιά**, αντικαθιστούμε τη ρίζα του με τη ρίζα του προηγούμενου κόμβου στην ενδοδιατεταγμένη διάσχιση και διαγράφουμε εκείνο τον κόμβο (ο οποίος έχει ένα παιδί ή είναι φύλλο)

Διαγραφή στοιχείων από δένδρα Avl

- Η διαγραφή ενός στοιχείου από ένα AVL δένδρο μπορεί να επηρεάσει τα ύψη όλων των κόμβων που βρίσκονται κατά μήκος του *μονοπατιού πρόσβασης*, δηλαδή του μονοπατιού από την ρίζα σε αυτόν τον κόμβο.
- Φυσικά, όταν ένα αντικείμενο διαγράφεται σε ένα δένδρο, το ύψος κάποιου υποδένδρου μπορεί να μειωθεί κατά 1.
- Επομένως, για να εξασφαλίσουμε ότι το δένδρο που προκύπτει είναι ακόμα AVL ισορροπημένο, τα ύψη όλων των κόμβων κατά μήκος του μονοπατιού πρόσβασης πρέπει να υπολογιστούν εκ νέου και η AVL συνθήκη ισορροπίας πρέπει να ελεγχθεί.

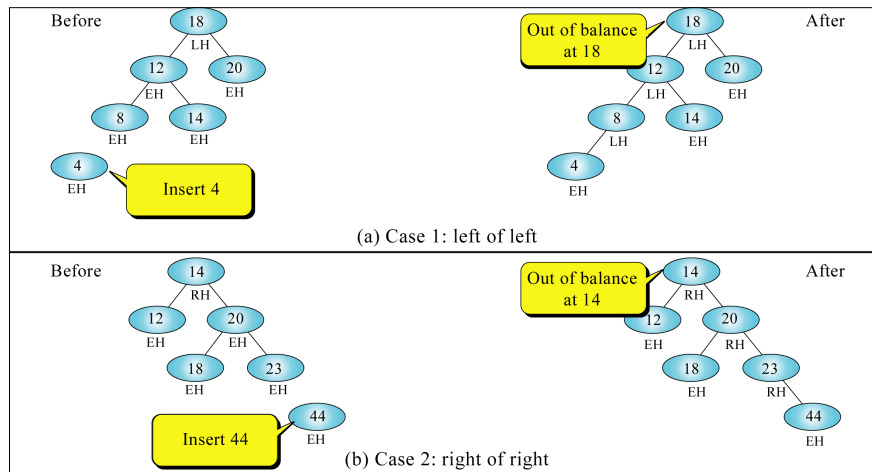
Εξισορρόπηση δένδρων AVL

- Ένα δέντρο AVL λέγεται «ψηλό από αριστερά» (LH) όταν το ύψος του αριστερού υποδένδρου είναι μεγαλύτερο από αυτό του δεξιού
- Αντίστοιχα για το «ψηλό από δεξιά» (RH)
- Αλλιώς είναι «ίσα ψηλό» (EH)
- Υπάρχουν αρκετοί τρόποι με τους οποίους η προσθήκη ή η διαγραφή στοιχείων σε ένα δέντρο AVL παραβιάζει τη συνθήκη χαρακτηρισμού του.
- Η επαναφορά της ιδιότητας σε ισχύ, γίνεται με **περιστροφή** του δένδρου, ανάλογα με την περίπτωση αναδιάρθρωσης που συντρέχει.

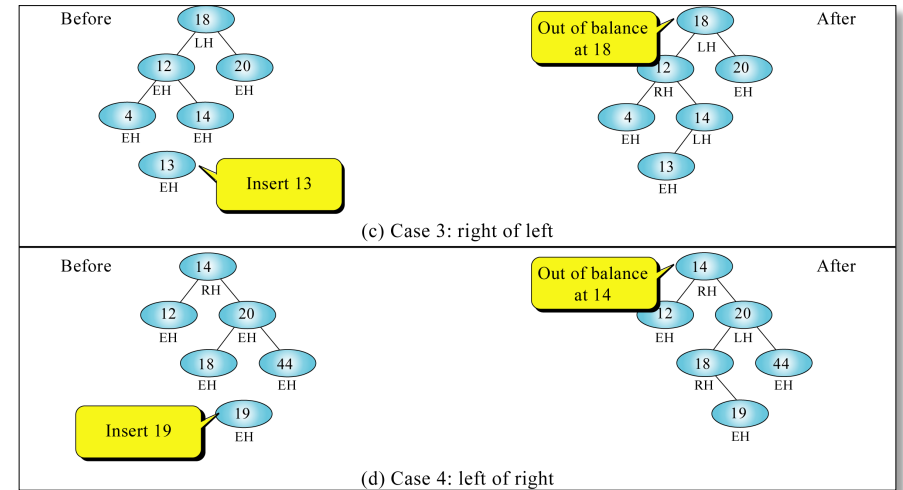
Αναδιάρθρωση δένδρων AVL

- Περιπτώσεις αναδιάρθρωσης
 - AA: ένα αριστερό υποδέντρο ενός δένδρου AVL που είναι ψηλό από αριστερά, γίνεται επίσης ψηλό από αριστερά (**left of left**)
 - ΔΔ: τα αντίστοιχα για το δεξί υποδέντρο (**right of right**)
 - ΔΑ: ένα υποδέντρο ενός δένδρου AVL ψηλού από αριστερά, γίνεται ψηλό από δεξιά (**right of left**)
 - ΑΔ: ένα υποδέντρο ενός δένδρου AVL ψηλού από δεξιά, γίνεται ψηλό από αριστερά (**left of right**)

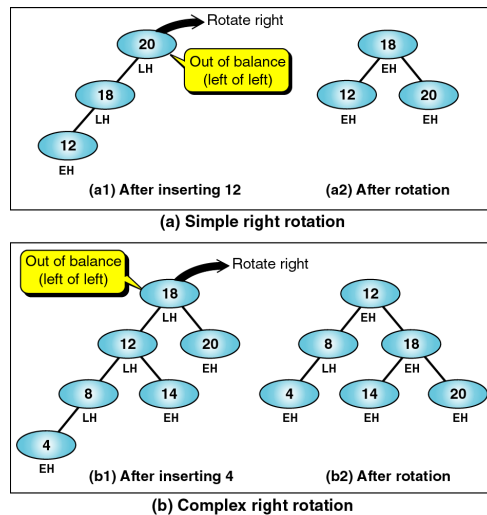
Περιπτώσεις αναδιάταξης (α)



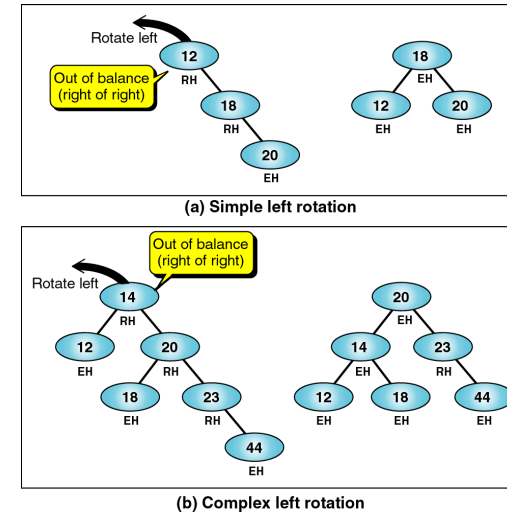
Περιπτώσεις αναδιάταξης (β)



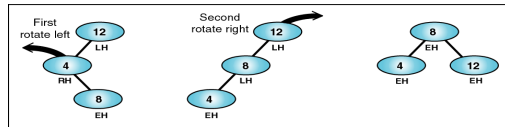
Αναδιάταξη σε περίπτωση AA



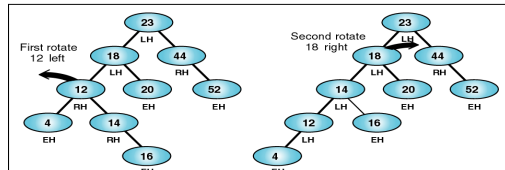
Αναδιάταξη σε περίπτωση ΔΔ



Αναδιάρθρωση σε περίπτωση ΔΔ

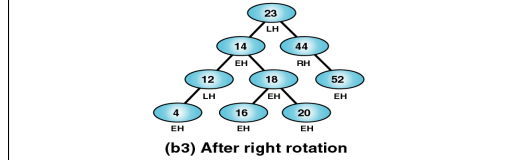


(a) Simple double rotation right



(b1) Original tree

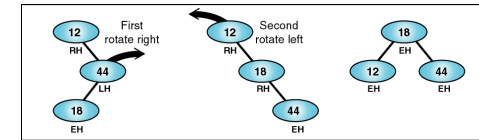
(b2) After left rotation



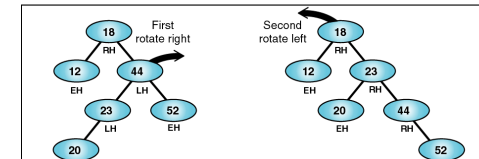
(b3) After right rotation

(b) Complex double rotation right

Αναδιάρθρωση σε περίπτωση ΑΔ

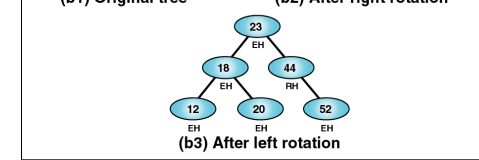


(a) Simple double rotation right



(b1) Original tree

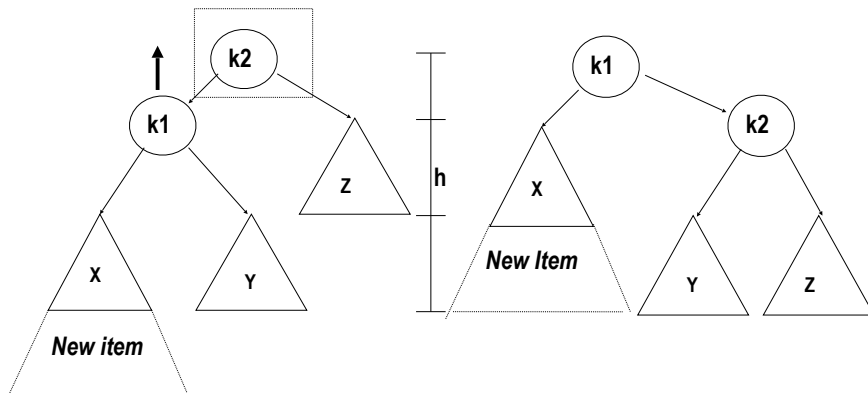
(b2) After right rotation



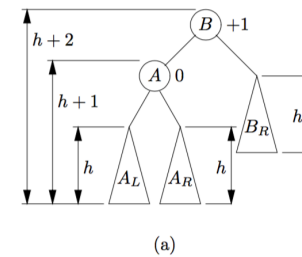
(b3) After left rotation

(b) Complex double rotation right

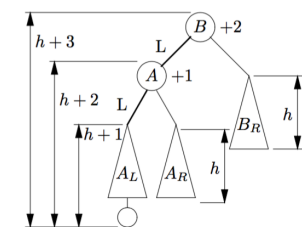
Απλή περιστροφή



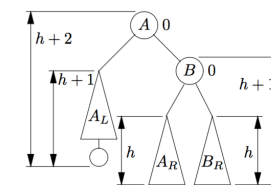
Απλή περιστροφή



(a)

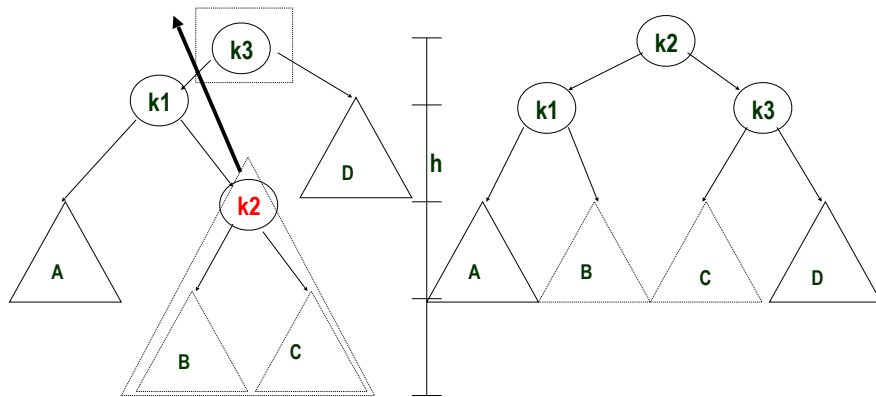


(b)

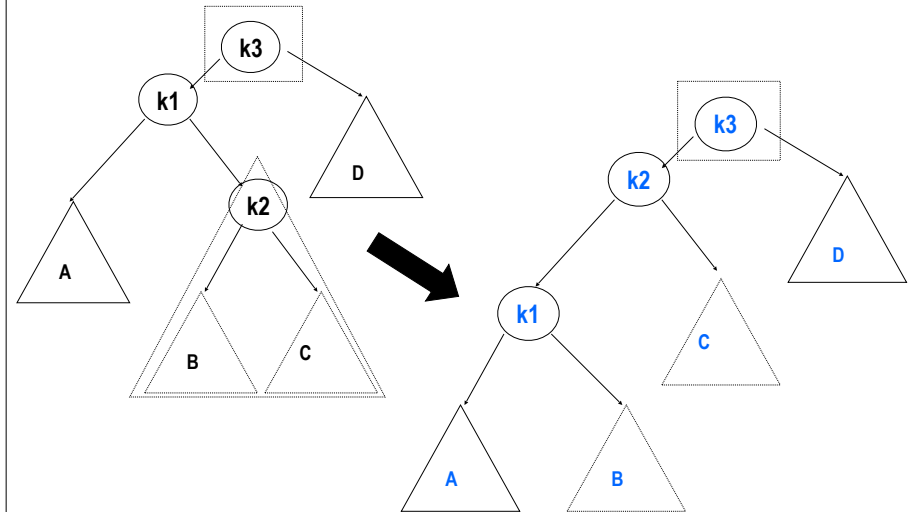


(c)

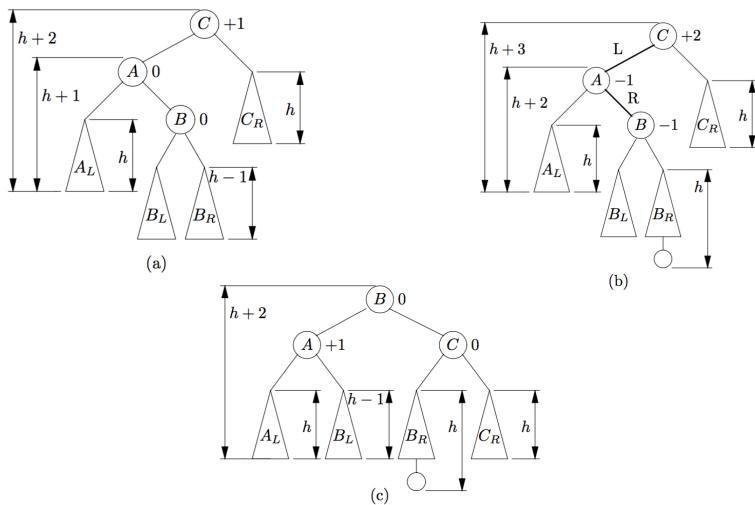
Διπλή περιστροφή



Διπλή περιστροφή

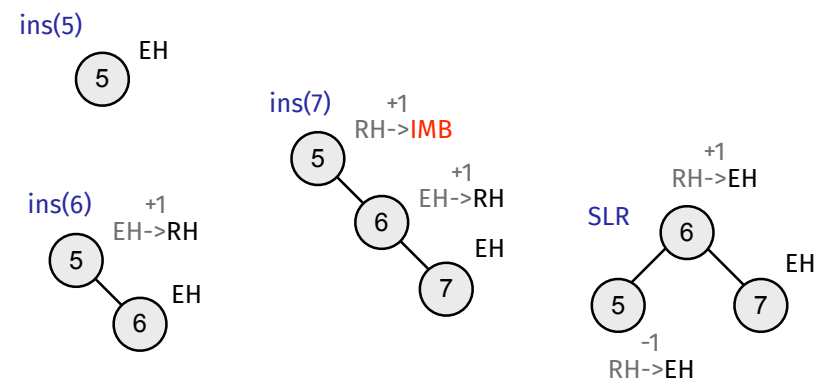


Διπλή περιστροφή



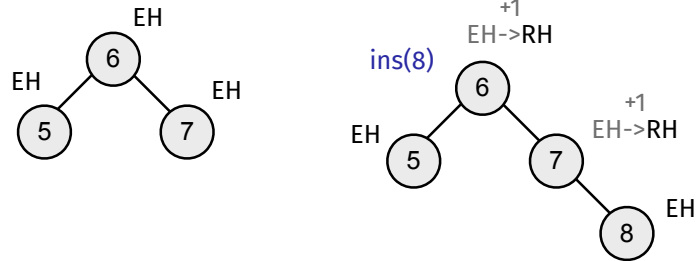
Παράδειγμα

ins(5), ins(6), ins(7), ins(8), del(5), ins(3), ins(4), del(8)



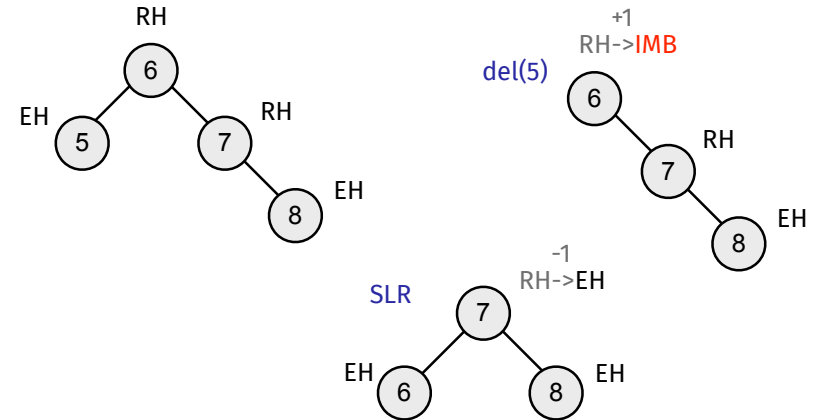
Παράδειγμα

ins(5), ins(6), ins(7), ins(8), del(5), ins(3), ins(4), del(8)



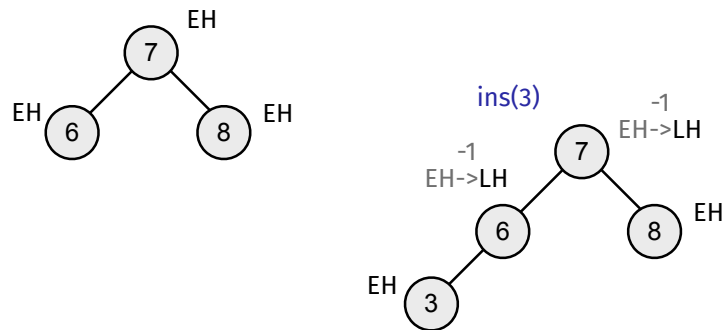
Παράδειγμα

ins(5), ins(6), ins(7), ins(8), del(5), ins(3), ins(4), del(8)



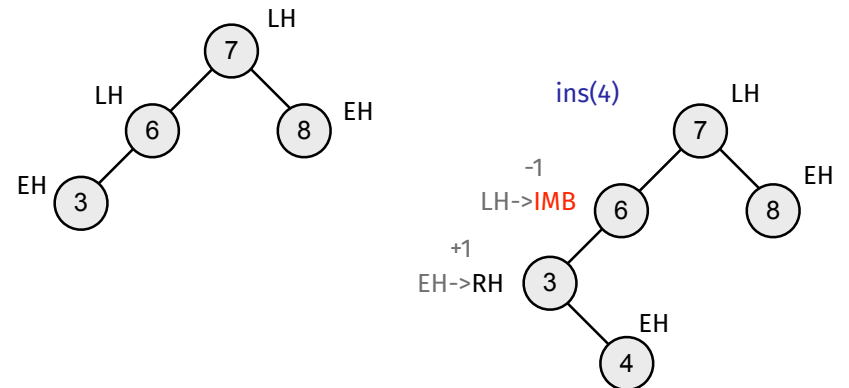
Παράδειγμα

ins(5), ins(6), ins(7), ins(8), del(5), ins(3), ins(4), del(8)



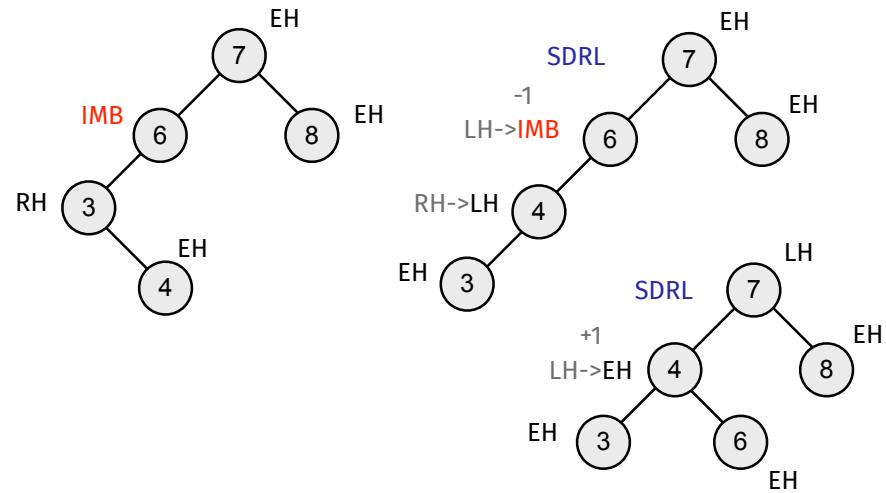
Παράδειγμα

ins(5), ins(6), ins(7), ins(8), del(5), ins(3), ins(4), del(8)



Παράδειγμα

ins(5), ins(6), ins(7), ins(8), del(5), ins(3), ins(4), del(8)



Παράδειγμα

ins(5), ins(6), ins(7), ins(8), del(5), ins(3), ins(4), del(8)

